கணிதம் கற்பித்தல்

என். தமயந்தி பாக்கியநாதன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—795

கணிதம் கற்பித்தல்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

திருமதி என். தமயந்தி பாக்கியநாதன், எம்.ஏ.,பி.டி.,
கணிதப் பேராசிரியை,
வெலிங்டன் சீமாட்டிப் பயிற்சிக் கல்லூரி,
சென்னை-5.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — March, 1978
Number of Copies — 1000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 795

TEACHING OF MATHEMATICS

TMT. N. DAMMAYANTHY PACKIANATHAN

Price Rs. 19-10

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture) New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by :
BHAGAT PRINTERS,
55, Railway Station Road,
Alandur, Madras-600 016.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித்தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான கணிதம் கற்பித்தல் என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 795 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 830 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில் நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளர வேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

முதல் பகுதி

1. கணிதத்தின் தன்மை, வாய்ப்பெல்லை, வரலாறு

கணிதத்தின் தன்மைகள்

கணிதம் என்றவுடன் நம் நினைவுக்கு வருபவை: எண்கள், அவற்றைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடும் பலவிதக் கணிப்பு முறைகள், வடிவியல் உருவங்கள், அவற்றை நுட்பமாக அளந்தறியும் முறைகள், வரைபடங்கள், பற்பல குறியீடுகளைக்கொண்டு எழுதப் பட்ட சமன்பாடுகள் இவைகள்தாம். இவற்றையெல்லாம் கணிதத்தின் கருவிகள் என்று கூறலாம். கணிதம் என்பது இவற்றின் அடிப்படையான சிந்தனைச் சக்தியாகும்; அது ஒரு தருக்கமுறைப் பாடம். நாம் தினமும் பார்க்கும் பொருள்களையும், செய்யும் செயல்களையும் பெரும்பாலும் சார்ந்திருந்தாலும், அதன் முறைகள் யாவும் தருக்க அடிப்படையிலேயே அமைந்தவை. எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளிலிருந்து, பகுத்தறிவின் அடிப்படையில் திட்டமான முடிவுகளை நிரூபித்துக் காட்டுவது கணிதத்தில் தலையாய கருத்து நோக்கமாகும்.

துல்லியம் அல்லது திட்பம் (Precision)

கணிதத்தின் தன்மைகளில் முதன்மையானது திட்பம். ஒரு பிரச்சினையை விடுவிப்பதால் கிடைக்கும் விடை, சரியாக இருக்க வேண்டும்; அல்லது, தவருக இருக்க வேண்டும். இவ் விரண்டுமல்லாத ஓர் இடைநிலையான கருத்துக்குக் கணிதத்தில் இடமேயில்லை.

உளவியல் கண்ணேட்டத்தில் பார்ப்போமானுல், கணிதத்தின் இத்தகைய பண்பானது மாணவர்களின் மனப்பயிற்சிக்குப் பெரிதும் உதவுகின்றது எனலாம். எந்தப் பிரச்சினையையும் திட்ப நுட்பமாக ஆராய்ந்து, சரியான செயல்முறையைப் பயன்படுத்தித் தேவையான விளக்கங்களைக் காண்பதற்குக் கணிதம் மாணவர்களைப் பழக்குகின்றது.

தருக்கமுறை அமைப்பு (Logical, structure)

கணிதத்தின் மற்றொரு சிறந்த பண்பு, அதன் வகை பிறழாத தருக்க முறையாகும். குறிப்பிட்ட ஒரு கணிதப் பிரச்சினையைத்

தீர்க்க முற்படும்போது, முதலாவதாக அதனை நன்கு ஆராய்ந்து, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்பாடுகளைத் தருக்க முறையில் வரிசைப் படுத்த வேண்டும். பின்னர், அப் பிரச்சினையைத் தீர்க்கும் பொழுது, ஒவ்வொரு படியும் காரணவிளக்கத்துடன் அமைய வேண்டும். இல்லையேல், நாம் மிகச் சாதாரணமாகப் பயன் படுத்தும் சமன்பாட்டுக் குறியில்கூடத் தவறுகள் நேரிடலாம்.

உதாரணமாக,

1. 200 பைகளின் விலை 20 ரூபாய் என்பதை 200 பைகள் = ரூ. 20 என்று எழுதுவது தவறு.

2. ஒரு பெட்டி பாதி திறந்திருப்பதும், பாதி மூடியிருப்பதும் சமம் என்பது யாவர்க்கும் தெரியும். ஆனால், இதைச் சமன்பாடாக எழுதினால் $\frac{1}{2}$ திறந்திருப்பது $=$ $\frac{1}{2}$ மூடியிருப்பது;

அல்லது, திறந்திருப்பது = மூடியிருப்பது என்று முடியும். கணிதத் தருக்கமுறையில் இவ்விதத் தவறுகளைக் கவனித்து நீக்க வேண்டும்.

3. நான்கு மீட்டர் நீளம், மூன்று மீட்டர் அகலமுள்ள ஓர் அறையின் பரப்பளவைப் பற்றிக் குறிக்கும்போது,

4மீ. $\times$ 3 மீ. = 12 ச. மீ. என்று குறிப்பது தவறு.

இதை, (4×3) ச.மீ. = 12 ச.மீ. என்றே குறிப்பிடவேண்டும்.

தகுந்த ஆதாரங்களின்றி, கூற்றுகள் உண்மைகளாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதில்லை. விடை சரியாக இருந்தால்கூட விளக்கம் சரியில்லாத கணக்குகளை ஆசிரியரும் ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடாது. விளக்கங்கள் தருக்க முறையில் அமையாவிடில் மாணவர் களின் மனப்பயிற்சியும் முழுமைபெறாது. மாணவர்கள் இப் பண்பை உணர்ந்து செயற்படும்படி பழக்கப்படுவார்களாகில், கணிதத்தில் மட்டுமன்றித் தங்கள் வாழ்க்கையிலும் காரண மில்லாத செயல்களைச் செய்யமாட்டார்கள்.

கருத்தியல் நிலை (Abstractness)

கருத்தியல் நிலை, கணிதத்தின் தனித்தன்மை யென்றே கூற வேண்டும். எனவே, இதன் முக்கியத்துவத்தைப்பற்றி வலி யுறுத்தத் தேவையில்லை. நம்முடைய அன்றாட வாழ்க்கைப் பிரச்சினைகளே, கணிதம் வளர்வதற்கு அடிப்படைக் காரணங் களாயிருப்பினும், கணித முறைகள் யாவும் கருத்து நிலையிலேயே அமையப்பெற்றவை. பயன் முறைகள் இல்லாமலே இதன் கருத்துகள் வளரக் கூடியவை. உண்மையில், பல பெரிய கணித மேதைகள் கணிதத்தை, அதன் சிறந்த கருத்துகளுக்காகவே பயின்று, கருத்துகள் மேலும் வளரவே ஆராய்ச்சிகள் செய்தனர்.

கணிதம் அதன் தொடக்க நிலையிலேயே கருத்தியலானதாகும். உதாரணமாக, எண் கோட்பாடு கருத்தியலானது (number is an abstract concept). சிறுவர்களுக்கு எண்களைப்பற்றிப் போதிக்கும் போது, குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துகின்றோம். இரண்டு என்று கூறி இரண்டு கோலிகளைக் காட்டும்போது அவை இரண்டுகோலிகள் என்றே கூறவேண்டும். இரண்டு என்ற சொல் ஒரு கருத்தைக் குறிப்பதாகும்; அது உருவ அமைப்பிற்கு அப்பாற்பட்டது. கோலிகளைக் காட்டுவது காட்சிநிலை யாகும். காட்சிநிலை கருத்து நிலை வளர்வதற்கான ஆதாரமாகும். காட்சிநிலையில் அறிமுகப் படுத்தியபின் கருத்துநிலைக்குச் சென்ற பின்னர்க் கருத்து நிலையி லேயே கணக்குகளைச் செய்வதற்கும் மாணவர்களைப் பழக்க வேண்டும்.

கணித மொழி (Symbolism)

கணிதத்திற்கென்று தனியான மொழியொன்று உண்டு. ஒவ்வொரு சமன்பாடும், ஒப்பின்மையும் (inequality), ஒரு பொருளை விளக்கும் வாக்கியங்களாகும். $=$, $>$, $<$ என்பவை இவற்றிற்கான குறியீடுகளாகும். ஆசிரியர் கணித மொழியைத் தெளிவாகவும் திருத்தமாகவும் எழுதுவதோடு மாணவர்களும் அவ்வண்ணமே எழுதுமாறு செய்யவேண்டும். குறியீடுகள், கருத்து களைக் காட்டும் கருவிகளேயன்றி, இவற்றைக் கருத்துகள் என்று கூற முடியாது. ஒரு விதியையோ அல்லது கோட்பாட்டையோ சுருக்கமாகக் குறியீட்டு முறையில் கூறுவது சூத்திரம் எனப்படும்.

உதாரணம் : $I = \frac{PNR}{100}$, $C = 2\pi r$ . . . .

சில கணிதக் குறியீடுகள்

$0, 1, 2, 3 \ldots\ldots, =, \neq, +, -, \times, \div, \sqrt{}, x^n, <, >, \not<, \not>, \doteq, \equiv, |||, \perp, ||, \cup, \cap, \in, \notin, \subset,$ ......திசை எண்கள் முதலியன.

கணிதத்தின் குறியீட்டு மொழியே அதன் தனித் தன்மை யாகும். ஒலியினைத் தெரிவிக்க இசைக்கலையில், குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துதல் போன்று, கணித அளவுகளின் தொடர்புகள், குறியீடுகள் மூலம் தெரிவிக்கப்படுகின்றன. கணித மொழியானது ஒரு குறிக்கோளுடன், மிகக் கவனமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. சாதாரண மொழியைப் பயன்படுத்துவதால், கருத்தில் ஏற்படும் குழப்பங்களைக் குறியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்துவதால் தவிர்க்க முடியும்.

உதாரணமாக, பங்கீட்டு விதியான (Disributive Law) $a(b+c) = ab + ac$ என்பதைச் சொற்களால் பிரித்து எழுதுவோமானால், தெளிவும் குறையும்; அநேகச் சொற்களைப் பயன்படுத்துவதால் தவறும் நேரிடலாம்; மனப்பாடம் செய்வதும் கடினம்.

கணிதம் செயல்முறைகளை விளக்கும் ஒரு கருவி என்று கூறுவதைவிட, ஒரு தனிமொழி அல்லது கலை என்றே கூறலாம். அறிவியலாருக்கும், மன்னுய நூலாருக்கும் (Social Scientists), தத்துவ-தருக்க மேதைகளுக்கும், கலைஞர்களுக்கும் தேவையான கருத்துகள் இதில் அடங்கியுள்ளன.

கணிதத்தில், சொற்களாலாயினும் சரி, குறியீடுகளாலாயினும் சரி, மிகத் திட்டவட்டமான நடையைப் பயன்படுத்தும் திறன் இன்றியமையாததாகும். சிறந்ததொரு கணிதக்கூற்றின் தனிப் பண்புகளைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்:

(a) பழக்கத்திலிருக்கும் சொற்களும் குறியீடுகளும் மட்டுமே பயன்படுத்தப்பட வேண்டும்.

(b) தெளிவானதாகவும், ஒரே பொருளுடையதாகவும் (unambiguous) இருக்கவேண்டும்.

(c) ஒவ்வொரு சொல்லும் குறியும் தேவையை முன்னிட்டே பயன்படுத்தப்படவேண்டும்; தேவையற்ற சொற்களையும் குறியீடுகளையும் அறவே தவிர்க்கவேண்டும்.

(d) கூடுமான வரையில், சுருக்கமாகவும் எளிதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

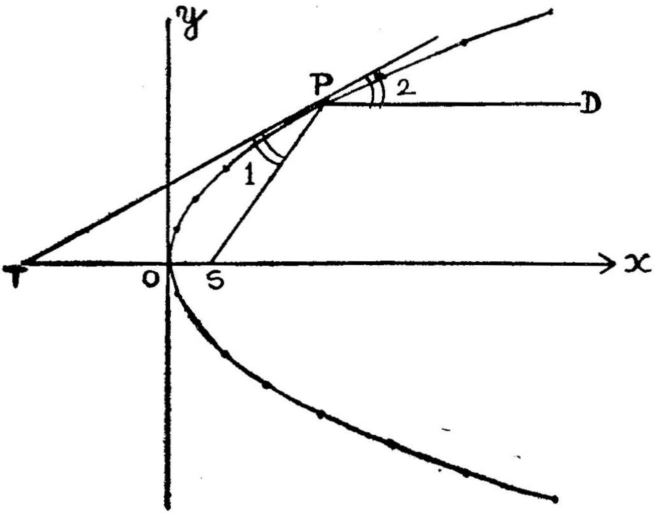
உயர்நிலைப் பள்ளியில், கணிதத்திற்கும் மற்றப் பாடப் பகுதிகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகள்

(சில உதாரணங்களுடன் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன)

கணிதமும் இயற்பியலும் (Mathematics and Physics)

ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாடு (equation for a curve) எத்துணை அவசியமானது என்றறியப் பரவளைவு (parabola) ஒன்றின் பயனை நோக்கலாம். இந்த வளைகோடு, அச்சு என்ற ஒரு நேர்கோட்டிற்குச் செஞ்சீராக (symmetric) அமைந்துள்ளது. இந்த அச்சின்

மீதுள்ள ஆதாரப் புள்ளியை (focus) *S* என்றும் வளைவின்மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை *P* என்றும் கொள்ளலாம். படத்தில்



படம் 1

காட்டப்பட்டதுபோல் தொடுகோடு *PT*-யுடன் *SP*-ம், அச்சுக்கு இணையாக *P*-ன் வழியே அமைந்துள்ள நேர்கோடு *PD*-ம் சம கோணங்களைத் தாங்குகின்றன. ($\angle 1 = \angle 2$).

பரவளைவை ஒரு பிரதிபலிக்கும் வளைதளப் பரப்பின் குறுக்கு வெட்டாகக் (cross-section) கொள்வோம். *S*-ல் ஒரு சிறிய விளக்கு இருப்பதாகக் கொண்டால், இதிலிருந்து வரும் ஒளிக்கற்றைகள் பரவளைவில் பட்டுப் பிரதிபலிப்படைந்து அச்சுக்கு இணையாகச் செல்கின்றன. அச்சுக் கிணையாகச் செல்வதால், தெளிந்த ஒளி நமக்குக் கிடைக்கின்றது.

நடைமுறையில் இவ் விதியைப் பயன்படுத்தி, உந்து வண்டிகளின் முன்விளக்கை அமைத்துள்ளனர். கூம்பின் வெட்டுமுகக் கோடுகளான பரவளைவு (parabola), நீள்வளையம் (ellipse), அதிபரவளைவு (hyperbola) இவற்றிற்கு ஒரேமாதிரியான பண்புகள் உண்டு. இந்தப் பண்புகளைக் கண்ணாடி வில்லைகள் (lenses), தொலை நோக்கிகள், நுண்நோக்கிகள், *X*-கதிர் இயந்திரங்கள், சினிமா, ரேடியோக் கருவிகள் முதலியவற்றை அமைப்பதில் பயன்படுத்தியுள்ளனர். 'அறிவியல் முறைகளுக்கும், கருத்துகளுக்கும் கணிதம்

எத்துணையளவு பயன்படுத்தப்படுகின்றது என்பதை யொட்டியே அறிவியலின் முன்னேற்றம் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது' எனக் 'கென்ட்' (Kant) என்பவர் கூறியுள்ளார்.

உதாரணமாக,

1. ஒழுங்கான வடிவப் பொருள்களின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் வடிவியல் மையப்புள்ளி (Geometric centre) ஆகும்; வட்டத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம், வட்டத்தின் மையமாகும்; முக்கோணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம், அதன் மையக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்; சதுரம் அல்லது சாய்சதுரத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் அதன் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியாகும்.

2. ஒளிமுறிதல் சூத்திரம் $\frac{\sin i}{\sin r} = \mu$ என்பது ஓர் ஊடகப் பொருளிலிருந்து மற்றோர் ஊடகப்பொருளுக்குள் ஒளி செல்லும் போது ஏற்படும் திசை மாற்றத்தைக் காட்டுகின்றது. μ அந்த ஊடகத்தின் விலகல் எண்.

3. பாரன்ஹீட் அளவையும், சென்டிகிரேட் அளவையும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு $F = \frac{9}{5}C + 32$. இதற்கு வரைபடம் வரைந்தால் கொடுக்கப்பட்ட பாரன்ஹீட் அளவுகளைச் சென்டிகிரேடாகவும், சென்டிகிரேடு அளவுகளைப் பாரன்ஹீட்டாகவும் உடனடியாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

4. நெம்புகோல் பொறிகளில், ஆற்றல் $\times$ ஆற்றல் புயம் $=$ விசை $\times$ விசைப்புயம்.

5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, அல்லது $\frac{l}{T^2}$, ஒரு மாறிலி என்பது ஒரு தனி ஊசலியின் நீளமும் அதன் அலைவு நேரத்தின் வர்க்கமும் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என்னும் கொள்கையைச் சுருக்கமாக விளக்குகின்றது.

6. நீட்சியும் பளுவும் நேர் விகிதத்திலிருக்கும் (strain is directly proportional to stress). நீட்சி/பளு $=$ மாறிலி (ஹூக்கின் விதி)

7. ஆர்க்கிமிடிஸின் கொள்கை, ஒரு பொருளின் அடர்த்தி

$$\text{எண்} = \frac{\text{காற்றில் அப் பொருளின் எடை}}{\text{நீரில் அதன் எடை இழப்பு}}$$ என்பதாகும்.

$$\text{அடர்த்தியெண்} = \frac{\text{பொருளின் எடை (ஒரு குறிப்பிட்ட கன அளவு)}}{\text{அதே கன அளவுடைய நீரின் எடை}}$$

உதாரணம்,

தங்கம்போல் (அடர்த்தியெண் 19·3) தோற்றமளித்த ஒரு சங்கிலி உன் கையில் கிடைத்தது. ஆனால், இது பித்தளையாக (அடர்த்தியெண் 8·4) இருக்கலாம் என்ற ஐயம் ஏற்படுகின்றது. அதன் எடை 20கிராம். இதை ஓர் அளக்கும் ஜாடியில் போட்ட போது தண்ணீர் 40 கன செ.மீ.-லிருந்து 42·4 கன செ. மீ. ஆக உயர்ந்தது. சங்கிலி செய்யப்பட்ட உலோகத்தின் அடர்த்தி எண் என்ன?.

கணிதப் பாடங்கள் இதனால் சிறப்படைவதோடு கவர்ச்சியாக வும் இருக்கும். அறிவியல் பாடங்கள் கணித அடிப்படையில் வலிமை பெறுகின்றன.

கணிதத்துக்கும் அறிவியலுக்குமுள்ள தொடர்பு

1. மன்னுய நூலிலும் (Social Science) இயற்பியல் தொடர் பான நூல்களிலும் அளவை அடிப்படையான பிரச்சினைகளை ஆய்வதற்குக் கணிதம் பயன்படுகின்றது. மிகச் சிக்கலான கருத்துகளைக்கூடத் தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும் எழுதுவதற்குக் குறியீடுகள் உதவுகின்றன.

2. அறிவியல் ஆய்வுமுறைகளுக்கும், முடிவுகளுக்கும் கணிதம் பெரிதும் பயன்படுகின்றது. சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துதல் வெகுவாகப் பழக்கத்தில் வந்துவிட்ட காரணத்தால் அவற்றை ஏற்படுத்துவதில் பயன்பட்ட கணிதத்தின் முக்கியப் பங்கு பொது வாகப் பாராட்டப்படுவதில்லை. உதாரணமாக, பரப்பளவு, கன அளவு இவற்றைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரங்கள் மறை முகமாக அளப்பதற்கு உதவும் கோணகணிதச் சூத்திரங்கள், இயங்கும் பொருள்களின் வேகத்தைக் காண உதவும் சூத்திரங் கள் போன்றவை மிக முக்கியமானவையாகும்.

19ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்துவந்த ஆங்கில அறிவியலாரான மாக்ஸ்வெல் (Maxwell) என்பவர் மின்னியல் விதிகளைப் (Electrical Theory) பற்றிய கருத்துகளைக் கணித முறைகளைக் கொண்டே விளக்கியுரைத்தார். கம்பியில்லாத் தந்தி, ரேடியோ இவற்றின் வளர்ச்சியில் இவை பெரிதும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாக இருக்கும் என்பதை அப்போது அவர் அறிந்திருக்க இயலாது. நுண்கணிதத்தைக் கண்டுபிடித்தவர்களான நியூட்டனும், லிபி னிட்ஸூம் இன்று நாம் அவற்றைப் பற்பல விதங்களில் பயன் படுத்துவதைக் கண்டு வெகுவாக வியப்படையக்கூடும்.

3. அறிவியலில் மனிதனின் சிந்தனையைப் புதிய வழிகளில் திருப்பக் கணிதம் பெரிதும் உதவுகிறது. 17ஆம் நூற்றாண்டு அறி

வியலில் கணிதச் சார்பலனைக் கொண்ட விதிகளும், சூத்திரங்களும் நிறைந்திருந்தன. டேகார்டே, கலிலியோ, ஹைகன்ஸ் (Huyghens), கெப்லர், நியூட்டன், லிபினிட்ஸ் முதலிய கணித மேதைகள் இந்த விதிகளைக் கண்டறிந்தவர்களுள் முக்கியமானவர் கள். பொதுவாக, அறிவியல் பிரச்சினைகள் கணித ஆராய்ச்சியைத் தொடர்வதற்கு வழிகோலுகின்றன. புதிய கணிதக் கண்டுபிடிப்பு களுக்கு இவை தொடக்கமாக அமைகின்றன.

கணிதமும் வேதியியலும்

மேல் வகுப்புகளில், அங்கக வேதியியல் (Organic Chemistry), அனங்கக வேதியியல் (Inorganic Chemistry), கணித வேதியியல் (Mathematical Chemistry) முதலிய பாடப் பகுதிகளைத் தெரிந்து கொள்வதற்கு அடிப்படைக் கணித அறிவு மிக அவசியம். கணிதமும் வேதியியலும் எவ்வாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்றறியக் கீழே சில உதாரணங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. ஒரு பொருளின் கரைதிறன் (solubility) என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட வெப்ப நிலையில் 100 கிராம் கரைப்பானில் எத்தனை கிராம் பொருள் கரைந்து பூரிதக் கரைசல் உண்டாக்குகிறதோ, அந்த எண் ஆகும். x கிராம் கரைபொருள், y கிராம் கரைப் பானில் கரைந்து பூரிதக்கரைசல் உண்டானால், கரைதிறன் $= \frac{x}{y} \times 100$.

2. சில குறிப்பிட்ட உப்புகளின் கனவடிவங்களைக் கவனித் தால் இவை சமதளக் கன உருவங்களாக இருக்கும். ஒரு திடப் பொருள், ஒரு குறித்த வடிவத்தையும் சமதளப் பரப்புகளையும் இயற்கையாகவே பெற்றிருந்தால் அதற்குப் படிகம் (crystal) என்பது பெயர். சாதாரண உப்பு, கன சதுர வடிவம் கொண்டது; படிகாரம் எண்முகப்பு வடிவம் உடையது; மயில்துத்தப் பட்டை உருட்டு வடிவம் கொண்டது.

3. பாயில் விதி: வெப்ப நிலை மாறாமல் இருக்கும்பொழுது ஒரு வாயுவின் அழுத்தமும் அதன் கன அளவும் எதிர்விகிதத்தில் இருக்கின்றன. இதுவே பாயிலின் விதியாகும்.

P = அழுத்தம், V = கன அளவு, κ = ஒரு நிலை எண்.

என்றால் $P \propto \frac{1}{V}$ அல்லது $PV = \kappa$

4. சார்லஸ் விதி: வாயுக்கள் வெப்பத்தினால் விரிவடை கின்றன; குளிர்ச்சியால் சுருங்குகின்றன என்பதை நாம் அறிவோம்,

கொடுக்கப்பட்ட வாயுவின் கன அளவிற்கும் அதன் வெப்ப நிலைக்கும் உண்டான தொடர்பை விளக்குவதே சார்லஸ் விதி யாகும். அழுத்தம் நிலையாக இருக்கும்பொழுது குறித்த பொருள்-திணிவுள்ள ஒரு வாயுவின் கனஅளவும் அதன் தனி வெப்ப நிலையும் நேர்விகிதத்தில் இருக்கின்றன. $V = \kappa T$ — (T தனி வெப்ப நிலை - Absolute temperature.)

5. காற்று மண்டலம், பூமியின் பரப்பிற்குமேல் சுமார் 400 கிலோமீட்டர் உயரத்திற்குப் பரவியிருக்கிறது. இக் காற்றின் பெரும்பாகம் நைட்டிரஜனும் ஆக்ஸிஜனும் ஆகும். சிறு அளவு களில் அபூர்வ வாயுக்கள் இருக்கின்றன. கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையைக் கவனிக்கவும்.

காற்றில்	கன அளவு	எடை
(a) ஆக்ஸிஜன்	21%	23%
(b) நைட்டிரஜன்	78%	76%
(c) கார்பன்-டை-ஆக்ஸைடும், ஆர்கான், நியான் முதலியனவும்	1%	1%

6. கணிதத்தில் குறியீடுகள் இருப்பதுபோல் வேதியியலிலும் ஒவ்வொரு மூலகமும் குறியெழுத்தினால் (symbols) குறிப்பிடப்படு படுகின்றது:

ஹைடிரஜன் — H வெள்ளி — Ag

ஆக்ஸிஜன் — O தண்ணீர் — H_3O

நைட்டிரஜன் — N

வேதியியல் கிரியைக்குப் பிறகு உண்டாகிய பொருள்களைச் சமன்பாடாக எழுதினால் மட்டும் போதாது, அதனைச் சமநிலைச் சமன்பாடாக (balanced equation) எழுத வேண்டும்.

உதாரணம்: ஹைடிரஜன், ஆக்ஸிஜன் கிரியையால் நீர் கிடைக்கிறது என்பதை $H_2 + O_2 \longrightarrow H_2O$ என்று எழுதுவது தவறு. $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$ என்று எழுதவேண்டும்.

(2) $2Mg + O_2 \longrightarrow 2MgO$

(3) $2KClO_3 \longrightarrow 2KCl + 3O_2$

7. உலோகக் கலவை செய்ய எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட உலோகங்கள் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் எடுக்கப்பட்டு உலோகக் கலவையாக உருக்கப்பட்டுக் குளிரவைக்கப்படுகின்றது. தங்கம் மிகவும் மென்மையானதோர் உலோகம். ஓரளவுக்குத் தாமிரத்தை அதனோடு கலந்து உறுதிப்படுத்துகிறார்கள். (22 காரட் தங்கம் என்றால் என்ன?) கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உலோகக் கலவைகள் அதிக உபயோகத்தில் உள்ளன.

(i) பித்தளை (Brass) — { 65% தாமிரம், 35% துத்தநாகம்

(ii) வெண்கலம் (Bronze) — { 95% தாமிரம், 4% வெள்ளீயம் (Tin), 1% துத்தநாகம்

(iii) டியூரா அலுமினியம் (Duraluminium) — { 95% அலுமினியம், 4% தாமிரம், $\frac{1}{2}$% மக்னீசியம், $\frac{1}{2}$% மங்கனீசு

(iv) துருப்பிடிக்காத எஃகு (Stainless Steel) — { 70% எஃகு, 20% குரோமியம், 10% நிக்கல்

கணிதமும் உயிரியலும்

உயிரினங்களின் வெவ்வேறு தசைநார்கள் எவ்விதம் இயங்குகின்றன என்பதையும், நுண்ணுயிர்களும், நோய்க் கிருமிகளும் எவ்விதம் பெருகுகின்றன என்பதையும், மற்றும், பிறப்பு மூலத்தைப் பற்றிய புதிர்கள் பலவற்றையும், நோய்க்கிருமிகள், உடல் அணுக்கள் முதலியனவற்றின் உருவளவுகளையும், இரத்த அழுத்தம், நாடித் துடிப்பு ஆகியவற்றையும் கணிப்பதற்குக் கணித முறைகளே பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

உதாரணமாக,

1. முட்டையிலுள்ள சத்துப் பொருள்கள், 66% நீர், 13% புரோட்டீன், 10% கொழுப்பு, 11% தாது உப்புகள்.

2. நம் உடலின் எடையில் 100-க்கு 9 பங்கு இரத்தத்தின் எடையாகும். 1 க.மி.மீ. இரத்தத்தில் ஏறக்குறைய 50,00,000 சிவப்பு அணுக்கள் (red corpuscles) இருக்கும். சிவப்பணுக்களை விட வெள்ளணுக்கள் உருவில் சற்றுப் பெரியவை. ஆனால், எண்ணிக்கையில் குறைவானவை. ஒரு க.மி.மீ. இரத்தத்தில் ஏறத்தாழ 5,000 வெள்ளணுக்கள் காணப்படும். பிளாஸ்மா

இரத்தத்தின் திரவப் பகுதியாகும். இது வெளிறிய மஞ்சள் நிற முடையது. இரத்தத்தில் 100-க்கு 55 பகுதியாக இருப்பது இதுதான்.

3. வயது வந்த மனிதருக்கு (உடல் வெப்பநிலை 98·4°F) ஒரு நிமிடத்திற்கு 72 முறை இதயத்துடிப்பு ஏற்படும். கைக் குழந்தைகளுக்கு 140 முறை இதயத் துடிப்பு ஏற்படும். பொதுவாக, உடம்பின் வெப்ப நிலை 1° கூடினால் இதயத் துடிப்பு 10 அதிகரிக்கும்.

கணிதமும் புவியியலும்

நாட்டின் பொருளாதார நிலையைத் தெரிந்துகொள்வதற்கு, வாணிகம், விவசாயம், தொழில்துறைகளைச் சார்ந்த அடிப்படைப் புள்ளிவிவரங்களும் அவற்றிற்கான வரைபட விளக்கங்களும் தேவைப்படுகின்றன. மேலும், நிலப்படங்களும் (cartography), தலப்படங்களும் (topography) வரைவதற்குத் தேவையான நில அளவீடு முறைகளுக்குச் (surveying) செயல் முறை வடிவியலும், கோண கணிதமும் தேவைப்படுகின்றன.

அளவு திட்டங்கள் (Scales)

நிலப்படங்கள் வரையும்போது, பரந்த நிலப்பரப்பிலுள்ள விவரங்கள் அனைத்தையும் சிறிய தாளில் காட்ட வேண்டியிருப்பதால், தாளின் அளவு விகிதத்திற்கேற்ப நிலப்படங்களும் தயாரிக்கப்படுகின்றன.

நிலப் படத்தில் ஏதேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரத்திற்கும், தரையின்மீது அப் புள்ளிகள் குறிக்கும் இடங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் அளவு திட்டம் (scale) எனப்படும். அளவு திட்டத்தின் விகிதத்தை ஒரு பின்னமாகக் காட்டலாம். அவ்வாறு குறிக்கும்போது தொகுதியினையும், பகுதியினையும் ஒரே அலகில் குறிக்க வேண்டும். தொகுதி எப்போதும் ஒன்றாகவும், பகுதி அதற்கேற்ற முறையிலும் இருக்க வேண்டும்.

$$\text{பிரதி பின்னம்} = \frac{\text{நிலப்படத்தில் தூரம்}}{\text{தரையில் தூரம}}$$

உதாரணமாக, தரையில் ஒரு கிலோமீட்டரைப் படத்தில் ஒரு செ. மீட்டராகக் காட்டினால்,

$$\text{பிரதி பின்னம்} = \frac{1}{1,00,000} \text{ அல்லது } 1 : 1,00,00.$$

புவியியல் சம்பந்தப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை வரைபடங்களாகக் குறிக்கலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள் பல நாடுகளில் உற்பத்தியாகும் அளவுகளை வரைபடங்களினால் ஒப்பிடலாம். ஓர் ஊரில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் உற்பத்தியாகும் ஒரு பொருள், ஒரு நாட்டில் உற்பத்தியாகும் பல சரக்குகள், ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகை எல்லாவற்றையும் பட்டை விளக்கப்படங்கள் (bar diagram), வட்ட விளக்கப்படங்கள் (pie diagram) முதலியவற்றால் விளக்கிக் காட்டலாம்.

கணிதமும் வரலாறும்

'கணிதம் நாகரிகத்தின் கண்ணாடி' என்று ஹாக்பென் (Hogben) என்ற கணித நூலார் கூறியுள்ளார். வரலாற்றின் ஒவ்வொரு படியிலும் அறிவியலும் அதற்கு அடிப்படையான கணிதமும் பலவாறாகப் பங்கு கொண்டுள்ளன.

கிரேக்கரின் கட்டடக் கலையும், எகிப்தியரின் கட்டடக் கலையும் கிரேக்கரின் வடிவியல் அறிவையே பெரிதும் சார்ந்தனவாகும். முழுவதும் தொழில் வளர்ச்சியின் அடிப்படையிலேயே அமைந்த நம்முடைய தற்கால நாகரிகத்திற்குக் கணிதமும், அறிவியலும் முக்கியமான தூண்கள் போன்றவை. கணிதத்தை முற்றிலும் நீக்கிய வரலாற்று அறிவோ அல்லது, வரலாற்றைப்பற்றிச் சிறிதும் தெரிந்துகொள்ளாத கணித அறிவோ முழுமையற்றது என்றே கூறவேண்டும்.

உயர்நிலைப் பள்ளியில் கணிதப் பாடத்தின் இடம்

கணிதம் அறிவியல் துறைகளில் தலைசிறந்த ஒரு பகுதியாகும். வாழ்க்கையில் எல்லாத் துறைகளிலும் அது கலந்திருக்கின்றது. கணிதம் கற்கும் மாணவர் யாவரும் அதன் இயல்புபற்றி அறிதல் வேண்டும். மேலும், சதவீதம், இயற்கணிதம், விகிதம், விகித சமம், கோண கணிதம், வடிவியல் உருவங்கள் முதலியவற்றைப் பற்றி மக்கள் பேசும்போது, அவற்றைப்பற்றி எவ்வாறு பொருள் கொள்கிறார்கள் என்பதை யாவரும் அறிவது அவசியம். செய்தித்தாள்கள், வார, மாத இதழ்களில் காணப்படும் வானவெளி, கடல் போக்குவரத்துபற்றிய குறிப்புகள், தொழில்துறை, பொறியியல், வாணிகம் முதலியவற்றைப்பற்றிய புள்ளியியல் விவரங்கள், வரைபடங்கள் முதலியவற்றை அறிய இயலாமல் வாழ்வில் முன்னேறுவது இயலாத காரியம். வாழ்க்கைச் செலவுகளின் ஏற்ற இறக்கங்களைக் காட்டப் பயன்படும் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டு எண்ணைப் (cost of living index) பற்றிப் புரிந்துகொள்வது அவசியம். இதன் அடிப்படையிலேயே அவ்வப்போது தொழிலாளரின் பஞ்சப்படி மாற்றியமைக்கப்படுகின்றது.

பல விதங்களில், கணிதம் சமூகத்தை முழுமையாக அறிய உதவும் கருவியாக அமைகிறது; சமூகப் பொருளாதார நிலைகளைச் சித்திரித்துக் காட்டப் பயன்படுகிறது என்ற சிறப்பினைப் பள்ளி மாணவர்களுக்கு உணர்த்தவேண்டும். மாறிவரும் உலகில் சமுதாயத்தில் பயனுள்ள குடிமகனாகச் செயற்பட விரும்பும் ஒவ்வொருவரும், கணிதத்தின் புதிய தேவைகள் என்னவென்பதை அறிந்திருக்க வேண்டும். கணிதம் பிற துறைகளுக்கு ஒரு கருவியாக இயங்குகிறது. அறிவியலின் உண்மைகளை மாணவர்களுக்கு உணர்த்துவதற்கும், அவர்களுடைய தேவைக்கும் விருப்பத்திற்கும் ஏற்ப, அறிவியலின் பல பிரிவுகளில் ஒன்றைப்பற்றியேனும் தங்கள் படிப்பைத் தொடர வாய்ப்புகளை நல்குவதற்கும் கணித அறிவு இன்றியமையாததாகும். திட்பமாகக் கணிக்கத் தெரிவதோடு மட்டும் கணித அறிவு முற்றுப்பெறுவதில்லை. எவ்விதமான கணிப்பு முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கும் திறனையும் மாணவர்கள் வளர்த்துக் கொள்ள வேண்டும். நுணுக்கமாக ஆராயவும், நுண்ணறிவுடன் மதிப்பிடவும் பழக வேண்டிய சூழ்நிலைகளை ஆசிரியர் மாணவர்களுக்கு எடுத்துக்காட்ட வேண்டும். இவ்வாறு கணிதப் பாடம் தன் எல்லைக்குப் புறத்தேயும் சென்று கல்வியின் முக்கியமானதொரு நோக்கத்தை நிறைவேற்றுகின்றது. வேறு எந்தப் பள்ளிப் பாடமும் இவ்வளவு பொருள்வளமும், பாகுபாடுகளும் கொண்ட நடைமுறைப் பிரச்சினைகளைத் தருவதில்லை. பிரச்சினைகளைத் தாமே முயன்று தருக்கித்துத் தீர்த்துவைப்பதில் பின்தங்கிய மாணவர்கள், மீத்திற மாணவர்கள் எல்லோருக்கும் சிறந்த பயிற்சியளிப்பதிலும் கணிதப் பாடமே சிறந்து விளங்குகிறது.

விருப்பக் கணிதமும், கட்டாயக் கணிதமும்

சிறந்ததொரு பாடத்திட்டமானது மாணவர்களின் பல்வேறான திறமைக்கும், தேவைக்கும் ஏற்ப அமைக்கப்பட வேண்டும். ஏனெனில், எல்லா மாணவர்களும் ஒரே விதமான பாடத்தைப் படிப்பது இயலாதது என்பதன்றி, விரும்பத்தக்கது மன்று. விருப்புவெறுப்புகள் இயற்கையாய் அமைந்தவை. குழந்தைகளிடையே இத்தகைய வேறுபட்ட பண்புகளைக் காணலாம். சில குழந்தைகள் பொறியியல் சாதனங்களில் அதிகமாக ஆர்வம் காட்டலாம்; சிலர் சித்திரக் கலையிலும், சிலர் மருத்துவத்திலும், மற்றும் சிலர் மொழிகளிலும், வரலாறுகளிலும் ஆர்வம் காட்டுவதை நாம் காணலாம்.

கட்டாயக் கணிதம்

நம்முடைய அன்றாடவாழ்க்கைக்கு வேண்டிய குறைந்தபட்சத் தேவைகளை முன்னிட்டே கணிதம் கட்டாயப் பாடமாகக் கல்வி

ஏற்பாட்டில் வகுக்கப்பட்டுள்ளது. சமுதாயத்தில் வாழ்வதற்குத் தேவையான அடிப்படை அறிவை மாணவர்களுக்கு அளிப்பதே இதன் நோக்கமாகும். சிறுவரும், சிறுமியரும் தங்களுடைய பிற்கால வாழ்க்கையில் ஏற்படும் எத்தனையோ சிக்கல்களுக்குத் தாங்களே தீர்வு காண, பள்ளியிலேயே அவர்களைப் பழக்க வேண்டும். இந்த நோக்குடனேயே பாடத்திட்டங்கள் வகுக்கப் பட்டுப் பயிற்சியும் அளிக்கப்படுகின்றது. கணிதத்தின் தொடக்கம் வரலாற்றுக் காலத்திற்கும் முற்பட்டதாகும். கல்வியினுடைய ஆரம்ப நிலையிலே இடம் பெற்ற பாடங்கள் கணிதமும், சமயக் கல்வியுமே. வரலாறு, அறிவியல் ஆகியவற்றின் வளர்ச்சி இவற்றிற்குப் பிற்பட்டதேயாகும். மனித நாகரிகத்தின் தொடக்க முதல் இன்றுவரை முக்கிய இடம் பெற்றிருக்கும் கணிதம், பள்ளி களில் கட்டாயமாக இடம்பெற வேண்டியது அவசியமல்லவா?

விருப்பக் கணிதம்

கீழ்க்கண்ட மூன்று வகையான மாணவர்களின் தேவைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு கணிதப் பாடம் பள்ளிகளில்போதிக்கப் படுகின்றது:

1. கல்லூரிகளுக்கும், தொழில் நுட்பப் பள்ளிகளுக்கும் செல்லும் மாணவர்,
2. கணிதம் சார்ந்த தொழில்துறை, வாணிகம் ஆகிய வற்றில் தனிப்பயிற்சி பெற விரும்புவோர்,
3. குடிமைப் பயிற்சிக்காகக் கணித அறிவு வேண்டுவோர்.

பொறியியல், புள்ளியியல் கணக்கர் துறை, விஞ்ஞானம் முதலான துறைகளுக்குச் செல்வோருக்குக் கணிதம் கண் போன்ற தென்று சொல்லத் தேவையில்லை. இந்த மாணவர்கள் கணிதத்தில் திறமையும் ஆர்வமும் மிக்கவராயிருப்பர். ஆதலால், கட்டாயக் கணிதத்தோடு, இரண்டு ஆண்டுகள் இவர்கள் சிறப்புக் கணிதமும் கற்க ஏற்பாடுகள் செய்யவேண்டும். மற்ற மாணவரைப் போல் இவர்களுக்கும் குறைந்தபட்ச அளவே கணிதம் (கட்டாயக் கணிதம்) கற்றுக்கொடுத்தால் இவர்களுடைய தேவைகளை நிறைவேற்ற முடியாது. ஆதலால், சிறப்புக் கணிதத்தில் இயற் கணிதம், வடிவியல் கனவடிவ கணிதம் (Theoritical Geometry), கோண கணிதம் முதலிய பற்பல பிரிவுகளும் சேர்க்கப்பட்டிருக் கின்றன. கணிதத்தில் தகுதியுள்ள மாணவர்கள் உயர்நிலைப் பள்ளியில் கட்டாயக் கணிதத்தோடு ஆழ்ந்து கணிதம் கற்கச் சிறப்புக் கணிதம் அல்லது விருப்பக் கணிதமும் தேவை. மேற் படிப்

புக்குச் செல்லும் மாணவர்களுக்குக் கணிதத்தின் தேவையைப் பற்றிக் கூறத் தேவையில்லை. இவர்கள்தாம் பிற்காலத்தில் ஆசிரியர்களாகவும், ஆராய்ச்சியாளராகவும் உருவாக வேண்டியவர்கள். இவர்களுக்குச் சிறப்புக் கணிதம் மிகவும் அவசியமாகும். ஆனால், விஞ்ஞானத் துறையிலோ பொறியியல் சம்பந்தப்பட்ட துறைகளிலோ ஆர்வம் காட்டாத மாணவர்களைக் கணிதம் கற்கும்படி வற்புறுத்தலைத் தவிர்க்க வேண்டும். இவர்கள் தேவைக்குத் தகுந்தபடி கணிதம் கற்றாலே போதுமானது.

கணிதத்தின் வரலாறு

கணிதம் தோன்றிய காலத்தை வரையறுத்துக் கூறுவது எளிதன்று; ஆனால், அது எவ்வாறு தோன்றி எங்கெல்லாம் வளர்ந்து, விழுந்து, எழுந்து, பரந்து இன்று வியத்தகும் அளவில் எங்கும், எப்போதும், எல்லோருக்கும் பயன்தரும் விதத்தில் வளர்ந்திருக்கின்றது என்று அறிவதற்குப் போதுமான ஆதாரங்கள் வரலாற்றின் மூலமாக நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

எண்கணிதத்தின் வரலாறு (உருப்படிகளை எண்ணிக்கையிடுதல்)

ஆதிகால மனிதன், ஒரு தொகுதியிலுள்ள பொருள்களை மற்றொரு தொகுதியிலுள்ள பொருள்களோடு ஒப்பிட்டு எண்கள் பற்றிய கருத்தை வளர்த்தான். உதாரணமாக, காலையில் பட்டியை விட்டு ஆடுகள், மாடுகள் வெளியே செல்கையில் ஒவ்வொரு விலங்குக்கும் அடையாளமாக ஒரு கல்லைச் சேர்த்துவைத்தான். மாலையில் அவை திரும்புகையில், ஒவ்வொரு விலங்கும் பட்டிக்குள் நுழையும்போது காலையில் சேர்த்த கற்களை ஒவ்வொன்றாக வெளியே எறிந்தான். இறுதியில் வந்த விலங்கு, பட்டிக்குள் செல்லும்போது கற்குவியலும் காலியாகியிருந்தால் விலங்குகள் எல்லாம் திரும்பிவிட்டன என்று அறிந்தான். இவ்வாறு, மந்தையிலுள்ள ஒவ்வொரு மாட்டிற்கும், ஆட்டிற்கும் ஒவ்வொரு கல்லைத் தொடர்புபடுத்தியது ஒரு வகை 'ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு' (one to one correspondence) என்று கூறலாமல்லவா? இதற்குப் பின் வந்த தலைமுறையில் மனிதன் எண்ணிக்கைகளை வேறுவிதமாகப் பதிவுசெய்யக் கற்றுக்கொண்டான். கயிற்றில் முடிச்சுகள் போட்டும், கூழாங்கற்களை ஒன்றுசேர்த்தும், கம்புகளில் அடையாளங்களை வெட்டிக் குறித்தும் பொருள்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டான். ஒரு கூழாங்கல் அல்லது கோலிலிட்ட ஒரு குறியை ஒரு பொருளாகக் கொண்டான். கற்களில் கீறலிட்டும், தடிகளின் மேல் V என்ற அடையாளம் செதுக்கியும் எண்ணிக்கை செய்தது 'எண்குறி' அல்லது இலக்க முறையின் தொடக்கம் எனலாம். எண் குறிகள் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் குறியீடுகளாகும்.

நுண்ணறிவினுலும், பட்டறிவினுலும் பல குறியீடுகளை மனிதன் நாளடைவில் கண்டுபிடித்தான். ஒன்று, இரண்டு, மூன்று, நான்கு, ஐந்து, ஆறு, எட்டு முதலிய எண்களைக் குறிக்கச் சிறு சுள்ளிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு சேர்த்துவைத்தனர்.



இவை பிற்காலத்தில் நாம் இப்போது பயன்படுத்தும் எண்களாக மாறியிருக்கலாம். இவ்வாறு எண்களை முழுமையாகக் குறிக்கத் தேவையான இலக்கங்களும் (1, 2, 3 முதலியன) சொற்களும் (ஒன்று, இரண்டு, மூன்று...... முதலியன) வளர்ச்சியுற்றன. எண் என்பது கருத்தாகும்; இலக்கம் அதன் குறியீடாகும். வெவ்வேறு நாட்டவரின் எண் முறைகளைச் சிறிது விவரமாகப் பார்க்கலாம்.

எகிப்தியர் (Egyptians)

எண்களைக் குறிக்கும் மிகப் பழைமையான முறைகளில் ஏடுகள் மூலம் நமக்குக் கிடைத்தவை எகிப்தியருடையதாகும். அவர்கள் பயன்படுத்திய உரு மாதிரி எண் குறிகள் கி.மு. 3,300-க்கும் முற்பட்டவை என ஆராய்ச்சிகள் காட்டுகின்றன. அதாவது, கிட்டத்தட்ட 5,000 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே எகிப்தியர் பத்துலட்சம் (ஒரு மில்லியன்) வரையிலான எண்களைக் குறிக்கக்கூடிய குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி வந்தனர். அவர்கள் உருவாக்கிய குறியீடுகள் சில, நாம் இப்போது பயன்படுத்தும் எண்களோடு கீழே ஒப்பிடப் பட்டுள்ளன.

நம்முடைய எண்	எகிப்தியரின் குறியீடு	குறியீட்டின் விளக்கம்
1		ஒரு கோடு (stroke)
10		குதிரை லாடம் (horse shoe)
100		தக்கைத் திருகு (cork screw)
1,000		தாமரை மலர் (lotus flower)
10,000		சுட்டிக் காட்டும் விரல்
100,000		ஒருவிதமான மீன் (burbot fish)
1,000,000		ஆச்சரியமுற்ற மனிதன் (astonished man)

இவ்வாறு எகிப்தியர் கையாண்ட குறியீடுகள் மரக்கட்டையிலோ அல்லது கல்லிலோ செதுக்கப்பட்டன. மனிதன் குகையில்

வாழ்ந்த காலத்தில் (Cavemen) பயன்படுத்திய முறையைக் காட்டிலும் இது மேம்பட்டதென்றே கூறவேண்டும். ஏனெனில்,

1. ஒரு கணத்தில் அல்லது கும்பலில் உள்ள பொருள்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் குறிக்கத் தனிக் குறியீடுகளை இவர்கள் பயன்படுத்தினர்.

2. குறியீடுகளைப் பல முறைகள் பயன்படுத்திப் பிற பெரிய எண்களைக் குறித்தனர்.

உதாரணமாக : ? ? ? = 300

? ? ∩∩∩ | = 231

3. இவர்களுடைய எண்கள் — 10ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டவை.

கிரேக்கர் (Greeks)

ஏறத்தாழ 5,000 ஆண்டுகளுக்கு முன் கிரேக்கர்கள் தங்கள் மொழியின் எழுத்துத் தொகுதியை எண்களுக்குப் பதில் பயன் படுத்தினர். கி.மு. 3ஆம் நூற்றாண்டில் பின்வருமாறு வரிசைப் படுத்தியதாகத் தெரிகிறது.

ஒன்றுகள்	A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	θ
(Units)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
பத்துகள்	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	q
(Tens)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
நூறுகள்	ρ	Σ	T	Y	φ	χ	ψ	Ω	π
(Hundreds)	100	200	300	400	500	600	700	800	900

எழுத்துகளிலிருந்து எண்களை வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்கு வெவ்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தியதாகத் தெரிகின்றது.

உதாரணமாக, ஒன்றைக் குறிப்பதற்கு $\bar{A}$ அல்லது $\nless$ என்று எழுதினர். இவர்கள் பூச்சியத்திற்குக் (Zero) குறியீடுகள் எதையும் பயன்படுத்தவில்லை. இதற்குப் பின், கி.பி. 5ஆம் நூற்றாண்டில் சிறிய எழுத்துகள் (small letters) கண்டுபிடிக்கப்பட்ட பின், பெரிய எழுத்துகளுக்குப் (capital letters) பதில் சிறிய எழுத்துகளை இதே முறையில் பயன்படுத்தினர். எண்களை $\bar{\alpha}$, $\overline{E}$, θ என்றும் α', β', γ', δ' என்றும் குறித்தனர்.

ஆயிரங்களைக் குறிப்பதற்கு, கீழ்க்கண்டவாறு எழுத்துக ளோடு கோடு ஒன்றைச் சேர்த்துக்கொண்டனர். 1,000, 2,000, 3,000 முதலியவற்றை 1A, 1B, 1Γ போன்ற எழுத்துகளால் குறித்தனர்.

பத்தாயிரங்களை M என்ற எழுத்தின் மூலம் பின்வருமாறு குறித்தனர்.

$$\overset{y}{M} = 10,000 \text{ (myriad)}$$

$$\overset{B}{M} = 20,000$$

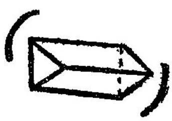
$$\overset{\Gamma}{M} = 30,000$$

இதற்குப் பின் வாழ்ந்த கிரேக்கர்கள் பத்தாயிரத்தைக் குறிப்பதற்கு $\overset{\frown}{\cdot\cdot}$ போன்ற ஒரு குறியீட்டைப் பயன்படுத்தினர்.

உதாரணமாக, 1,40,000-த்தைக் குறிப்பதற்கு $\overset{\frown}{\ddot{1}}$ $\overset{\frown}{\ddot{\Delta}}$ என்ற குறியீட்டையும், 50,000-க் குறிப்பதற்கு $\overset{\epsilon}{\cap}$ என்ற குறியீட்டையும் பயன்படுத்தினர்.

பாபிலோனியர்கள் (Bobylonians)

ஏறத்தாழ 4,000 ஆண்டுகளுக்குமுன் (கி. மு. 2000), இன்றைய ஆசியாவின் மத்திய கிழக்குப் பகுதியில் பாபிலோனியர் வாழ்ந்தனர். அவர்கள் சிறிய ஒரு மரத் துண்டினைக்கொண்டு களி மண்ணின்மேல் எழுதினர். அம் மரத் துண்டுகளின் முனைகள் ஆப்பு வடிவத்தில் (wedge-shaped) அமைந்திருந்தன. ஒன்று என்ற எண்ணைக் குறிக்க இம் மரத்துண்டால் 'V' என்னும் அடையாளம் களி மண்ணின்மேல் பதிக்கப்பட்டது. மரத்துண்டைப் பக்கவாட்டில்



திருப்புவதன் மூலம் < என்ற குறியீட்டைப் பதித்து, 10 என்ற எண்ணைக் குறித்தனர். இவ்வாறு குறியீடுகளை இணைத்து 59 வரையிலான எண்களைக் குறித்தனர்; அதற்கு மேற்பட்ட எண் களைக் குறிக்க இதே குறியீடுகளைத் திரும்பவும் பயன்படுத்தினர். அதாவது, இடமதிப்பின் கருத்தை இவர்கள் அறிந்திருந்தனர். ஆனால், நாம் 10ஐ அடிப்படையாகப் பயன்படுத்துவதுபோல்

(decimal system) அவர்கள் 60ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு எண்களைக் குறித்தனர். ஆகவே, அவர்களுடைய எண்ணில் இரண்டாவது இடத்தின் மதிப்பு 60.

உதாரணமாக :

 $= 782 = (13 \times 60) + (2 \times 1)$

அக் காலத்தில், இவர்களும் பூச்சியத்திற்குக் (zero) குறியீடுகள் எதையும் பயன்படுத்தவில்லை.

ரோமானியர் (Romans)

இவர்களுடைய எண் குறியீடுகள் விரல்களின் உருவங்களிலிருந்து 1, 11, 111, 1111 எனத் தோன்றியிருக்கலாம் என்று வரலாற்று நிபுணர்கள் கருதுகின்றனர். ஐந்தைக் குறிப்பதற்கு ஒரு கையிலுள்ள ஐந்து விரல்களையும்  பயன்படுத்தினர். நாளடைவில், இவற்றில் சில கோடுகளை நீக்கி V என்ற குறியை ஐந்தைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தினர். ஐந்தின் குறிகள் இரண்டைச் சேர்த்து 10ஐக் குறிக்கும் குறியீடான X ஆக அமைத்தனர். L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000 என்ற குறி எண்களையும் ஏற்படுத்தினர். தொடக்கத்திலே பெரிய எண்களைக் குறிப்பதற்குக் குறியீடுகளைப் பலமுறை பயன்படுத்தினர். கூட்டல் விதிக்கு உதாரணமாக, DL × 11 = 500 + 50 + 10 + 2. பின்பு, கழித்தல் விதியைப் (Subtractive principle) பயன்படுத்தி எண்களைச் சுருக்கினர்.

ரோமானிய எண்கள் :

I II III IV V VI VII VIII IX X L C D M

உதாரணமாக : IX = 10 − 1 = 9

XC = 100 − 10 = 90

ஆனால், இதில் சில நெறி முறைகளைக் கையாண்டனர். அவையாவன:

1. ஐந்தை முதல் இலக்கமாகக் கொண்ட (5,50,500) V, L, D ஆகியவற்றைக் கழிக்கக் கூடாது.

2. குறிப்பிட்ட ஒரு வரிசைப்படியே கழிக்கவேண்டும்.

உதாரணமாக Iஐ V, X ஆகியவற்றிலிருந்தும்
Xஐ L, C ஆகியவற்றிலிருந்தும்
Cஐ D, M ஆகியவற்றிலிருந்தும் கழிக்கலாம்.

தசம முறை (Decimal system)

பதின்மான முறையில், எண்கள் பத்தின் தொகுப்பாகக் குறிக்கப் படுகின்றன. இவற்றின் அடிப்படை எண் (base) 10 என்கிறோம். பத்து விரல்கள் கைகளில் இருப்பது இம்முறையின் அடிப்படையாக இருக்கலாம். எண்ணிக் கணக்கிடுவதற்குச் சிறுவர்கள் விரல்களைப் பயன்படுத்தும் பழக்கம் இப்போதும் இருக்கின்றதல்லவா? பூச்சியத்திற்கென்று குறியீடொன்றைக் கொண்டிருப்பது இம் முறையிலுள்ள தனிச் சிறப்பு எனலாம். எனினும், வரலாற்றில் பூச்சியத்திற்கான குறியீடு எங்கு, எப்போது தோன்றியது என்பது அறியப்படவில்லை. ஆனால், இந்துக்கள் கி. பி. 600 அல்லது அதற்கு முற்பட்ட காலத்திலேயே பூச்சியத்திற்கான குறியீட்டைப் பயன்படுத்தியதாகத் தெரிகின்றது.

பூச்சியத்திற்கான குறியீடும், இடமதிப்புக் கருத்தும். பதின்மான முறையின் சிறப்புக்கு முக்கியக் காரணங்களாகும், இப்போது நாம் பயன்படுத்தும் எண்குறி முறையின் தோற்றத்தைப்பற்றிப் பலவிதமான கருத்துகள் நிலவுகின்றன. இந்தியாவிலேயே இது முதன்முதலாகத் தோன்றியிருக்கக் கூடுமென்றும், அதன்பின் கி. பி. 8ஆம் நூற்றாண்டில் அராபிய நாடுகளுக்கும், அங்கிருந்து ஐரோப்பிய நாடுகளுக்கும் இது பரவியிருக்கக் கூடுமென்றும் பொதுவாக நம்பப்படுகின்றது. இதன் காரணமாகவே இந்த எண்குறி முறை இந்து-அராபிய எண்குறி முறை அல்லது நவீன எண்குறி முறை என்று வழங்கப்படுகின்றது. இந்த முறை உலகத்தின் சிறந்த கண்டுபிடிப்புகளில் ஒன்று என்கிறார், ஃபிரான்சு நாட்டைச் சேர்ந்த புகழ்பெற்ற கணிதமேதை லாப்லேஸ் (Laplace—1749-1829). வரலாற்றுப்படி நோக்குவோமானால் மனிதன் முதலில் மனத்தால் கணித்து நினைவில் வைத்துக் கொண்டதாகவும், நாள்கள் செல்லச் செல்ல, குறியீடுகளைக் கண்டுபிடித்த பின்னர் எழுதிக் கணிக்கத் தொடங்கியதாகவும், அதன்பின் படிப்படியாக எண்கணிதமும், அதன் பொதுப் பண்பைக் காட்டும் இயற்கணிதமும் தோன்றியதாகவும் தெரிகின்றது. இவ்வாறு தொடர்ந்து முன்னேற்றம் அடைந்துவந்த இயற்கணிதம், மூன்று பரிமாண அளவுகளுடனும் நெருங்கிய தொடர்புகொண்டிருந்தது. இத் தொடர்புகளின் காரணமாகத் தோன்றியவையே வடிவகணிதமும், கோணகணிதமுமாகும்.

அடிப்படைக் கணிதமும், வடிவ கணிதத்தின் வளர்ச்சியும்

வரலாற்றுக்கு முற்பட்ட மனிதர்களைக் காட்டிலும் எகிப்தியர்களும், பாபிலோனியர்களும் எண்கணிதத்திலும், வடிவியலிலும் மேம்பட்டு விளங்கினர். கிரேக்கர்களும் கணிதத்தில் வளர்ச்சி அடைந்திருந்தனர். குறிப்பாக, வடிவ கணிதத்தில் கிரேக்கர்கள் சிறந்து விளங்கினார்கள். கணிதம் நாகரிகத்தின் முற்போக்குச் சின்னமாக விளங்கியது. ஐரோப்பியர்கள் அறிவுச் செயலற்று இருந்த காலத்திலும், ரோமானியப் பேரரசு வீழ்ச்சி அடைந்து அறிவு வளம் குன்றிப் பிற்போக்கு நிலையை அடைந்திருந்த காலத்திலும், இந்தியர்கள் வானநூலைப்பற்றி ஆராய்ச்சி செய்வதற்காக எண்கணிதத்தைக் கற்றுக்கொண்டிருந்தனர். இந்துக்களிடமிருந்து எண் கணிதத்தையும், கிரேக்கர்களிடமிருந்து வடிவ கணிதத்தையும் அராபியர்கள் கற்றுக்கொண்டனர். அவர்கள் ஸ்பெயின் நாட்டை வென்றபொழுது இக் கணித அறிவை ஐரோப்பியர்களின் மத்தியில் பரப்பினார்கள். 12ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் ரோமானியப் பேரரசின் எஞ்சிய நாகரிகமும், ஸ்பெயின் நாட்டில் இருந்த அராபியரின் நாகரிகமும் கொண்ட தொடர்பு, கணிதம் கற்பதனைப் புத்துயிர் பெறச் செய்தது. பழங்காலத்தில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு 17ஆம் நூற்றாண்டுவரை கற்கப்பட்டு வந்த கணிதமே, தற்போதைய கணிதத்தின் அடிப்படையாகக் கருதப்படுகிறது. இவ் வறிவு வளம் மிகவும் மெதுவாகவும் படிப்படியாகவும் வளர்ச்சி அடைந்துவந்தது. சில காலங்களில் கணித மேதைகள் இடையிடையே தோன்றிப் பல புதிய கருத்துகளை வெளியிட்டனர். நாம் தற்சமயம் கற்கும் அடிப்படைக் கணிதம் சுமார் 5,000 ஆண்டுகளாக வளர்ச்சி அடைந்து வந்ததாகும். தற்கால நாகரிகத்தின் அடிப்படையாக உள்ள விஞ்ஞான சாதனைக்காக, பல பிரிவுகளைக் கொண்ட உயர்கணிதம் பயன்பட்டிருக்கிறது. இது சுமார் 400 ஆண்டுகளில் வளர்ச்சியடைந்த கணித அறிவாகும்.

பழங்காலத்தில் கணிதம்

பாபிலோனியர்கள் கணிதத்திற்கு வழங்கிய பங்கு: பாபிலோனியர்களின் கணித வளர்ச்சியை அவர்களுடைய வியாபாரப் பத்திரங்களின் மூலமாகத்தான் அறிகிறோம். அவர்களுடைய பதிவுச் சான்றுகள் களிமண்ணால் செய்யப்பட்ட தகட்டில் பொறிக்கப்பட்டிருந்தன. அப்பதிவுச் சான்றுகள் பல ஆண்டுகள் பாழாகாமல் இருப்பதற்காக அவற்றைச் சூளையிலிட்டனர். அவர்களுடைய கணிதம் பெரும்பாலும் வணிகத் துறையையும், சோதிடத் துறையையும் சார்ந்ததாக இருந்தது, கி. மு. 606 முதல் 539 வரை பாபிலோனை ஆட்சி செய்து வந்த சால்டினியர்

(Chaldeans) விஞ்ஞானத்திலும், வானியலிலும் சிறந்தவர்களாகத் திகழ்ந்தனர். அவர்கள் இராசி மண்டலத்தை 12 பாகங்களாகப் பிரிக்கவும், வான மத்திய ரேகையை (Celestial equator) 360° ஆகப் பிரிக்கவும் கிரேக்கர்களுக்குக் கற்றுக்கொடுத்தனர்.

எகிப்தியரின் பங்கு

எகிப்தியரின் கணித அறிவைப்பற்றிப் பாபிரஸ் (Papyrus) கையெழுத்துப் பிரதிகள் மூலமாகவும் கல்வெட்டுகள் மூல மாகவும், மற்றும் பல பழம் பொருட் சின்னங்களின் மூலமாகவும் பல சான்றுகள் நமக்குக் கிடைத்திருக்கின்றன. (பாபிரஸ் என்பது ஒரு வகை நீர்ப் பூண்டாகும். இதிலிருந்து உரித்து எடுக்கப்பட்ட மெல்லிய பழுப்பு நிறமான பட்டையைக் காகிதமாகப் பயன் படுத்தினர். நாணற் புல்லால் செய்யப்பட்ட எழுதுகோலால் இப் பழுப்பு நிறக் காகிதத்தில் எழுதினுர்கள்.)

கி. மு. 1650-ல் ஏமஸ் (Ahmes) என்பவர் ஒரு பழைய பாபிரஸ் கையெழுத்துப் பிரதியிலிருந்து பார்த்து எழுதினுர். இதனுலேயே இது 'ஏமஸ் பாபிரஸ்' என வழங்கப்படுகின்றது. (இதில் எண் கணிதம், வடிவியல் சம்பந்தமான பல கணக்குகளும், அவற்றிற் கான விடைகளும் காணப்படுகின்றன. ஆனுல், கணக்குகளைத் தீர்க்கும் வழிமுறைகள் கொடுக்கப்படவில்லை.) இந்தப் பிரதியை 19ஆம் நூற்றுண்டின் இடைக்காலத்தில் ஹென்றி ரைன்டு (Henry Rhind) என்ற எகிப்திய பழமை நூல் ஆய்வாளர் (Egyptologist) இலண்டன் பொருட்காட்சியில் கொண்டுபோய் வைத்து விட்டார். இதனுல் இது 'ரைன்டு பாபிரஸ்' என்றும் வழங்கப்படு கின்றது.

எகிப்து மக்கள் தங்கள் அன்ருட வாழ்க்கைக்குத் தேவையான அடிப்படை எண் கணிதத்தையும் வடிவ கணிதத்தையும் ஏற்படுத்திக் கொண்டனர். இவர்கள் முழு எண்களையும் பின்னங் களையும் கூட்டவும் கழிக்கவும் அறிந்திருந்தனர். இவர்கள் ஒழுங்கற்ற (clumsy) முறைகளைப் பெருக்கலிலும், வகுத்தலிலும் கையாண்டார்கள். இம் முறைகளைப் பயன்படுத்தி மிக மெது வாகவே கணிக்க முடிந்ததுமல்லாமல் அதிக உழைப்பும் தேவை யாக இருந்தது. எனினும், அவர்களின் வணிக சம்பந்தமான சிக்கல்களைத் தீர்க்க இவை போதுமானதாக இருந்தன. ஒவ்வோர் ஆண்டும் நைல் நதியின் வெள்ளப் பெருக்கெடுப்பிற்குப்பின் நைல் நதியின் பள்ளத்தாக்குகளின் நிலப்பரப்பை அளந்து வரிவிதித் தனர். இவ்விடம்தான் வடிவ கணிதத்தின் பிறப்பிடமாக அமைந்தது. அவர்கள் கண்டு பிடித்த பரப்பளவு, கன அளவு காணும் சூத்திரங்கள் தவருனவைகளாயிருந்தன.

உதாரணம் : 'ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அதன் அடிப் பக்கத்தையும், ஒரு பக்கத்தையும் பெருக்கி வந்த தொகையில் பாதி'—இவ் விரு பக்கங்களால் அடைபடும் கோணத்தைப்பற்றி எதுவும் குறிப்பிடவில்லை. இவர்கள் பட்டைக்கூம்பு (pyramids) கட்டுவதற்குத் தேவையான கோணங்களின் அடிப்படைக் கருத்துகளை அறிந்திருக்கவேண்டும். கோணங்களைப்பற்றிய கருத்துகளின் வளர்ச்சியில் இவர்களது பங்கு சிறிதளவே இருந்ததால், கோண கணிதம் இங்குத் தொடங்கியதாகக் கூற முடியாது. இக் காலத்தில் கணித வளர்ச்சி சிறிது தேக்கமடைந் திருந்தது.

கிரேக்கர்களின் பங்கு

கிரேக்க நாட்டில் உள்ள ஆசியா மைனரில் வாழ்ந்தவர்களும்' ஏஜியன் கடலில் உள்ள தீவுகளில் வசித்த கிரேக்கர்களும் கணிதத் திலும், பகுத்தறிவுச் சிந்தனையிலும் அக்கறை காட்டினர். தாலஸ் (Thales), பிதாகரஸ் என்ற இருவரும் இவர்களுள் மிக முக்கிய மானவர்கள். இவர்கள் எல்லாப் பொருள்களையும் ஆய்ந்து அறிய ஆவல் உடையவர்களாய் இருந்தார்கள்; நீண்ட பயணங்களை மேற்கொண்டார்கள். இவ் வல்லுநர்களால் புவியியல் தத்துவம், அறிவியலாக மாறியது.

தாலஸ் (Thales) கி. மு. 640 - கி. மு. 560

தாலஸ் ஒரு வணிகர். இவர் வணிகத்தின்மூலம் பெரும் பணம் திரட்டிய பிறகு, கணிதத்திலும், வானியலிலும், தத்துவ சிந்தனையிலும் தம்மை ஈடுபடுத்திக்கொண்டார். இவரை ஓர் அறிவியலார் என்று குறிப்பிடும்வகையில் அவருடைய பண்பு அமைந்திருந்தது.

அவர் பேரண்டத்திற்கு (Universe) விளக்கம் கூறும்பொழுது, உலகம் தட்டையாக உள்ளது என்றும், அது நீரில் மிதக்கிறது என்றும் கருத்தினைத் தெரிவித்தார். எவ்வாறு பட்டைக் கூம்பு களின் (pyramid) உயரத்தை, நிழலினைக் கணக்கிடுவதன்மூலம் அளக்கலாம் என்று இவர் காண்பித்தார்.

கீழ்க்கண்ட மெய்க்கூற்றுகள் (propositions) அவருடைய உடைமையாகக் கருதப்படுகின்றன. அவை கோணங்களையும் நேர்க்கோட்டையும் பற்றியவையாகும்.

1. சமபக்க முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கு இருபுறங் களிலும் உள்ள கோணங்கள் சமம்.

2. இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும்போது ஏற்படும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம். (யூக்ளிட் தாம் முதலில் இதனை நிருபித்தார்.)

3. ஒரு முக்கோணத்தை, அதன் அடிப்பக்கத்தையும் அதன் அடிப்பக்கத்தில் உள்ள கோணங்களையும் கொண்டு அமைக்கலாம்.

4. வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பக்கங்கள், விகித சமமாக இருக்கும்.

5. வட்டத்தை எந்த விட்டமும் இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும்.

6. அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் செங்கோணம்.

அவருடைய வேலைத் திறனின் மதிப்பைத் தேற்றங்களின் எண்ணிக்கையால் அளவிட முடியாது. அவர் தருக்க ரீதியாக எல்லாவற்றையும் கண்டுபிடித்தார். அவர் ஒரு வானநூலை எழுதினர். அவருடைய சமகாலத்தவர்களிடையே அவர் எழுதிய வடிவ கணிதத்தைக் காட்டிலும் வானநூலே சிறப்பாகக் கருதப்பட்டது. அவருடைய வானநூல் ஆராய்ச்சியைப்பற்றி ஒரு கதை உள்ளது. ஒரு நாள் இரவு, அவர் வெளியில் நடந்து சென்று கொண்டிருந்த பொழுது, வானில் உள்ள நட்சத்திரங்களைப் பார்த்துக்கொண்டே சென்றார்; அதனுல் அவர் ஒரு பள்ளத்தில் விழுந்தார். இதைக் கண்ட ஒரு வயதான மூதாட்டி 'உன் காலடியில் என்ன இருக்கிறது என்று அறியாத நீ எவ்வாறு வானில் என்ன நடக்கிறது என்று கூறுவாய்?' எனக் கேட்டார். அவர் ஓர் ஆண்டு 365 நாள்களைக் கொண்டது என்று கருதியதாகக் கூறப்படுகிறது.

பிதாகரஸ் (கி.மு. 572 - கி.மு. 501)

தாலஸின் மாணவர்களில் மிகவும் குறிப்பிடத் தக்கவர் பிதாகரஸ். அவர் தாலஸிடம் படிக்கும்பொழுது எகிப்திற்கும் மற்ற நாடுகளுக்கும் சுற்றுப்பயணம் செய்தார். இந்தியாவிற்கு வந்திருந்ததாகவும் கூறப்படுகிறது. அவர் இத்தாலி நகரிலுள்ள கிரோடோனு (Crotona) என்ற கிரேக்க நகரத்தில் குடியேறினர். அவர் அங்குத் தம்முடைய பெயரில் ஒரு பள்ளியை நிறுவினர். முதன்முதலில் வடிவ கணிதத்திற்கு விதிவிளக்க முறையை அவர் அமைத்தார்.

பிதாகரியன் பள்ளிக்கூடம்

பிதாகரஸின் சீடர்கள் வானியலில் மிகவும் முற்போக்குக் கருத்து உடையவர்களாக இருந்தனர்; அதாவது, பூமி உருண்டை

வடிவம் உடையது என்று கருதும் அளவிற்கு முன்னேறியிருந்தார்கள். பிதாகரஸ் செங்கோண முக்கோணங்களின் பண்புகளே நிரூபித்தார். ஒரு சமதளத்தைச் சிறிதும் இடைவெளி இல்லாமல் மூட வேண்டுமானுல் சதுரங்கள், சமபக்க முக்கோணங்கள், ஒழுங்கு அறுகோணங்கள் இவைகளால் ஆன ஓடுகளால் மூடலாம் என்ற கருத்தை இவர் தெரிவித்தார். அவர் எண்களைப்பற்றிய பண்புகளை அறிய அதிக நாட்டம் உள்ளவராக இருந்தார். அவர் பரப்பளவுகள், கன அளவுகள், விகித சமம், ஐந்து ஒழுங்கான பன்முகத் திண்மங்கள் இவைகளைப்பற்றிய அறிவில் அதிகக் கவனம் செலுத்திஞர். ஒரு முக்கோணத்தில் உள்ள உட்கோணங்களின் கூடுதல் இரு செங்கோணங்களுக்குச் சமம் என்று நிரூபித்தார். அவர் பெயரால் வழங்கப்படும் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைக் கண்டு பிடித்த பொழுது ஓர் எருமையைப் பலியிட்டார் என்று கூறப் படுகிறது. மக்களின் கல்விக்கு அவசியமான பரந்த நோக்க முடைய அறிவியலாகக் கணிதத்தில் வடிவியலைப் புகுத்தியது இவர் கணிதத்திற்குச் செய்த மாபெரும் தொண்டாகும். சில அரசியல் காரணத்திற்காக அப் பள்ளியில் இருந்தவர்கள் பிரிந்துபோஞர் கள்; பிதாகரஸ் நாடு கடத்தப்பட்டு இறந்தார். அவருடைய சீடர்கள் அவருடைய போதனைகளை எளிமையான கோட்பாடு களாக மாற்றி அழியாது பாதுகாத்தனர்.

ஏதேனியர்கள் (Athenians)

கி.மு. ஐந்தாம் நூற்ருண்டில் ஏதன்ஸ் நகரம் கிரேக்க நாட்டின் முக்கிய நகரமாக ஆனபோது கணித மேதையர் பலரும் இந் நகரத்திற்குக் குடிபெயர்ந்து சென்றனர்.

டெமாக்ரடிஸ் (Democritus)

சாக்ரடீஸின் (Socrates) சமகாலத்தவரான டெமாக்ரடிஸ் என்ற கணிதவியலார், ஒரு கூம்பிற்கும் அதை உள்ளடக்கும் (circumscribed) உருளைக்குமுள்ள தொடர்பையும், கூர்ப்பட்டைக் கூம்பிற்கும் (pyrmid) அதை உள்ளடக்கும் பட்டை வடிவத்திற்கும் (prism) உள்ள தொடர்பையும் எடுத்துக்காட்டிஞர்.

ஹிப்போகிரடிஸ் (Hippocrates)

இவர்தாம் முதன்முதலில் அடிப்படை வடிவியல் நூலை எழுதிஞர். இந்த நூலின் அடிப்படையில்தான் யூக்ளிடின் மூல தத்துவங்கள் (Euclid's elements) தொகுத்துச் சேர்க்கப்பட்டிருக்க லாம் என்று கருதப்படுகின்றது. எடுத்துக்கொண்ட ஒரு தேற்றத்தி லிருந்து மற்ருென்றை வகுத்தமைக்கும் (reducing) முறையை இவர் வடிவியலில் அறிமுகப்படுத்திஞர். பின்னதை நிரூபித்தால்

முன்னதும் உண்மையாகும் என்பது இவரது வாதம். 'அபத்த முடிவு முறை' (reductio ad absurdum) இதற்கு ஒரு நல்ல எடுத்துக்காட்டு.

பிளேட்டோ (Plato)

இவரை முக்கியமாகத் தத்துவமேதை என்றே எல்லோரும் அறிவர். ஆயினும், இவருடைய சமகாலத்தவர்களான பல கணித மேதைகளைப் போல் இவரும் கணிதத்திற்குப் பெரும் தொண்டாற்றினர். வாத முறைப்படி அறிவாற்றலைப் பழக்குவதற்குக் கணித முறைகள் பெரும் விதத்தில் பயன்பட்டன என்பதை அறிந்த இவர் கற்பித்துக் கொண்டிருந்த கல்விச்சாலை (academy) நுழைவாயிலில் 'வடிவியலை அறியாதவர் இங்கு வரவேண்டாம்' (Let no one ignorant of Geometry enter here) என்று பொறித்து வைத்திருந்ததாகத் தெரிகின்றது. இவர் பிதாகரஸின் சீடர்களிடம் கல்வி பயின்றவர். மனத்தைப் பக்குவப்படுத்துவதற்குக் கணிதக் கல்வி இன்றியமையாதது என்று இவர் நம்பினர். கருத்தியலான எண்களைப்பற்றிக் கற்கவும், காரணப்படுத்தவும் மனத்தைப் பக்குவப்படுத்தும் தத்துவ முறைப் பயன்கள் கணிதத்தில்தான் இருப்பதாக இவர் நம்பினர். தேவையான அல்லது வரையறுக்க வேண்டிய முடிவிலிருந்து தெரிந்த முடிவுகளுக்குச் செல்லும் பகுப்பு முறையை (analytic method) இவர் கண்டுபிடித்ததாகத் தெரிகின்றது.

அலெக்ஸாண்டிரியா (Alexandria)

அலெக்சாண்டர் கி.மு. 305–ல் எகிப்தையும், கிரேக்க நாட்டையும் வென்று கைப்பற்றி அலெக்சாண்டிரியா என்ற ஒரு தலைநகரம் அமைத்தார். இந் நகரம் ஆசியா, ஆஃப்ரிக்கா, ஐரோப்பா முதலிய பெரிய கண்டங்களின் மையத்தில் அமைந்திருந்ததால், அக் காலத்தில் ஒரு சிறந்த நகரமாக விளங்கியது. இப் பெரிய நகரத்தில் பல்வேறு நாட்டவர்களான எகிப்தியர், கிரேக்கர், யூதர், பாரசீக நாட்டவர், எத்தியோப்பியர், ரோமானியர், அரேபியர் முதலியவர்கள் வந்து வாணிகம் செய்தனர்.

அலெக்சாண்டருக்குப்பின் கி.மு. 306-ல் எகிப்துநாடு டாலமி (Ptolemy I) யின் கைக்கு மாறியது. இவர் அலெக்சாண்டிரியா நகரில் கிரேக்கக் கலைக்கூடம் ஒன்றை நிறுவினர். இங்கு ஒரு பெரிய நூலகத்தையும் அமைத்து, பற்பல நூல்களின் கைப்பிரதிகளைப் பாதுகாக்கவும், பொதுமக்கள் சென்று படிக்கவும் ஏற்பாடுகள் செய்தார். மற்ற நாடுகளிலிருந்து கல்வி மேதைகளை

வரவழைத்து அவர்களுக்குப் பண உதவி செய்து பராமரித்தார். பின், பல்கலைக்கழகத்தையும் ஏற்படுத்தினார். அதில் கணிதத்திற்கென்று ஒரு தனித் துறையையும் அமைத்து அதை யூக்ளிட் (Euclid) என்ற கணித மேதையின் பொறுப்பில் விட்டார். இங்கு இருக்கும் போதுதான் யூக்ளிட் தமது 'மூலக் கோட்பாடுகள்' (Elements) என்ற வடிவியல் அடிப்படைக் கருத்துகளைத் தொகுத்தார். வடிவியல் கணித முறைகளைப் பத்து வெளிப்படை உண்மைகளை (axioms) அடிப்படையாகக் கொண்டு விளக்கினார்.

எராற்றஸ்தனிஸ் (Eratosthenes) கி.மு. 274—கி.மு. 194.

அலெக்சாண்டிரியாவின் நூலக அதிபராயிருந்த (Librarian) எராற்றஸ்தனிஸ் என்பவர் பகா எண்களைப்பற்றி ஆராய்ந்தார். பூமியின் சுற்றளவைத் தோராயமாகக் கணித்தார். பூமியிலிருந்து சந்திரனுக்கும் சூரியனுக்குமுள்ள தூரங்களைக் கணித்தார். ஆண்டுக் குறிப்பேட்டில் லீப் (leap) வருடத்தையும் இவர்தாம் கண்டுபிடித்தார். ஆண்டுக்கு 365 நாள்களும், நான்கு ஆண்டுகளில் ஒன்றுக்கு 366 நாள்கள் இருக்க வேண்டும் என்றும் கண்டுபிடித்தார்.

ஆர்கிமிடிஸ் (Archimedes)

இந்தக் கிரேக்கக் கணித மேதை, நடைமுறைக் கணிதத்திலும், தருக்கமுறைக் கணிதத்திலும் மிகுந்த ஆர்வமுள்ளவராயிருந்தார். இவர்தாம் நிலையியக்கவியலுக்குக் (mechanics) கணிதத்தைப் பயன்படுத்த முடியும் என்று காட்டியவர். இவர், தாம் கண்டுபிடித்த போர்க் கருவியின் உதவியால் சிசிலி (Sicily) நாட்டிலுள்ள சிராகூஸ் (Syracuse) என்ற தம் சொந்த ஊரை எதிரிகளான ரோமர்களின் படையெடுப்பிலிருந்து மூன்று ஆண்டுகள் எதிர்த்துப் போராடியதாகக் கூறுவர். எதிரியின் கப்பல்களிலுள்ள பாய் மரங்களில் ஒரு கண்ணாடியின் உதவியால் சூரிய ஒளிக்கதிர்களைப் பாயச் செய்து அவற்றை எரியச் செய்தார். பெரிய பளுக்களைத் தூக்குவதற்கு நெம்புகோலின் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தினார். ஏறத்தாழ 1,700 ஆண்டுகளுக்கு இவருடைய நெம்புகோல் தத்துவங்கள் நிலையியலின் (statics) அடிப்படையாக இருந்துவந்தன. திரவத்தின் அழுத்தும் சக்தியைப்பற்றிய நீர் நிலையியல் (hydrostitics) தத்துவங்களையும் இவரே கண்டுபிடித்ததாகக் கூறுவர். கோளங்களின் இயக்க நிலைகளைக் காட்டும் கருவியை (Plantorium) இவர் தம் சிறுவயதிலேயே கண்டுபிடித்து நிறுவினார். ஒரு கோளத்தின் கன அளவு அதன் வெளிப்புறமாக வரையப்பட்ட உருளையின் கன அளவில் $\frac{2}{3}$ பாகம் என்ற உண்மையை இவர் கண்டுபிடித்தார். இதைத் தாம் கண்டுபிடித்ததைத் தம் கல்லறையில்

பொறிக்கச் சொன்னதாக வரலாறு கூறும். இவர் வழக்கமாக வடிவியலின் படங்களை மணலில் வரைந்துபார்த்து அவற்றை ஆராய்வாராம். இப்படிப்பட்ட ஒரு சமயத்தில் ரோமநாட்டுப் படைவீரன் ஒருவன் இவரைக் குத்திக் கொன்றுவிட்டதாகவும் வரலாறு கூறுகிறது.

அப்போலோனியஸ் (Appollonius) கி.மு. 260—கி.மு.200

இவர் கி.மு. மூன்றும் நூற்றுண்டில் வாழ்ந்த ஒரு கிரேக்கக் கணித மேதை. கூம்பின் வெட்டுவாய் வடிவங்களைப் (conic sections) பற்றி இவர் காலத்திற்கு முன் அறியப்பட்ட உண்மைகளையும், அவற்றைப்பற்றி இவரே கண்டுபிடித்த பல உண்மைகளையும் கோவையாகத் தொகுத்து எழுதினுர்.

யூக்ளிட்டின் காலத்தில் ஆரம்பமாகி அப்போலோனியஸின் காலத்தோடு முடிவுற்ற கி.மு. மூன்றும் நூற்றுண்டு, கிரேக்கக் கணித வரலாற்றில் மிக முக்கியமான காலமாகும்.

கணிதம் கற்பதில் புதிய திருப்பங்களையும் அவற்றைத் தொடர்ந்து புது ஆர்வத்தையும் ஏற்படுத்தியவர்கள் கி.மு. இரண்டாம் நூற்றுண்டின் பிற்பகுதியில் வாழ்ந்துவந்த ஹிப்பார்கஸ் (Hipparchus), ஹீரோ (Hero) என்ற இரு கணித மேதைகளாவர்.

ஹிப்பார்கஸ் (Hipparchus)

இவர் ஒரு சிறந்த வானியல் நிபுணர் (Astronomer). வான் மத்தியரேகைக்கும் (astronomical equator) கதிர்வீதிக்கும் (ecliptic) இடையேயுள்ள கோணம் $23° 51'$ என்று இவர் கணித்தார். கோளங்களின் இயக்கங்களைப்பற்றி இவர் கண்டறிந்த பற்பல கருத்துகளும் வானிலைக் காட்சிப் பதிவுகளும் இவருக்குப் பின் வந்த வானூலார்களுக்குப் பெரிதும் பயன்பட்டன.

மேலும், இவ் வாராய்ச்சிகளுக்குப் பெரிதும் பயன்படும் கோண கணிதத்தையும் (Trigonometry) கண்டுபிடித்த பெருமை ஹிப்பார்க்கஸையே சேரும். பூமியையும், விண் மண்டலத்தையும் ஆராய்வதற்கு இவர் கண்டுபிடித்த கணக்கியல் முறைகள், இன்னும் பற்பல நடைமுறைச் சிக்கல்களை விடுவிக்கப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. நில அளவாய்வாளர்களும், கடல்வழிப் பயணம் செய்வோரும், நாடுகளின் படங்களை வரைவோரும் இவர் கண்டுபிடித்த முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறுர்கள்.

ஹீரோ (Hero)

பொறியியலையும், நில அளவியலையும் (Surveying) அறிவியல் அடிப்படையில் இவர் நோக்கினுர். முக்கோணத்தின் பரப்பள

விற்கு $\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ என்ற சூத்திரத்தைக் கண்டு பிடித்தார்.

நிக்கோமாக்கஸ் (Nicomachus-கி.பி. 100) என்ற கணிதவியலார் எண் கொள்கையிலும் (Theory of numbers), கிளாடியஸ் டாலமி (Claudius Ptolemy-கி.பி. 150) வானியலிலும், டயஃபன்டஸ் (Diophantus-கி.பி. 275) இயற்கணிதத்திலும், எண் கொள்கையிலும் குறிப்பிடத்தக்கவர்கள்.

கிரேக்கர்கள் இயற்கணிதக் கருத்துகளை வடிவியல் உருவில் மாற்றியமைத்துக் கொண்டதாலும், வடிவியலிலேயே முழு ஆர்வமும் செலுத்திவந்ததாலும் ஏறத்தாழ 19ஆம் நூற்றுண்டு வரையிலும் வடிவியலே கணிதத்தின் முதன்மையான பகுதியாகக் கருதப்பட்டு வந்தது. மேலும், தொழில், வாணிகம், நிதி, அறிவியல் போன்ற துறைகளில் அதிகமாகப் பயன்பட்டுவரும் எண்கணிதத்தையும், இயற்கணிதத்தையும் இவர்கள் வளர்க்காமலேயே விட்டுவிட்டார்கள். இந்தியாவிலிருந்து அராபியர்கள் எண் கணித முறைகளை மேற்கு நாடுகளுக்கு எடுத்துச்சென்ற காலம் (கி.பி. 700) வரை இதில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் ஒன்றும் ஏற்படவில்லை.

அலெக்சாண்டிரியா பெருமையுற்றுச் செழித்தோங்கிய காலத்தில், மத்தியதரைக் கடலையடுத்த நாடுகளை ரோமர்கள் சண்டையிட்டுத் தாக்கினர். இப்படி ஏற்பட்ட தாக்குதல்களினுல், ஒரு முறை எகிப்தியக் கப்பற்படை முழுவதும் தீயால் அழிக்கப்பட்டது. இது கடற் படையோடு நிற்கவில்லை; அலெக்சாண்டிரியா நாட்டின் உள்ளேயும் படர்ந்த இந்த நெருப்பு, நூலகத்தையும் எரித்துச் சாம்பராக்கியது. இத்துடன் கிரேக்கரின் கணித வளர்ச்சி நின்றுவிட்டதாக வரலாற்றின் மூலம் தெரிகின்றது.

ரோமர்களின் (Romans) கணித வளர்ச்சி

ரோமர்கள் கருத்தியல் அறிவின்மேல் (abstract knowledge) கொண்டிருந்த தாழ்வான எண்ணத்திற்கு, அலெக்சாண்டிரியாவின் நூலகத்தை அவர்கள் எரித்துச் சாம்பராக்கியது ஒரு சிறந்த சான்று. இவர்கள் தங்களைக் காரியவாதிகள் என்று கூறிப் பெருமைப்பட்டுக்கொண்டிருந்தனர். பல பெரிய பொறியியல் திட்டங்களை வகுத்துச் சிறப்புடன் செய்துமுடித்தார்கள்; மேம்பாலங்கள், பல பெரிய சாலைகள், (இவற்றில் சில இன்னும் இருக்கின்றன) பாலங்கள், பொதுக் கட்டடங்கள் பலவும் திட்டமிட்டுக் கட்டி முடித்தார்கள். நில அளவை முறைகளிலும்

(survey) வியத்தகு முன்னேற்றம் அடைந்திருந்தனர். வாழ்க்கையில் நேர்முறையில் பயன்படாத கருத்தியலான அறிவையும், கண்ணுக்குப் புலனாகாத கருத்துகளையும் இவர்கள் பழித்து வந்ததற்கு, கணிதம், அறிவியல், தருக்கம், மற்றும் பற்பல கலைகளிலும் இவர்கள் சிறப்பாக ஒன்றும் சாதிக்கவில்லையென்பதே தக்கசான்று. கிரேக்கர்களை ரோமர்கள் ஆண்டது மற்றொரு விதத்திலும் அழிவுக்கே வழிவகுத்தது எனலாம். அடிமை ஆட்சியில் வாழ்ந்துவந்த கிரேக்கர்களின் சமுதாய வாழ்க்கை சீர்குன்றியிருந்ததால் கல்வியும் மிகக் கீழ்நிலையிலேயே இருந்தது.

கால்வாய்களும், பாலங்களும் கட்டுவதற்குச் சிறிதளவு கணித அறிவை ரோமர்கள் பயன்படுத்தியமையால் புதுமையான கணிதக் கொள்கைகள் ஒன்றும் அவர்கள் வழங்கவில்லை.

போயதியஸ் (Boethius)

யூக்ளிடின் வடிவியல் கோட்பாடுகளிலிருந்து சிலவற்றை எடுத்துப் போயதியஸ் ஒரு புத்தகமாக வெளியிட்டார். இவருடைய இயற்கணிதமும் நிக்கோமாக்கஸின் இயற்கணித சாதனைகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை.

கிரேக்கர்களின் அளவு கடந்த அறிவுக் குவியல்களில் மிகக் குறைந்த அளவே ரோமர்களால் வரலாற்றின் இடை நிலைக் காலத்திற்கு (கி. பி. 600 முதல் 1,500 வரை) கைம்மாற்றப்பட்டு வந்தது. இதில் பெரும் பகுதியும், ரோமர்களின் வீழ்ச்சிக்குப்பின் தோன்றிய போயதியஸின் (கி.பி. 475-524) எழுத்துகளாலேயே கிடைக்கப் பெறுகின்றன. போயதியஸ் கிரேக்கர்களின் தருக்க முறைகளில் மிகவும் ஆர்வம்கொண்டிருந்ததாகத் தெரிகின்றது. இவரைச் சில அரசியல் காரணங்களுக்காகச் சிறையில் அடைத்துக் கொன்றனர்.

அராபியர்களின் ஆக்கிரமிப்புகள்

முகமது நபியின் (கி.பி. 632) மறைவுக்குக் கிட்டத்தட்ட ஒரு நூற்றாண்டுக்குள்ளாகவே அவருடைய சீடர்கள் எகிப்து, ஆஃப்ரிக்காவின் வடபாகம், ஸ்பெயினின் சில பாகங்களையும் கைப்பற்றினர். பிறகு சிறிது காலத்தில் சிசிலியையும் கைப்பற்றினர். கிழக்கு முகமாக அவர்கள் இந்தியாவுக்குள்ளும் வந்தனர். நாடுகளைக் கைப்பற்றிய வண்ணமாகவே இவர்கள் கிரேக்க, இந்திய நாடுகளிலிருந்து அறிவியல் முறைகளையும், கணித முறைகளையும் வெகு விரைவில் தெரிந்துகொண்டனர். மிக முக்கியமான மதச் சார்பான சடங்குகளையும், விருந்து நாள்களையும், திங்களின் பிறைகளைக்

கொண்டு கணிப்பதற்கு வேண்டிய அறிவு தேவைப்பட்டது. அராபியக் கணித வல்லுநர்களில் பலர் வானூலியலார்களாக இருந்ததற்கு இது ஒரு முக்கியக் காரணமாகும்.

கணிதவியலார்கள்

கோணகணித அட்டவணைகள் சிலவற்றை அரபு மொழியில் மொழிபெயர்ப்பதற்காகச் சுமார் கி. பி. 770-ல் இந்திய வானியல் நிபுணர் ஒருவர் பாக்தாத்திற்கு வரவழைக்கப்பட்டார். இந்திய எண் இலக்கங்கள் அராபியக் கணிதவியலில் சேர்ந்ததற்கு இம் மொழிபெயர்ப்புகள் காரணமாகும். முகமது நபிக்குப் பின் தோன்றிய இஸ்லாமிய அதிகாரியான ஹருண்-அல்-ரஷீத் (Harun-al-Rashid 786-808) என்பவருக்காக (அராபிய இரவுக் கதைகள் இவருக்காக எழுதப்பட்டதாக வரலாறு கூறுகிறது.) யூக்ளிட், டாலமி முதலியவர்களின் நூல்கள் அராபு மொழியில் மொழி பெயர்க்கப்பட்டன. அவருக்குப் பின் வந்த அல் மாமுன் Al-Mamun 813-833), இந்த மொழிபெயர்ப்புகள் பெரிதும் ஆர்வத்தைத் தூண்டுவனவாயிருந்ததால், அவற்றால் கவரப்பட்டு, கான்ஸ்டான்டிநோபிளுக்கும், இந்தியாவிற்கும், கிடைக்கும் அறிவியல் நூல்கள் பலவற்றையும் வாங்கிவரும்படி தூதுக் குழுக்களை அனுப்பினார். இப்படியாக, சுமார் 9ஆம் நூற்றாண்டின் முடிவில் மொழிபெயர்க்கப்பட்ட, யூக்ளிட் ஆர்க்கிமிடிஸ், அப்போலோனியஸ், டாலமி, மற்றும் பலருடைய நூல்களும் அராபிய மொழியில் கிடைக்கப்பெற்றன. ஆகவே, கிரேக்க, இந்திய நாட்டு நூல்கள் பலவும் இஸ்லாமிய மாணவர்களுக்குக் கிடைக்கும் வாய்ப்பிருந்தது. இஸ்லாமியர்கள் இந்தியாவுடனும் வாணிகத் தொடர்பு கொண்டிருந்ததால், இந்தியாவில் கிடைக்கப்பெற்ற ஒன்றிரண்டு முக்கியமான கணித நூல்களும் அல்-மன்சூர் (Al - Mansur 754-775) என்ற இஸ்லாமிய அதிகாரியின் காலத்தில் அவர்களுக்குக் கிடைத்தது.

அல்-கௌரஜ்மி (Al-Khowarizmi)

இவர் இயற்கணிதத்திலும், இந்திய எண் இலக்கங்களிலும் வியக்கத்தக்க சாதனை புரிந்ததாகத் தெரிகின்றது. இந் நூல்கள் சுமார் கி. பி. 1140ஆம் ஆண்டில் இலத்தீனில் (Latin) மொழி பெயர்க்கப்பட்டன. ஐரோப்பிய நாடுகளில் இந்த நூல்களுக்கு நல்ல மதிப்பு இருந்தது. 'இல்ம்- அல்- ஜாபர்' (Ilm-al-jabr) என்று பெயரிடப்பட்ட இந் நூல்கள்பிற்காலத்தில் அல்ஜிப்ரா (Algebra) என்ற பெயருக்குக் காரணமாயிருந்தன — அல்ஜிப்ரா என்பதற்கு 'மீட்டாக்கம்' (restoration) என்று பெயர் — அதாவது, ஒரு சமன்பாட்டில் இரண்டு பக்கங்களிலும் ஒரே அளவைக் கூட்டினாலோ

கழித்தாலோ சமன்பாடு மாருது என்பதாம். இதற்குப்பின் அராபியக் கணிதவியலார்கள் கோளத் திரிகோண கணிதத்தின் அடிப்படைகளையும் அறிந்திருந்ததாகத் தெரிகின்றது. அராபியரின் எண்கணிதம், இயற்கணிதம், கோண கணிதம் முதலிய நூல்கள் சிறந்து விளங்கின. வடிவியலையும், வானவியலுக்கு அதன் பயன் முறைகளையும் இவர்கள் அறிந்து பாராட்டினுர்கள். ஆனுல், அறிவியலை இவர்கள் அதிகம் வளர்க்கவில்லை. கிரேக்க, இந்திய நிபுணர்களின் நூல்களையும் கண்டுபிடிப்புகளையும் மிகச் சீக்கிரத் திலேயே அராபியர்கள் அறிந்து பாராட்டினுலும், சீனர்களையும், எகிப்தியர்களையும் போல் இவர்களும் ஓர் அறிவியற் பொருளையும் முறைப்படி வளர்க்கவில்லை.

இந்தியக் கணிதம்

கிரேக்கக் கணித நூல்களாலும், அதன்பின் சீனுவின் கணித வல்லுநர்களாலும் இந்தியக் கணித மேதைகள் ஓரளவு பாதிக்கப் பட்டிருப்பதாகத் தெரிகின்றது. ஆனுல், இந்தியர்கள் தாங்க ளாகவே சில முக்கியமான சாதனைகளைச் செய்ததாகத் தெரி கின்றது. இவற்றில் இந்து—அராபிய எண் குறி முறைகளும், இடமதிப்புக்கு ஆதாரமான பூச்சியமும் மிக முக்கியமானவை யாகும். மேலும், இவர்கள் எதிர்மறை எண்ணை (Negative number) உருவாக்கினுர்கள். நேர்மறை எண்களைப் போலவே எதிர்மறை எண்களையும் பயன்படுத்தலாம் என்று அறிந்தனர். எதிர்மறை எண்களைக் கடன், நட்டம் (loss) முதலியவற்றைச் சுட்டிக்காட்டப் பயன்படுத்தினர். இக் கருத்துகள் அராபியர் மூலமாக ஐரோப்பிய நாடுகளுக்கு எடுத்துச்செல்லப்பட்டாலும், ஏறத்தாழ 17ஆம் நூற்ருண்டுவரை கணித முறைகளில் இவை ஏற்றுக்கொள்ளப் பட்டதாகத் தெரியவில்லை.

இந்தியக் கணித மேதைகள்

1. ஆரியபட்டர்: (கி. பி. 475-550) இவர் முதல் இந்தியக் கணித மேதை. பாட்னுவில் வசித்தார். இவர் இயற்றிய முக்கிய மான நூல் ‘ஆரியபாத்தியா’ என்பது. இதில் நான்கு முக்கிய பாகங்கள் இருந்தன. அவற்றில் மூன்று பாகங்கள் வானநூலுக் கும், கோளத் திரிகோண கணிதத்திற்கும் ஒதுக்கப்பட்டது போக மற்றும் ஒரு பாகத்தில், 33 எண்-இயற்கணித விதிகளும், கோண கணித விதிகளும் தரப்பட்டிருந்தன. இயற்கணிதத்தில் முதல் N இயல் எண்களின் கூடுதல், அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், மூன்ரும் படிகளின் கூடுதல் இவற்றிற்கு ஆரியபட்டர் பொது விதிகள் கண்டுபிடித்தார். மேலும், இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வையும், முடிவு தேரப்பெருத (indeterminate equation) சமன்

பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையையும் இவர் அறிந்திருந்தார். இவர் கணித்த வானநூல் வாய்பாட்டுப் பட்டியலில் நெடுக்கை (sine) வாய்ப்பாடும் இடம் பெற்றுள்ளது.

பிரமகுப்தர் (Brahmagupta) கி. பி. 628

முக்கியக் கணித மேதைகளில் இரண்டாவதாக இவரைக் கூறலாம். உஜ்ஜைனியில் வாழ்ந்தார். ஆரியபட்டரின் நூல்களை விட இவர் நூல்கள் அதிகம் விளக்கமானவை. பண்டமாற்று, வட்டி வீதங்கள், கணிப்புகள், தொடர் எண்கள் (progression) நிழற்கணிப்பு (shadow reckoning) முதலியவற்றிற்கு இவர் எண் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தினர். எதிர்மறை எண்களின் விதிகளும், இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வும், தேரப்பெறுத சமன்பாடுகளும் இவருடைய நூலிலும் காணப்படுகின்றன. செங்கோண முக்கோணத்தில் 'பிதாகரஸின் கொள்கை'யை இவரும் தெரிந்திருந்தார்.

இவர் ஆரியபட்டரின் நூல்களையோ, டயஃபண்டஸின் (Diophantus) நூல்களையோ தெரிந்திருக்க வேண்டும் என்று கருத இடமிருந்தாலும், இவருடைய பல கண்டுபிடிப்புகள் முதன்மையானவை (original).

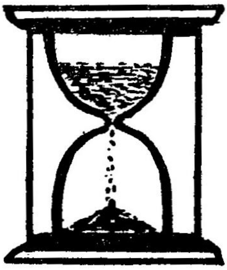
மகாவீரர் (Mahavira)

இவர் பிரமகுப்தருக்கு இரண்டு நூற்றாண்டுகளுக்குப் பிந்தியவர். மைசூரில் வாழ்ந்தார். இவருடைய 'கணித—சார—சங்கிரகா'வில், தொடர் எண்கள், விசை மூலங்கள், சமன்பாடுகள் முதலியவற்றில் பல உதாரணங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. பூச்சியத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கும் முறைகளும், பூச்சியத்தால் பூச்சியத்தை வகுப்பது பொருள் இல்லையென்றும் இவர் கூறியிருக்கிறார்.

பாஸ்கரர் (Bhaskara—1114—1185)

இவரும் உஜ்ஜைனியில் வாழ்ந்தவர். எதிர்மறை எண்களை, கடன், நட்டம் இவற்றிற்கு ஒப்பிட்டார். கணிதவியலிலும், அளவியலிலும் இவர் இயற்றிய நூலை இவருடைய மகள் லீலாவதியின் பெயரில் வெளியிட்டார். இவர் சோதிடத்தில் மிகுந்த நம்பிக்கையுள்ளவர். தம் மகளுக்கு மணமுடிக்க நல்லநாளும், நேரமும் கணித்து அவர்கள் அந்த நேரத்திற்காகக் காத்திருந்தனர். அக் காலத்தில் நேரத்தை அளப்பதற்கு மணல் சொரிந்து மணி காட்டும் (hour glass) கருவியைப் பயன்படுத்தினர் (படம் 2). மணப்பெண் லீலாவதி இந்தக் கருவியை உற்றுநோக்கிக்கொண்டிருக்கும்போது அவள்

தலையலங்காரத்திலிருந்து ஒரு முத்து அக் கருவிக்குள் விழுந்ததாகவும், அதனால் மணலின் வீழ்ச்சி தடைப்பட்டதாகவும், ஆகவே, பாஸ்கரர் கணித்த நேரம் கவனிக்காமலே கடந்துவிட்டதாகவும், அதனால் லீலாவதியின் திருமணம் நின்றுபோனதாகவும், தம்முடைய மகளை மகிழ்வூட்டும் முறையில் பாஸ்கரர் தம் நூலுக்கு லீலாவதி என்று பெயர் சூட்டினார் என்றும் கணித வரலாறு கூறுகின்றது. இவர் உஜ்ஜைனியிலுள்ள வானிலை ஆய்வுக்கூடத்திற்குத் தலைமை வகித்தார். இவர் வான நூல் என்று எழுதிய புத்தகத்திலிருந்து நான்கு பகுதிகள் மொழிபெயர்க்கப்பட்டன. இவற்றில் முதல் பகுதிக்கு 'லீலாவதி' என்று பெயரிட்டு அதில் எண்கணிதம்பற்றி எழுதியுள்ளார்; இரண்டாவது 'பீஜ கணிதம்' (Bija-Ganita) என்ற பகுதியில் இயற்கணிதத்தையும், மூன்றாவது, நான்காவது பகுதிகளில் வானநூலையும், கோளத்தையும்பற்றி எழுதியுள்ளார்.


படம் 2.

முதல் பாகம் 'லீலாவதி'யை அறிவுக் கடவுளுக்கு (God of Wisdom) வணக்கம் தெரிவித்த பின்னர், கீழே கொடுக்கப்பட்ட முறையில் வரிசைப்படுத்தியுள்ளார்:

1. நிறுத்தல், நீள அளவைகள்.

2. தசம எண்கள்.

3. எண் கணித விதிமுறைகள் எட்டும். அதாவது, கூட்டல் கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல், வர்க்கம், முப்படிப் பெருக்கம் (cubing), வர்க்கமூலம், கனமூலம்; மேலும், பின்னங்களுக்கான இவ்வெட்டு விதிமுறைகள்.

4. பூச்சியத்தைக் குறித்த சில விதிகள்— $x \pm 0 = x$, $0^2 = 0$, $\sqrt{0} = 0$, $\frac{x}{0} = \infty$.

5. ஒருபடிச் சமன்பாடுகள், ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் இவற்றின் செயல் முறைகள்.

6. இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறை.

7. விகிதம், விகித சமம் குறித்த விதிகள்.

8. வட்டி, தள்ளுபடி, கூட்டு வியாபாரம்.

9. நேரமும், வேலையும்.
10. பண்டமாற்று வாணிகம்.
11. கூட்டுத் தொடர் (arithmetic progression).
12. முக்கோணம், நாற்கரம்பற்றிய கணக்குகள்.
13. π -ன் தோராய மதிப்பு.
14. கோண கணிதச் சூத்திரங்கள் சில.
15. கன உருவங்களின் அளவுகள்.
16. தேரப் பெருத சமன்பாடுகள்.
17. சேர்மானம்.

தசம எண்களைப்பற்றிப் பாஸ்கரருக்கு முன் யாரும் எழுதிய தாகச் சான்றுகள் இல்லை.

இவருடைய கணித நூலிலிருந்து இவர் காலத்திய நாட்டின் பொதுவான நிலையையும் அறிய முடிகின்றது. நாட்டின் பொருளாதார நிலை, அந் நாள்களில் வழக்கத்திலிருந்த அடிமை வியாபார முறை, வட்டி முறைகளைப் பற்றியும், இவருடைய நூலில் காணலாம். 5ஆம் நூற்றுண்டுக்கும், 12ஆம் நூற்றுண்டுக்கு மிடையில் வாழ்ந்த கணித மேதைகளுள் இவர் மேம்பட்டவர்.

இந்தியக் கணிதத்தின் பண்புகள்

கணித வளர்ச்சிக்கு எண் இலக்கங்கள், பூச்சியம், அதைச் சார்ந்த செயல்முறைகள், கூட்டுத் தொடர், இருபடிச் சமன்பாடு கள் முதலியவற்றில் இந்தியக் கணித மேதைகளின் பங்களிப்புப் பாராட்டத்தக்கது. இந் நூல்களின் செய்யுள் முறையமைப்பு ஒரு முக்கியமான சிறப்பாகும்.

சுருக்கம்

பற்பல நாடுகளிலும் பல்வேறு காலங்களிலும் கணித ஆர்வம் கொண்ட பல வகைப்பட்ட மனிதர்களையும்பற்றிச் சுருக்கமாகப் பார்த்தோம். இவர்களுள் முக்கியமானவர்கள் : பண்டைய எகிப்து நாட்டின் மதகுருக்களும் பாபிலோனிய நாட்டின் வர்த் தகரும் சோதிடரும், கிரேக்க நாட்டின் தத்துவ மேதைகளும், காரியவாதிகளான ரோம் நாட்டாரும், கவிநயம் கொண்ட இந்தியரும், மற்ற நாடுகளையும் மற்றவருடைய அறிவாற்றலையும் ஒருங்கே கைப்பற்றும் ஆற்றல் கொண்ட இஸ்லாமியருமாவர்.

ஏறத்தாழ கி. பி. 500 முதல் 1,400 வரை ஐரோப்பிய நாடுகளைப் பொறுத்தவரையில் கணித வளர்ச்சியில் எந்த முன்னேற்றமும் இல்லை. இதற்கு முக்கியக் காரணம் இந்த இடைக்காலத்தில் ஐரோப்பிய நாடுகளுக்கு இடையே விடாமல் தொடர்ந்து நடைபெற்ற போரும், அதன் காரணமாக அங்கு நிலவிய அமைதியின்மையுமே ஆகும். இந்த ஆயிரம் ஆண்டுகளில் ஒரு சிறிது முன்னேற்றம் இருந்தது என்றால் அப் பெருமை அராபியரையும், இந்தியரையுமே சாரும்.

பாஸ்கராச்சியாருக்குப் பிறகு, ஏறத்தாழ 13ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்திலிருந்து: 19ஆம் நூற்றாண்டுவரை இந்தியாவில் கணித வளர்ச்சியில் குறிப்பிடத்தக்க எந்த முன்னேற்றமும் இல்லை. இதற்கு முக்கியக் காரணம், இந்தியாவில் முகமதியர்களின் ஆதிக்கம் பரவியதேயாகும். முகமதிய மன்னர்கள் நாடு சேர்ப்பதிலும், மதத்தைப் பரப்புவதிலுமே அதிக ஆர்வம் காட்டினர். மேலும், முகமதிய ஆதிக்கத்தின் முடிவில் (கி. பி. 1,600) கிழக்கிந்தியக் கம்பெனியின் ஆதிக்கம் வலுப்பெறத் தொடங்கியது. ஆங்கில ஆட்சி இந்தியாவில் நிலைபெறுவதற்கு முன் முகமதியர், ஆங்கிலேயர், சுதேச மன்னர்கள் இவர்களுக்குள் இடைவிடாமல் நடந்துவந்த போர்காரணமாக நாட்டில் அமைதி குன்றியிருந்தது. மேலும், மக்களிடையே அடிமைத்தனம் வளர்ச்சி அடைந்த அளவுக்கு, அறிவு வளர்ச்சி ஏற்படவில்லை. ஆங்கிலேயரின் நிலையான ஆட்சிக்குப் பிறகு ஏறத்தாழ 19ஆம் நூற்றாண்டின் முடிவில் இந்தியக் கணித வளர்ச்சியில் முக்கிய இடம் பெறுபவர் இராமானுஜம் ஆவார்.

இராமானுஜம் *(1887—1920)*

இவர் தமிழ் நாட்டில் ஈரோட்டில் பிறந்தார், சிறு வயதிலேயே தம் கணித அறிவால் ஆசிரியர்களைத் திகைக்க வைத்தார். பதினாறு வயதில் பள்ளிப்படிப்பை முடித்தார். இடைநிலை வகுப்புத் (Inrermediate) தேர்வில் இவர் தோல்வியடைந்ததால் மேலும் படிக்காமல், 1,907ஆம் ஆண்டு, சென்னைத் துறைமுகத்தில் ஓர் அரசாங்க ஊழியராகச் (clerk) சேர்ந்தார். ஆயினும், கணிதத்தை இவர் தொடர்ந்து கற்றார்.

எண்ணியலில் (Theroy of Numbers) இவருடைய பங்கு போற்றத்தக்கது. முதன்முறையாக 1911ஆம் ஆண்டு இவருடைய ஆராய்ச்சிக் கட்டுரை 'இந்தியாவின் கணிதக் கழக வெளியீடு' (Journal of The Indian Mathematical Society) என்னும் பத்திரிகையில் வெளிவந்தது. அடுத்த ஆண்டிலேயே இவருடைய

தனி ஆற்றலைப் பலரும் ஒப்புக்கொண்டனர். 1913ஆம் ஆண்டு இவர் தாம் கண்டுபிடித்த பல தேற்றங்களைத் தொகுத்து எழுதி அப்போது கேம்பிரிட்ஜ் டிரினிடி கல்லூரியின் ஆட்சி உறுப்பினராக இருந்த ஹார்டி (Hardy) என்ற கணித மேதைக்கு அனுப்பி வைத்தார். அடுத்த ஆண்டி லேயே இவருக்கு மேலும் கணிதம் கற்பதற்காகக் கேம் பிரிட்ஜ் பல்கலைக்கழகத்தி லிருந்து அழைப்பு வந்தது. 1917ஆம் ஆண்டுவரை அங்குக் கற்ற இவருக்கு ஐரோப்பா முழுவதிலும் நல்ல செல்வாக்கு இருந்தது. அப்போது இருந்த சிறந்த கணிதப் பத்திரிகை களில் இவருடைய கட்டுரை கள் இடம்பெற்றன. 1918-ல் இவர் Fellow of Royal Society ஆகவும், அதே ஆண்டின் இறுதியில் Fellow of Trinity College-ஆகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டார். ஏராளமான ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகள் வெளியிட்டார். இவர் ஒரு 'கணிதவியலாரின் கணிதவியலாராக'ப் (A Mathematician's Mathematician) பணிசெய்ததால் வெளியுலகம் அவரைப்பற்றி முழுவதுமாக அறியவில்லை.


இராமானுஜம்

இவர் 1920ஆம் ஆண்டு தமது 33ஆம் வயதில் இறந்தார். இவருடைய மறைவு, கணித உலகிற்கும் நம் நாட்டிற்கும் ஈடு செய்ய முடியாத இழப்பாகும்.

ஐரோப்பிய நாடுகளில் 15ஆம் நூற்றுண்டிற்குப் பின்வந்த கணித வல்லுநர்கள்

15ஆம் நூற்றுண்டு: ஜான் வைட்மன் (John Widman-1489) முதன்முதலில் கூட்டலுக்கு + குறியையும், கழித்தலுக்கு – குறியையும் பயன்படுத்தினர்.

16ஆம் நூற்றுண்டு: ராபர்ட் ரெக்கார்ட் (Robert Recorde 1510-1588) = குறியைப் பயன்படுத்தினர்.

இயற் கணிதக் குறியீட்டு முறைகள் பலவும் கண்டுபிடிக்கப் பட்டதால் இந் நூற்றுண்டில் இயற்கணிதம் சிறந்த முன்னேற்றம் அடைந்தது. இந்து-அராபிய எண் இலக்க முறைகள் ஒரு தரப்

படுத்தப்பட்டன (standardised). தசமப் பின்ன முறைகள் தாராள மாகப் பயன்படுத்தப்பட்டன. டயஃபான்டஸ் (Diophantus) முதலி யோரின் காலத்தில் அறிந்திருந்ததைக்காட்டிலும் இயற்கணித விதி முறைகள் வெகுவாக வளர்ந்து விட்டன—முப்படிச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட்டது, அடுக்குக் குறியைப்பற்றியும் எதிர்மறை எண் களைப்பற்றியும் கருத்துகள் வளர்ந்தன—ஆகவே, இதற்கடுத்த 150 ஆண்டுகளில் கணிதம் பெருமளவு முன்னேற்றம் அடைந்த தில் வியப்பில்லை.

17ஆம் நூற்றுண்டிலும் அதற்குப் பின்னும்வந்த சிலரைப் பற்றிக் கீழே குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

1. டேகார்டே (Descartes): ஃபிரான்ஸ் நாட்டவர். பகுமுறை வரைகணித (Analytical Geometry) முறையில் இவர் செய்த பணியைக் கருதியே அதற்கு 'கார்டீஸியன்' வடிவகணிதம் என்று பெயரிடப்பட்டது.

2. பாஸ்கல் : நிகழ்தகவு (probability) முறைகளிலும், வட்டப் புள்ளியுருவிலும் (cycloid) சோதனைகள் நிகழ்த்தினர்.

3. பிரிக்ஸ் (Briggs): மடக்கைக் (Logarithm) கணிப்பு முறை களை விளக்கினர்.

4. ஆட்ரட் (Oughtred): சறுக்கல் அளவு கோலைக் (Slide Rule) கண்டுபிடித்தார்; பெருக்கல் குறியையும் ×, விகிதசமக் குறியையும் : : கண்டுபிடித்தார்.

5. நேப்பியர்: மடக்கை முறையைக் கண்டுபிடித்தார்.

6. நியூட்டன்: நுண் கணிதவியலைக் கண்டுபிடித்தவர். ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விதியைப்பற்றிய இவருடைய கண்டுபிடிப்புகள் இன்றைக்கும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

7. லீபினிட்ஸ்: (Leibnitz-1646) இவர் தொகை நுண் கணிதத் தைக் (Integral calculus) கண்டுபிடித்தார்.

8. ஜியார்ஜ் காண்டர் : (George Cantor—1845-1918) என்ற கணித மேதையார் கணங்களைப்பற்றிய கருத்தைக் கணக்கியலில் பயன்படுத்தினர்.

கணிதப் பிரிவுகள் பலவும் அறிவியல் வளர்ச்சிக்காக ஏற் பட்டவை; அறிவியல், கணிதத்திற்கு வேண்டிய புதிய கணக்கு களை ஏற்படுத்தியது. கணிதத்தில் சிறந்த படைப்புகளும் அறி

வியலில் சிறந்த கண்டுபிடிப்புகளும் அநேகமாக ஒருவராலேயே ஆகியிருப்பதைப் பலருடைய வாழ்க்கையிலிருந்து அறியலாம். உதாரணமாக ஆர்க்கிமிடீஸ், கலீலியோ, நியூட்டன் முதலானோர். கணிதத்தின் பல்வேறு பிரிவுகளும் இரண்டு முக்கிய அடிமரத்தினின்றும் பிரிந்தன என்று கூறலாம். அவை எண் கணிப்பு முறை அல்லது எண்கணிதமும், வடிவங்களையும் உருவங்களையும் கொண்ட வடிவியலுமாகும். அன்றாட வாழ்க்கையின் பலவிதமான எண்ணிக்கைகளைக் குறிப்பதற்கு முதலாவதும், கட்டடங்கள் கட்டுவதற்கும் நில அளவைகளுக்கும், வானிலை ஆராய்ச்சிகளுக்காகவும் இரண்டாவதும் பண்டைக் கால மனிதர்களால் பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தன. நுண்ணறிவு வளர்ச்சியில் ஆர்வம் கொண்ட கிரேக்கர்கள் இவற்றை முக்கியமாக வளர்த்தார்கள் எனலாம். இவ் விரு முக்கியக் கணிதப் பகுதிகளிலிருந்தும் எண்ணியல், பகுவியல் (analysis), கோண கணிதம், இயற்கணிதம் ஆகியவை வளர்ந்தன. நமக்கு இப்போது அறிமுகமாகியுள்ள அறிமுறைத் தேற்றங்களும் அவற்றின் நிரூபணங்களும் (செயல் விளக்கங்களும்) இவர்கள் கண்டுபிடித்த தருக்க, வாத முறைகளின் அடிப்படையில் அமைந்தவையேயாகும்.

17ஆம் நூற்றாண்டை, கணித வளர்ச்சியின் பொற்காலம் எனலாம். கலீலியோ என்ற வானியல் நிபுணர், புவிஈர்ப்பு விசையினால் பொருள்களில் ஏற்படும் வேக வளர்ச்சியைக் கணிப்பதற்காக வடிவியலைப் பயன்படுத்தியதன் மூலம் அறிவியலையும் கணிதத்தையும் நிலையாக இணைத்துவிட்டார்.

கணிதத்தின் இரு பெரும் பிரிவுகளான இயற்கணிதத்தையும், வடிவியலையும் இணைத்துப் பகுமுறை வரைகணிதத்தை உருவாக்கிய டேகார்டே என்பவர், மிகவும் பயன்தரக்கூடிய வரைபட முறையைக் கண்டுபிடித்தார். சூதாட்டத்தில் பகடையின் விழுமுறையைக் கண்டுபிடித்த ஃபெர்மாட் (Fermat), பாஸ்கல் இருவரும் நிகழ்தகவுக் கொள்கைக்கு அடிகோலினர். இவற்றிற்கெல்லாம் சிகரம் போல், நியூட்டனும், லிபினிட்ஸும் தனித் தனியே நுண் கணிதவியலைக் கண்டுபிடித்தது இந் நூற்றாண்டின் மகத்தான சாதனையெனலாம்.

19ஆம் நூற்றாண்டிலும் கூட, பெர்ன்ஹார்ட் (Bernhard), ரீமான் (Reimann) என்ற இரு தத்துவ அறிஞர்களும், கார்ல் காஸின் (Karl gauss) சில அடிப்படைத் தத்துவங்களின் அடிப்படையில் யூக்ளிடின் கோட்பாடுகளுக்குப் புறம்பான வடிவியல் முறைகளையும் (Non-Euclidean Geometry), முப்பரிமாணத்திற்கும் மேலான n—பரிமாணக் கற்பனை வெளிகளைப்பற்றியும் ஆராய்ந்த

னர். நாம் வாழும் இந்த 20ஆம் நூற்றுண்டில் தெரிவிப்புக் கொள்கைகளைப் (Information theory) பயன்படுத்துவதன் மூலம் மின்மப் பொறி கணிப்பானை (electronic computers) அமைத்ததைக் கணித வளர்ச்சியின் மிகப்பெரிய சாதனையாகக் கொள்ளலாம்.



பிதாகரஸ்

ஒரு சில கணித மேதைகள்

பிதாகரஸ் (கி.மு. 530): கணித மேதையும், தத்துவ மேதையுமான இவர் எண்கணிதத்திலும், வடிவியலிலும் பல புதிய கண்டு பிடிப்புகளைச் செய்துள்ளார். ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்றுகோணங்களின் கூடுதல் 180° என்று கண்டு பிடித்தார். இவர் செங்கோண முக்கோணத்தின் தன்மையைப் பற்றிய தேற்றத்தை நிரூபித்தார்.

பிளேட்டோ (கி.மு. 427-387): தலைசிறந்த தத்துவ மேதைகளில் ஒருவர். கி. மு. 387-ல் ஐரோப்பாவின் முதல் பல்கலைக் கழகமாகிய ஏதென்ஸ் அகாடமியை ஏற்படுத்தினர். கிரேக்கக் கணிதக் கலையின் மையமாக இது விளங்கியது. வடிவங்கள் அமைப்பதில் காம்பஸையும், வரைகோலையும் மட்டுமே பயன்படுத்தும் பழக்கம் இங்குத்தான் உருவாக்கப்பட்டது.



பிளேட்டோ

ஆர்க்கிமிடிஸ் (கி. மு. *278-212*): கணித மேதைகளுள் தலைசிறந்தவராவர். கிரேக்க நாட்டைச் சேர்ந்தவர். அறிவியல், கணிதம் சம்பந்தமான பல புதிய கண்டுபிடிப்புகளைச் செய்துள்ளார். கோளங்களின் பரப்பளவுகளையும், கன அளவுகளையும் கணக்கிடும் முறையையும் கண்டுபிடித்தார். π என்பதன் மதிப்பு $3\frac{1}{7}$-க்கும் $3\frac{10}{71}$-க்கும் இடைப்பட்டது எனக் கூறினர்.



ஆர்க்கிமிடிஸ்

இராடாஸ்தனிஸ் (கி மு. *276-192*); இவர் ஒரு தலைசிறந்த கிரேக்க விஞ்ஞானியும், கணித மேதையுமாவார். அலெக்ஸாண்டிரியாவி லிருந்த பல்கலைக்கழகத்தின் நூலகத்தில் பணிபுரிந்து வந்தார். அவர் பூமியின் சுற்றளவைக் கணக்கிட்டறியும் முறையையும் கண்டுபிடித்தார். லீப் வருடத்தை நிறுவினர். கிறிஸ்துவின் பிறப்பை முதலாக வைத்து நாம் ஆண்டுகளைக் கணக்கிடுவது போல் இவருடைய ஆண்டுக் குறிப்பு (Calendar) ட்ராய் (Troy) நகரத்தின் வீழ்ச்சியை முதலாக வைத்து ஆண்டுகளைக் கணக்கிட்டது. அவருடைய செயல்களில் குறிப்பிடத் தக்கது பகா எண்களைப் பிரித்தறிய அவர் கையாண்டமுறையாகும்.



இராடாஸ்தனிஸ்

நிக்கோலஸ் காப்பர்னிகஸ் (1473-1543) இவர் போலந்து நாட்டைச் சேர்ந்த வான சாஸ்திரியாவார். கணிதப் பாடத்தின்



காப்பர்னிகஸ்

ஒரு கிளையாகிய கோண கணிதம், கணிதத்திற்கு அவருடைய பெரிய நன்கொடையாகும். இக் கோண கணிதம் வானியலில் அவருடைய ஆராய்ச்சியினை நன்முறையில் முடிக்க உதவியது. சூரியனே பேரண்டத்திற்கு (Universe) மையம், பூமி அன்று என்று கூறியமையால் வானியலில் இவருடைய கொள்கை மிகச் சிறப்பானதாகும். மற்றவர்களை இதை நம்ப வைப்பதிலும் இவர் வெற்றிகண்டார்.



கலீலியோ

கலீலியோ (1564-1642)

தொலைநோக்கியை முதன் முதலில் அமைத்தவரும், பயன்படுத்தியவரும் இவரே. பிசாவிலுள்ள கோவிலில், விளக்குக் காற்றில் அசைவதைக் கண்டு ஊசல்பற்றிய அடிப்படை விதியைக் கண்டுபிடித்தார். வடிவ

கணிதத்தை ஓர் ஆசிரியர் கற்பித்துக் கொண்டிருக்கையில் இவர் அதைக் கேட்க நேர்ந்தது. அதில் மிகுந்த ஆர்வம் கொண்ட இவர், தந்தை மிகவும் விரும்பிய மருத்துவத்தைவிட்டுக் கணிதத்தை மேற்கொண்டார். பிசாப் (Pisa) பல்கலைக்கழகத்தில் கணிதப் பேராசிரியரானார். பாதுவா (Padua) என்னுமிடத்திலும் கணிதம் கற்பித்தார். கனமான பொருள்களும், இலேசான பொருள்களும் ஒரே சமமான வேகத்துடன் விழுகின்றன எனக் கண்டறிந்தார். இயக்கம், விசை ஆகியவை சம்பந்தமான பிரச்சினைகளில் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தும் முறையைக் குறிப்பிட்டது இவரின் தனிச் சிறப்பாகும்.

ஜார்ஜ் கேன்டர் (*1845-1918*)

ருஷ்ய நாட்டில் பிறந்தவர். ஜெர்மானியிலும், சுவிட்சர்லாந்திலும் கல்வி பயின்றார். இவருடைய தந்தை இவர் பொறியியல் வல்லுநராக வேண்டும் என விரும்பினார். ஆனால், இவர் பல்கலைக்கழகத்தில் கணிதம் பயிலத் தீர்மானித்தார். கணங்களைப்பற்றிய கருத்தைக் கணக்கியலில் புகுத்தினார். இக் கருத்துகள் கணிதப் பகுப்பாய்வுக்கு மிகவும் துணைபுரிந்ததோடன்றி, தருக்க கணிதத்திற்கும் பெரும் அளவில் துணைபுரிந்தன.



ஜார்ஜ் கேன்டர்

கணிதம் கற்பித்தலுக்குக்கணித வரலாற்றின் இன்றியமையாமை

மனித இனத்தின் அறிவு வளர்ச்சியிலும், புற நாகரிக முன்னேற்றத்திலும் கணிதத்தின் சாதனைகளை அறிவது கணித ஆசிரியருக்கு இன்றியமையாததாகும். ஆதிமனிதன் தன்னுடைய கைகால் விரல்களைப் பயன்படுத்தி எண்ண முயன்றதும், பலவித நீள, அகல, கன அளவுகளைத் தெரிந்துகொண்டதும், நேரத்தைப் பலவழிகளில் கணக்கிட்டதும், தசமக் குறிகள், பின்னங்களைக் கண்டுபிடித்ததும், வாழ்க்கைப் போராட்டத்தில் அவனுடைய பல தேவைகளை நிறைவு செய்து கொள்வதற்காகவே யாகும். இன்று கணிதம் கருத்தியலான முறையில் வளர்ந்தாலும் தொடக்க காலத்தில் கணித விளக்

கத்திற்குப் பருப் பொருள்களே அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டன. பல நூற்றுண்டுகளாக மணிச்சட்டம் போன்ற கருவிகளைப் (abacus, swan-pan) பயன்படுத்திக் கணக்கிட்டு வந்தனர்.

வடிவியல் கிரேக்கர்களின் தத்துவ, தருக்க ஆராய்ச்சி களினுல் வளர்ந்தது என்பர். இதன் வளர்ச்சிப் படிமுறைகள் ஒவ்வொன்றும் மிகவும் கவர்ச்சியானவை. இவற்றை மாணவர் களுக்குக் கற்பிக்குங்கால் கணிதப் பாடத்தில் அவர்களுடைய ஆர்வம் மிகும் என்பதில் ஐயமில்லை. (கணித வரலாறு-கிரேக்கர் கள்-பார்க்கவும்)

கணிதப் பாடத் திட்டத்தில் கணித வரலாற்றையும் இணைக்க வேண்டும் என்பது நம்முடைய நோக்கமன்று. ஆனுல், கணிதப் பாடம் கற்பிக்கும்போது அதன் ஒவ்வொரு நிலைகளிலும் பொருத்த மான இடங்களிலும் வரலாற்றையும் இணைத்துக் கற்பித்தல் சிறப்புடையதாகும். மாணவர்களின் ஆர்வத்தை வளர்க்கவும் கற்றுக்கொடுக்கும் பாடத்தின் சிறந்த பொருளையும் நோக்கத் தையும் வலியுறுத்தவும் இது மிகவும் பயன்படும்.

கணித வரலாற்றைப்பற்றிக் கூறும்போது கணிதம் வளரக் காரணமாயிருந்த மேதைகளைப்பற்றி அறியாமலிருக்க முடியாது. கணிதப் பாடத்தில் இடம்பெறும் ஒரு தேற்றத்துடன் அதை உண்டாக்கிய பிதாகரஸும், ஒரு தத்துவத்துடன் அதை விளக்கிய ஆர்க்கிமிடிஸும், ஒரு சில விதிகளுடன் அவற்றை வெளிக் கொணர்ந்த நியூட்டனும் ஒரேநிலையில் வைத்து எண்ணப்பட வில்லை எனினும், அவர்களைப்பற்றியும் மாணவர்கள் அறிந்து கொள்ளுதல் நல்லது. இதனுல் கணிதத்தின் அமைப்பும் விந்தை யான கருத்துகளும், புதியன படைக்கும் ஆற்றலும், ஆர்வமும் மாணவர்கள் மனத்தில் பதிய வேண்டுமாயின் பாடத்துடன் கணித வரலாற்றையும் இணைத்துக் கற்பிப்பது அவசியம்.

கணிதம் முதன்முதலில் தனி மனிதனின் அடிப்படைத் தேவை களுக்காகத் தொடங்கிப் பின்னர்ச் சமூகத்தில் அவன் பங்குபெறப் பயன்பட்டது. இன்று மனிதப் பண்பாட்டின் வளர்ச்சிக்கே அடிப் படையில் அமைந்துள்ளது. கணித வரலாறு இதனை நன்கு விளக் கும். இக் கருத்து, கணிதப் பாடத் திட்டத்தை வரிசைப்படுத்தி அமைப்பதற்கும் மிகவும் பயனுள்ளதாய்க் காணப்படுகின்றது. பாடத்திட்டத்தில் வேண்டாதனவற்றை நீக்கவும், அவசியமான வற்றை ஏற்கவும் கணித வரலாறு மிகவும் பயன்படுகின்றது. கணித வரலாறு அறிந்த ஓர் ஆசிரியர் தம் கணிதப் பாடங் கற்பித்தலுக் கேற்ற நோக்கங்களைப் பொருத்தமான முறையில் வகுத்துக்

கொள்ள முடியும். கணிதம் பல்வேறு வளர்ச்சிப் படிகளின் மூலம் வளர்ந்தே இந் நிலையை யடைந்துள்ளது என்பதையும் இனியும் வளரும் என்பதையும் கணித வரலாறே நமக்கு அறிவிக்கிறது.

கணித வரலாற்றை மாணவர்களுக்குக் கற்பிக்கப் பல வழிகளைக் கையாளலாம்:

(1) ஆசிரியர் கணித வரலாற்றையும், பற்பல நாடுகளின் நாகரிக வளர்ச்சியில் கணிதத்தின் பங்கையும், பாடத்தோடு தொடர்புடைய கணித மேதைகளைப் பற்றியும் நன்கு அறிந்திருத்தல் வேண்டும்.

(2) கணித வரலாற்றின் வளர்ச்சிப்படிகள் பலவற்றை மாணவர்கள் தாங்களாகவே படங்களாக வரைந்து வகுப்பறைச் சுவர்களில் மாட்டி வைக்கலாம். இங்ஙனம் வரைவது மாணவர்களுக்கு ஊக்கமளிக்கக் கூடிய நல்ல பொழுதுபோக்காகும்.

(3) கணித மேதைகளின் உருவப் படங்கள் கிடைக்குமாயின் அவற்றைத் தகுந்த குறிப்புகளுடன் வகுப்பறைகளில் மாட்டி வைக்கலாம்.

ஆறும் வகுப்பு மாணவர்களுக்கு இப்போதுள்ள எண்களின் வளர்ச்சிபற்றியும், வரலாற்றுக்கு முந்திய காலத்தில் மனிதன் பயன்படுத்திய கணக்கீட்டு முறைகள், தசமப் பின்னங்கள், எண்களுக்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்திய குறியீடுகள், கிரேக்கர்களின் எண்முறைகள் ஆகியவைபற்றியும் எடுத்துரைக்கலாம். பின்னர், மாணவர்கள் தசமப் பின்னங்களைப்பற்றிக் கற்கும் நிலை அடைந்த பிறகு இந்திய-அராபிய எண்களைப்பற்றியும், (இவ் வெண்கள் வாணிகத் தொடர்பு காரணமாக இந்தியர்களிடமிருந்து அராபியர்கள் பெற்றனவாகும்.) பூச்சியத்தின் தோற்றம் பற்றியும், எண்களின் இடமதிப்புப்பற்றியும், இவற்றின் விளைவால் எண் கணித முறைகளில் ஏற்பட்ட மாறுதல்கள் குறித்தும் முடிவாக 15ஆம் நூற்றாண்டில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட தசமப் புள்ளியைப் பற்றியும் கூறவேண்டும்.

பள்ளியின் நூலகத்தில் கணித வரலாற்றைப்பற்றிய முக்கியமான நூல்களை வாங்கி வைப்பதும் அவற்றை மாணவர்கள் பயன்படுத்தப் போதிய ஊக்கமும் உதவியும் செய்வதும் ஒவ்வொரு கணித ஆசிரியரின் முக்கியமான கடமைகளில் ஒன்றாகும்.

2. கணிதம் கற்பித்தலின் நோக்கங்கள்

பள்ளிக் கல்வியின் பல நிலைகளில் கணிதம் கற்பித்தலின் பொது நோக்கங்கள் (General Objectives)

தொடக்க நிலை : வகுப்புக்கள் I - V.

குறிக்கோள்கள் :

1. ஆரம்ப நிலையில் எண்களை அறிந்துகொள்ளுதல்; அதாவது எண்களைப் படிக்கவும், எழுதவும், எண்ணவும் அறிதல்.

2. எண்களின் இடமதிப்பைப்பற்றி அறிதல். எண்மானம் (numeration), எண்குறிப்பு (notation), பூச்சியத்தின் எண்மதிப்பு முதலியற்றை அறிதல்.

3. அடிப்படை எண் கணிதச் செயல் முறைகளில் பழக்கமும், ஆற்றலும் வளர்ப்பதால் வேகமும், திட்பமும் முன்னேறுதல்.

4. குறிகளைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட கணிதச் செயல் முறைகளைச் செய்தல்.

5. கீழ்க்கண்ட தொடர்புகளை அறிதல்.

(i) கூட்டலின் சுருக்கமே பெருக்கல்.

(ii) கழித்தலின் சுருக்கமே வகுத்தல்.

(iii) கூட்டலின் எதிர்நிலை கழித்தல்.

(iv) பெருக்கலின் எதிர்நிலை வகுத்தல்.

6. இயல்முறை எண்களினின்று வரிசை முறை எண்களை வேறுபடுத்தி அறிதல்.

7. தசமப் பின்னங்கள், சாதாரணப் பின்னங்கள் முதலியவற்றின் முக்கியத்துவத்தையும் பயன்களையும் அறிதல். பின்னம், தகாப் பின்னம், கலப்புப் பின்னம் முதலியற்றையும் அறிதல்.

8. வெவ்வேறு அளவை முறைகளை (நீட்டல், முகத்தல், நிறுத்தல் அளவைகள்) அறிதல்; அவற்றில் அலகுகளின் நடைமுறைப் பயன்களைத் தெரிந்துகொள்ளுதல்.

9. பொருள்களைப் பார்த்த மாத்திரத்திலேயே, அவற்றின் அளவுகளைத் தோராயமாக மதிப்பிட அறிதல்.

10. எளிய கணிப்புகளைப் பயன்படுத்திச் செய்யக் கூடிய விளுக்களை அறிந்து, பாகுபடுத்தி, விடுவிக்கும் திறனை வளர்த்தல்.

11. கணிதக் கலைச் சொற்றொடர்களான மொத்தம், மீதி, சமமாகப் பங்கிடுதல், பெருக்குதல் முதலானவற்றைப் புரிந்து செயற்படுதல்.

12. கணம், உட்கணம், வெற்றுக்கணம், சேர்ப்புக் கணம் முதலியவற்றை அறிதல்; ஒன்றுக்கொன்று, ஒத்தியைபுக் கருத்தை அறிதல் முதலியன ஆரம்பப் பள்ளிக் கணிதக் கல்வியின் நோக்கங்களாகும்.

நடுநிலைப் பள்ளி : வகுப்புகள் VI - VII.

குறிக்கோள்கள் :

1. மாணவர், கணிக்கும் திறமையை வளர்த்தல்.

2. கணிதக் கோட்பாடுகளின் பயன்களை அறிதல்.

3. குறியீட்டு முறையில் எழுதவும், அதைப் புரிந்துகொள்ளவும் திறமையை வளர்த்தல்.

4. சரிபார்க்கும் பழக்கத்தின்மூலம் தன்னம்பிக்கையை வளர்த்தல்.

5. பகுத்தறி முறையில் திறமையை வளர்த்தல்; நுட்பமாகக் கணிக்கும் திறமையை வளர்த்தல்.

6. 'பொதுவிதி' வடிவத்திற்கு மாற்றும் திறமையை வளர்த்தல்.

7. (i) அன்றாட வாழ்க்கையிலும், (ii) மேல் வகுப்பில் கற்கும் கணிதத்திற்காகவும், (iii) கணிதத்துடன் தொடர்புடைய மற்றப் பாடங்களை அறியவும் கணிதத் திறமையையும், மனப்பான்மையையும் வளர்த்தல்.

8. கீழ்க்கண்ட திறமைகளை வளர்த்தல் :

(i) சார்பு பலன் (function concept) மாற்றமும், சார்பு நிலையும் (Concept of dependence & Variation).

(ii) சராசரிகளைக் கணித்தல்.

(iii) நேர்விகிதச் சமம், எதிர்விகிதச் சமம்.

(iv) வாணிக முறைகளில் பயன்படும் கருத்துகள்.

(v) சதவீதங்களும் அவற்றின் பயன்முறைகளும்.

(vi) புள்ளியியல், வரைபடங்கள்.

(vii) பகு எண், பகா எண்களைப்பற்றிய அறிவு.

9. கணங்களும் அவற்றின் செயல் வகைகளும்.

10. அடிப்படை வடிவியல்—கோணங்களும், அவற்றின் வகைகளும், அவற்றை அளக்கும் முறையும், இணைகோடுகளும், அவற்றின் பண்புகளும் அறிதல்.

11. பரப்பளவின் கருத்து—சதுரம், செவ்வகம் (ஏர். ஹெக்டேர்), வட்டத்தின் பரப்பு முதலியவற்றை அறிதல்.

12. கன உருவங்களை அடையாளம் கண்டுகொள்ளவும் அவற்றின் பெயரைத் தெரிந்துகொள்ளவும்—கனசதுரம், கனச் செவ்வகம், பட்டகம், கூம்பு, உருளை, கோளம் முதலியன.

13. கன அளவைகளை அறிதல்—1 கன செ.மீட்டருக்கும், ஒரு லிட்டருக்குமுள்ள உறவு, செவ்வக வடிவப் பாத்திரங்களின் அளவுகளை அறிதல்.

உயர்நிலைப் பள்ளி : வகுப்புகள் IX - XI.

குறிக்கோள்கள் :

1. குறிப்பிட்ட சில கணிதக் கருத்துகளையும், முறைகளையும், அவற்றின் தொடர்புகளையும்பற்றி அறிதல். (உதாரணமாக, நேரமும் தூரமும், சார்பு வேகம், விலகும் வேகம், நெருங்கும் வேகம் போன்றன.)

2. எண் கணிதத்தில் கணிக்கும் முறைகள், இயற்கணிதத்தில் காரணிப்படுத்தல். வடிவியலில் கருவிகளைப் பயன்படுத்தி வரைதல் முதலான உயர்ந்த திறமைகளை வளர்த்தல்.

3. ஒவ்வொரு பாடப் பகுதிகளிலும் சிக்கல்களைத் தீர்க்கும் ஆற்றலைப் பெறவும், கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தும் திறனை அதாவது திட்டவட்டமாக விவாதிக்கவும், வளர்ப்பது.

4. அந்தந்தப் பகுதியிலுள்ள பாடப் பொருளின் முக்கியத்துவத்தையும் பயனையும் உணர்தல்.

5. கணிதத்தில் ஆர்வமும், மென்மேலும் படிப்பதற்கு ஆசையும் வளரும்வகையில் பாடப் பகுதிகளில் கவனம் செலுத்துதல்.

6. பயன்தரும் முறையில் படிக்கும் பழக்கத்தை வளர்த்தல்.

சிறப்பு நோக்கங்கள்

1. அளவுகளுக்கும், பரிமாணங்களுக்குமுள்ள தொடர்பைப் புரிந்து பகுத்து ஆராயவும், அவற்றிலிருந்து தத்துவ முறையில் முடிவுகளைத் தீர்மானிக்கவும் — தகவல்களை முறைப்படுத்தவும், சிக்கல்களைத் தீர்க்கும் நோக்கத்துடன் அவற்றை ஆராயவும்.

2. தேவைகளையும் பயன்களையும் முன்னிட்டு, புள்ளியியல் அல்லது வரைபட வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களைப் படிக்கவும், அவற்றின் உட்பொருளை அறியவும் அவற்றை முறைப்படுத்தவும்.

3. கணிதக் குறியீடுகளைக் கண்டுகொள்ளவும், அவற்றை அறிந்து பயன்படுத்தவும் (உதாரணமாக $\sqrt{n}$, a^4, — 7).

4. அன்றாட வாழ்க்கைக்குத் தேவையான முறையிலும், மேல்வகுப்புகளில் அவசியமான கணித அறிவிற்குத் தேவையான முறையிலும், கணிதத் தொடர்புடைய மற்றப் பாடங்களில் தேவைப்படும் முறையிலும் கணிதத்தைக் கற்றல்.

5. கணிதத்தை அதன் மேலுள்ள ஈடுபாட்டினால் மட்டுமே விரும்பிப் படிக்கும் விதத்தில் மாணவர்களுக்கு வசதிகள் அமைத்துக் கொடுக்கப்படுதல் முதலியன, உயர்நிலைப்பள்ளிக் கணிதப் பாடத்தின் நோக்கங்களாய் அமையவேண்டும்.

கணிதம் கற்பித்தலின் பயன்கள்

மற்றப் பள்ளிப் பாடங்களைக் காட்டிலும் கணிதத்தில் நினைவாற்றலை விட ஆய்வுத் திறனை அதிகமாகப் பயன்படுத்த வேண்டியிருக்கிறது. இதுவே கணிதம் கற்பதற்கான முதன்மையான முக்கியத்துவமாகும். கணிதத்தில் சொற்களையும், சொற்றொடர்களையும் திரும்பத் திரும்பக் கூறுவதனால் மாணவர்களின் அறியாமையை இப் பாடத்தில் மறைத்துவிட முடியாது. மாணவனொருவன் கணிதத்தில் வல்லவனாக வேண்டுமென்றால் அவன் திருத்தமாகச் சிந்திக்கவும், செயல்படவும் வேண்டும்.

'Mathematics is primarily taught on account of the mental training it affords, and only secondarily on account of the knowledge of facts it imparts. The true end of Mathematical teaching is power and not knowledge.' —*Schultze*

செயல்முறைப் பயன்கள் (Practical values)

செயல்முறை முக்கியத்துவத்திற்காகக் கணிதம் கற்பிக்கப்படுகிறது. ஆரம்ப எண் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகளைக் கூட அறியாமல் வெகு சிலரே வெற்றிகரமாகக் காலம் கடத்தலாம். நம்முடைய இன்றைய நாகரிகத்தின் தனித் தன்மை கணிதத்திற்கு மறைமுகமாகக் கடமைப்பட்டுள்ளது. நவீன எண்ணங்களும் வாழ்க்கைத் தன்மையும், கணிதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டமைந்த அறிவியல் வளர்ச்சிக்கும், தொழில் நுட்பக் கலைகளுக்கும் கடன்பட்டுள்ளன.

கணிதம் அறிவியல்கள் அனைத்திலும் தலைசிறந்ததாகும். கணித அறிவில்லாமல் அறிவியலை அறிந்துகொள்ள இயலாது. நம் வாழ்க்கையின் ஒவ்வொரு படியிலும் கணிதம் கூடவே வருகின்றது. பொதுவாகக் கணிதத்தின் தன்மையையும், விகிதம், சதவீதம், வேகம் முதலியவற்றையும், எழுத்துக் கணிதம், வடிவியல், கோண கணிதம் ஆகியவற்றைப்பற்றி மக்கள் பேசும்போது அவற்றின் பொருளை மாணவர்கள் அறிந்திருப்பது நன்று. செய்தித் தாள்களிலும், பத்திரிகைகளிலும் வெளிவரும் வானவெளி அல்லது கப்பல் போக்குவரத்து, வானொலி, டெலிவிஷன், தொழில் நுட்பம் தொடர்பான விளம்பரங்களிலுள்ள எளிய சூத்திரங்களையும், வரைபடங்களையும் ஒருவன் புரிந்துகொள்ள முடியாமல் போகும் போது, வாழ்வெனும் படியில் ஆற்றலின்றி இருப்பதை உணருவான். ஆகவே, மாணவர்கள் கணிதம் பயில வேண்டியதன் நோக்கம் அவர்கள் அறிவியலைத் தெரிந்துகொள்ளவும், தேவைக்கேற்றவாறும், சுவைக்காகவும், அறிவியல் துறைகளை மென்மேலும் அறிவதற்குமேயாகும். அறிவியலின் எந்தப் பிரிவுமே கணித முறைகளைக் கொண்டிராமல் இல்லை. பற்பல அளவீடுகளும், அவற்றில் பயன்படுத்தப்படும் கணக்கீடு முறைகளும் அறிவியலோடு பின்னப்பட்டிருக்கின்றன. கலீலியோவின் கணித வாதங்களிலிருந்தும் சிரத்தையோடு அவர் எடுத்த அளவீடுகளிலிருந்தும் உருவானதே இன்றைய இயற்பியலாகும். அவ்வாறே லவாய்சியருடைய (Lavoisier) அளவறி பகுப்புகளிலிருந்து (quantitative analysis) இன்றைய வேதியியல் உருவாக்கப் பட்டது. இதயத்தின் பரிமாணம், இரத்த ஓட்டம்பற்றிய ஹார்வியின் கணக்கீடுகளாலும், அளவீடுகளாலும் இன்றைய உடலியல் உரு

வாகியுள்ளது. பொருள்களின் இயக்கங்களைக் கூர்ந்து கவனித்து வந்த நியூட்டன் சில கணிப்பு முறைகளின் தேவையை முன்னிட்டு நுண்ணியலைக் கண்டுபிடித்தார். இயற்பியல் (Physics) நிபுணர்களுக்கு உயர்கணிதத்தில் முழுமையான பயிற்சி அளிக்க வேண்டும். உயிரியல் விஞ்ஞானிகள், உடல்நூல், பாரம்பரியக் கோட்பாடுகள், மருத்துவம், பொதுநலத் துறை போன்றனவற்றில் கணித முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறார்கள்.

மனிதனுடைய வாழ்க்கை நடவடிக்கைகளில் புள்ளிவிவரங்கள் முக்கிய இடம் வகிக்கின்றன. உடல்நலம், சமூக வாழ்வு, தொழில், கல்வி சம்பந்தமான பிரச்சினைகளை நன்ருகப் புரிந்துகொள்ளவும் கணிதமானது பயன்படுகிறது. எண்ணற்ற புள்ளிவிவரங்களை ஒரே கண்ணோட்டத்தில் தெளிவாகப் புரியும்படி செய்யக் கணிதம் பயன்படுகிறது.

பணம் சம்பந்தப்பட்டவற்றில் ஆர்வமுள்ள மனிதனுக்கு அடிப்படைக் கணிதம் முக்கியமானதொரு கருவியாக விளங்குகின்றது. மேலும், புத்திக்கூர்மையுள்ள குடிமகனுக்குரிய உரிமைகளையும், கட்டுப்பாடுகளையும் புரிந்துகொள்ளுதற்கும் கணிதம் அத்தியாவசியமாகின்றது. எனவே, வரலாற்றுக் காலந்தொட்டு பொதுக் கல்வியில் கணிதத்தை ஒரு முக்கியமான பகுதியாகச் சேர்த்திருக்கின்ருர்கள்.

வாழ்க்கைப் பயன்கள் அல்லது சமுதாயப் பயன்கள் (Social values)

தனி மனிதனுக்குக் கணித அறிவின் முக்கியத்துவம்: பிறரோடு தொடர்புகொள்வதற்கு எண்கள் சிறந்த வழிவகைகளாக விளங்குகின்றன. கணிதத்தின் அடிப்படையான எண்களையும், உருவங்களையும், கையாளும் திறமை மனிதனுக்கு எப்பொழுதுமே அவசியமாக இருந்துவந்திருக்கின்றது. அன்ருட வாழ்க்கைக்கும் எண் கணித, இயற்கணித முறைகளில் ஓரளவு ஆற்றல் தேவையாக உள்ளது. உதாரணமாக, நாம் தினந்தோறும் செய்கின்ற கொடுக்கல், வாங்கல், பணத்தை எண்ணுதல், நேரத்தை அறிதல், நாட்காட்டியைப் பயன்படுத்தல், விளையாடும் இடங்கள் அமைத்தல், வரவு செலவுக் கணக்கு வைத்துக் கொண்டிருத்தல், வரிகளைக் கணக்கிடுதல் போன்ற செயல்களில் கணிதத்தைப் பயன்படுத்துகிருேம்.

தற்காலத்திய சமூகத்தில் அடிப்படை எண்கணித அறிவை விட அதிகமான கணித அறிவு தேவைப்படுகின்றது. சில பொருள்களை ரொக்கமாக வாங்கக்கூடிய நிலையில் உள்ளோமா,

அல்லது தவணை முறையில் வாங்குவது சிறந்ததா, வீட்டை விலைக்கு வாங்குவது சிறந்ததா, அல்லது வாடகை வீட்டில் இருப்பது சிக்கனமானதா என்பவை போன்ற பிரச்சினைகளை ஆய்ந்து முடிவெடுப்பதற்குக் கணித அறிவும், திறனும் தேவை. வரிகள் எவ்வாறு வசூலிக்கப்படுகின்றன வென்றும், முதலீடுகள் திருப்பிக் கொடுக்கும்போது எவ்வாறு கணக்கிடப் படுகின்றன வென்றும், சராசரியை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கிறோம் என்றும், வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டு எண் (Cost of living index) எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கிறோமென்றும் தெரிந்துகொள்வதற்குக் கணித அறிவு தேவை. வாழ்க்கைப் பிரச்சினைகள் பலவற்றையும், பொருளாதாரச் சமூக அடிப்படையிலேயே நோக்குகிறோம். வாழ்க்கைத் தரம் உயர்ந்துள்ளதா, அல்லது தாழ்ந்துள்ளதா என்பதையும், தனிப்பட்டோர் வருமானங்கள், உற்பத்தி போன்றனவற்றின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்பட்ட வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டு எண்களைப் புரிந்துகொள்ள முடியாமல் வயதுவந்தோரும் தவிக்கின்றனர். இவ்வாறு சமூகத்தைப்பற்றிய தகவல்களை அறிந்து கொள்ள, கணிதமானது பல வழிகளில் பயன்படுகின்றது. தொடர்ந்து மாறிவரும் நம்முடைய அறிவியல் சமுதாயத்தின் சிறந்த குடிமகனாக விளங்க விரும்புவோரின் அன்றாடக் கணிதத் தேவைகளை ஆசிரியர் கவனத்தில்கொண்டு கற்பிக்கவேண்டும்.

பொறியியல் துறைகளில் கணிதத்தின் பயன்களை வரையறுத்துக் கூற முடியாது. உதாரணமாக, ஒரு கட்டடப் பொறியியல் நிபுணர் 50 அடுக்கு மாடிக் கட்டடத்தில் ஒரு குறித்த அளவுள்ள தூண் அல்லது உத்திரம் அமைக்க விரும்பினால், அது கொடுக்கப்பட்டுள்ள பாரத்தைச் சுமக்க முடியுமா என்பதைக் கட்டடம் கட்டத் தொடங்கு முன்னரே கணித வாய்பாடுகளையும், சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்திக் கணக்கிடாமல் இருப்பாரோ? அண்மைக் கால அறிவியல் வளர்ச்சியின் விளைவுகளான தொலைக் காட்சி (டெலிவிஷன்கள்), ஜெட் விமானங்கள், விண்வெளிச் செயற்கைக் கோள்கள் போன்றனவற்றை நாம் பயன்படுத்துகிறோம். விமானத்தின் சிறப்பான அமைப்பைத் (design) தீர்மானிக்கவும், விமானம் எவ்வளவு வலுவுள்ளதாக இருக்கவேண்டும் என்பதை முடிவெடுக்கவும் கணித முறைகள் உதவுகின்றன.

வானொலி, ரேடார் சாதனங்களைத் தயாரிக்கவும், விமானங்களுக்கு வழிகாட்டவும், மற்ற விமானங்களோடும், விமானத் தளங்களோடும் தொடர்பு கொள்ளவும் (செய்திகள் அனுப்பவும்) கணித முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எவ்விதமான தொழிற்சாலைகளிலும், தயாரிக்கப்பட்ட பொருள்களின் நம்பகத்

தினைக் (reliability), கணித்துக் கூறக் கணிதம் உதவுகின்றது. தொழில்துறையிலும். கணிதம் பலவாறு பயன்படுகின்றது. அதாவது, உற்பத்தியின் அளவு, எப்பொழுது உற்பத்தி செய்ய வேண்டும், கூடுதல்நேர ஊதியத்தைக் குறைப்பது எப்படி, என்பன போன்ற பிரச்சினைகளில் கணித அறிவு பயன்படுகின்றது.

கணக்கியலில் வல்லுநராக இல்லாமலிருப்பினும் பெரும் பாலோர் அன்றாட வாழ்க்கையில் கணிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டிய நிலை ஏற்படுகின்றது. முக்கியமாகப் பொறியியல் நிபுணர்களுக்கும், இயற்பியலார்களுக்கும் (physicist), கணித அறிவு இன்றியமையாததாகும். புவியியல், மருத்துவயியல், உள வியல், நிலவியல், தொழில் நிர்வாகம் ஆகியவற்றிலும், கணித ஆய்வையும், கணிதத்தின் பல செயல் முறைகளையும் பயன்படுத்து கிறார்கள். கணக்கிலும், கணிப்பதிலும் தேர்ந்தவர்களையே தொழில், வர்த்தகத்துறைகளில் வேலையிலிறுத்த விரும்புகின்றனர், கணிக்கும் இயந்திரங்களை (electronic computers) இய்க்க அமர்த்து கின்றனர்.

இவ்வாறாக இன்றைய வாழ்க்கையின் நிலைகளை அறிந்து கொள்ளவும், அவற்றைப் பாராட்டும் குடிமகனாக வாழவும் ஒவ் வொருவருக்கும் நல்ல கணித அறிவு தேவையாகும்.

ஒழுக்கப் பயிற்சிப் பயன்கள் (Disciplinary Values)

'Learn arithmetic,' the child was advised, 'For it will teach you to analyse a situation, to come to a decision, to cheek your thinking, and its result, to perceive relationships, to concentrate, to be accurate, and to perform written work systematically and neatly'.—*Paul Klapper*

கணிதக் கருத்துகளை அறிந்துகொள்வதைக் காட்டிலும் கணித முறைகளில் திறனை வளர்த்துக்கொள்வதே கணிதம் கற்பதன் முக்கிய நோக்கமாகும். உயர்ந்த கணிதக் கருத்துகளை மட்டும் அறிந்தவன் நல்ல கணித வல்லுநனாகமாட்டான். ஆனால், கணித உண்மைகளைப் புத்திக்கூர்மையோடு பயன்படுத்திக் கொள் கிறவன் எவனோ, புதிய கணித உண்மைகளைக் கண்டுபிடிக்கிறவன் எவனோ, அல்லது, மறந்துபோன பல கருத்துகளையும் மறுபடியும் அமைக்கும் ஆற்றல் பெற்றவன் எவனோ அவனே நல்ல கணித ஆற்றல் படைத்தவனாவான். கணிதத் திறமையானது கணித அறிவன்று, அதனைப் பயன்படுத்தும் ஆற்றலேயாகும். உதாரண மாக, வர்க்க மூலம் காணும் முறையையும், அதமப் பொதுமடங்கு கண்டுபிடிக்கும் வழியையும் மறந்துபோகலாம். ஆனால், இவற்றைக்

கற்றுக்கொள்ளும்போது ஏற்பட்ட நற்பழக்கங்களாகிய சிந்தித்தல், கருத்தை ஒருமுகப்படுத்துதல், திருத்தமாகச் செயற்படல் போன்றனவற்றை என்றும் மறக்கமுடியாது.

பொது விதிகளைத் தொகுத்தறிவதற்கும், கருத்தியலானவற்றைச் சிந்திப்பதற்கும் இயற்கணிதம் நம் மனத்தைப் பழக்குகின்றது. எண்கணிதத்தில் வளர்ந்த சிந்தனையாற்றல் இயற்கணிதத்தைப் புரிந்துகொள்வதற்கும் கணிதத் தொடர்பான அறிவியலில் சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதற்கும் உதவுகின்றது.

பிரச்சினைக்குரிய ஆதாரங்களிலிருந்து சரியான முடிவைத் தருக்க முறையில் காணுவதற்கு யூக்ளிடின் வடிவியல் முறை பழக்குகிறது. கருத்தியல் ஆய்வு முறையும், பகுத்தறி ஆய்வு முறையும் எல்லோருக்கும் எக்காலத்திலும் பயன்தருபவையாகும்.

மனத்திற்குப் பயிற்சியளிப்பதற்கு எண்கணிதம் சிறந்த அடிப்படையாகும். ஏனெனில்,

1. இதன் செயல்முறைகள் (operations) பகுத்தறிவாய்வுக்கு எளிய உதாரணங்களாகும். அதே சமயத்தில் திறமை வாய்ந்த போதனையால் விதிகளைக் கற்பது தொகுத்தறி திறனுக்கு நல்ல பயிற்சியாகும்.

2. செயல்முறைகளைக் காரண காரியத்தோடு தொடர்புபடுத்தி அமைக்கும் திறனை வளர்க்க உதவுகிறது.

3. தன்னம்பிக்கையை வளர்க்கிறது.

4. சுய சிந்தனைக்கு வழிவகுக்கிறது. மற்றப் பாடங்களில் பிறர் அறிந்த மெய்க்கூற்றுகளும் கருத்துகளும், திரும்பவும் அப்படியே கூறும்விதத்தில் சேகரிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, அப்பாடங்களில் நினைவாற்றல் முக்கியமான நிலையைக் கொண்டிருக்கிறது. ஆனால், கணிதத்தில் சுயசிந்தனையும் புத்திக்கூர்மையுடன் ஆராயும் ஆற்றலுமே தேவையான திறமைகளாகும்.

காரண காரியங்களை ஆய்வதில் பயிற்சியைக் கொடுக்கும் நோக்கத்துடனேயே உயர்நிலைப் பள்ளியில் கணிதம் போதிக்கப்படுகின்றது. மேலும், ஒழுங்கான பழக்கவழக்கங்களில் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சி அளிக்கப்படுகிறது. சில கடினமான சிக்கல்களைத் தீர்ப்பது மாணவனுக்குப் புதிய கண்டுபிடிப்புப் போன்றதாகும். கணிதம் எளிதான செயல்முறைகளில் தொடங்கி, படிப்படியாகக் கடினமான செயல்முறைகளுக்கு மாணவர்களைப் பழக்கப்படுத்துகிறது. அம் மாதிரியான சிக்கல்களைத் தீர்க்கும் செயலில் அதிகப் பழக்கம் ஏற்படும்போது, அவை மனத்திறமைகளை வளர்ப்பதோடு,

புதிதாகக் கண்டுபிடிக்கவும், ஆராயவும் வழிவகுக்கின்றன. புத்திக்கூர்மையோடும், தெளிவோடும், விவேகத்தோடும், செயற்பட எண்கணிதம் மனத்தைப் பக்குவப்படுத்துகிறது. இவ்வகையான சிந்தனைப் பழக்கம், வாழ்வில் நமக்கேற்படும் சிக்கல்களுக்குத் தீர்வுகாணப் பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

கணிதத்தில் ஒருவனுக்கு உள்ளதிறன், அனைத்துத் திறன்களின் தொகுதியே என்று ஆய்வுகள் காட்டியுள்ளன. எண் கணிதத்தில் திறமையானவர்கள், கூர்மையான புத்தியுள்ளவர்களாயிருப்பதோடு பொதுவாக மற்றப் பாடங்களிலும் தேர்ந்தவர்களாயிருப்பார்கள்.

பண்பாட்டுப் பயன்கள் (cultural values)

உலகப் பண்பாட்டு வரலாற்றிலே கணிதத்தின் முக்கியத்துவத்தை யாரும் மறுக்கமுடியாது. ஏறத்தாழ நாலாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு மேலாகக் கணிதம் நம்முடைய பண்பாட்டு வளர்ச்சியில் பங்குகொண்டுள்ளது.

சமுதாயத்தில் கல்வியின் நோக்கங்கள் ஒவ்வொரு காலத்திலும் ஒவ்வொரு விதமாக இருந்துவருகின்றது. இவற்றை முடிந்த அளவு நிறைவேற்றுவது கணிதம் கற்போரின் முக்கியமான கடமையாகும். அறிவியலும், அறிவியல் முறைகளும் மென்மேலும் முக்கியத்துவம் பெற்றுவரும் நம் சமுதாயத்தில் எண்களைப் பயன்படுத்துவதில் நல்ல தேர்ச்சியும், அடிப்படைக் கணித முறைகளில் ஆற்றலும் அளிப்பது கல்விமுறையின் முக்கிய நோக்கமாகும். மனித நாகரிக வளர்ச்சியில் கணிதம் கொண்டுள்ள முக்கியமான பங்கைப்பற்றி அறிந்துகொள்வதிலேயே ஒரு சிறந்த பண்பாட்டுப் பயன் உள்ளது. ஹாக்பன் என்ற கணிதமேதை 'கணிதம் நாகரிகத்தைப் பிரதிபலிக்கும் கண்ணுடி' (Mathematics is the mirror of civilization) என்று கூறுகிறுர். நாகரிகம் மேலும் வளர்வதற்குக் கணித அறிவு இன்றியமையாததாகும். பல புதிய அறிவியல் கண்டுபிடிப்புகள் கணித அடிப்படையில் தோன்றிக் கணிதத்தைச் சார்ந்தே வளர்ந்தும் வந்துள்ளன. நம்முடைய முன்னோர்களுக்கு எண்ணவும், அளக்கவும், கணக்கிடவும் தேவை ஏற்பட்டபோது கணிதம் தோன்றியது. தொடர்ந்துவந்த சந்ததியினர், முன்னோர் கண்டுபிடித்தவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு மேலும் பல புதிய கணிதமுறைகளைப் பெரும்பாலும் தேவையை முன்னிட்டே கண்டுபிடித்தனர். நம்முடைய சுற்றுப்புறத்தைப்பற்றித் தெரிந்துகொள்வதற்குக் கணித அறிவு தேவை. கணித மேதையான பிதாகரஸ், எண் கணிதம் என்பது வெறும் கணக்கீட்டை மட்டும் குறிப்பதன்று என்று உணர்ந்தார். இவர்,

"Gymnastics music, and mathematics, these were the three grades of educational curriculum. By the first, the pupil was strengthened; by the second, purified; by the third perfected and made ready for the society of the Gods'' என்று எண்ணினர்.

வாணிகத் துறையிலும், சொத்து மதிப்புகளைக் கணிப்பதிலுமே பயன்பட்டு வந்த கணித முறைகள், அறிவியல் வளர்ச்சிக்குந் தேவைப்பட்டன. மருத்துவ முறைகளில்கூட, பெரும்பாலும் கணிதக் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியே நோய்களைக் கண்டுபிடித்தனர் (இரத்த பரிசோதனைகள்). எனவே, கணிதத்தின் பண்பாட்டு முக்கியத்துவத்தையும் உணர்ந்து கணிதப் படிப்பைத் திட்டமிட வேண்டும். நம்முடைய நாகரிக வளர்ச்சியில் கணிதம் கொண்டுள்ள பங்கை உணர்ந்து பாராட்ட வேண்டும். நம்முடைய தற்கால நாகரிகமானது இயற்கைச் சக்திகளையும், அறிவின் ஆழத்தையும் சார்ந்துதான் இருக்கிறது என்று கூறுவோமானல் இதற்கு உண்மையான அடிப்படை, கணிதம் சார்ந்த அறிவியலேயாகும்.

முடிவுரை

நம்முடைய அன்றாட வாழ்க்கையிலும் அறிவியல் முறைகளிலும். பொழுதுபோக்குகளிலும், மொத்தத்தில் வாழ்வின் பல துறைகளிலும் கணிதம் முக்கிய இடம் வகித்த போதிலும், கணிதத்தை அதன் உள்ளார்ந்த பண்புகளுக்காகத் தொடர்ந்து படிக்கலாம் என்பதை மறந்துவிடக் கூடாது. சிற்பம், சித்திரம், இசை முதலியவற்றைப் போல் கணிதமும் அதில் ஆர்வமும் விருப்பமும் உள்ளவர்களுக்கு இன்பம் பயப்பதாகும்.

1. எழுதவும், படிக்கவும் தேவையான அறிவைப் போன்று கணித அறிவும் ஒவ்வொருவருக்கும் இன்றியமையாததாகும். வாங்குதல், விற்றல், செலவுசெய்தல் போன்ற அன்றாட வாழ்க்கைத் தேவைகளுக்கு நடைமுறை எண் கணித அறிவு தேவைப்படுவதால், எந்தக் கல்வி ஏற்பாட்டிலும் கணிதம் சேர்க்கப்பட்டிருக்கிறது.

2. பலவிதமான வேலைகளுக்கும், தொழில்களுக்கும், கணித அறிவு தேவைப்படுகின்றது. பொறியியலார், மாலுமிகள், நில அளவாய்வாளர், பணம் கொடுக்கல் வாங்கல் செய்வோர், வரவு செலவுக் கணக்குகளைத் தணிக்கை செய்வோர், கணக்கர்கள், கட்டடக்கலை நிபுணர்கள், கணித ஆசிரியர் போன்ற யாவருக்கும் கணித அறிவு தேவைப்படுகின்றது. ஒருவன் எந்த நிலையில் பள்ளியைவிட்டுச் சென்றாலும், அவன் மேற்கொள்ளக் கூடிய

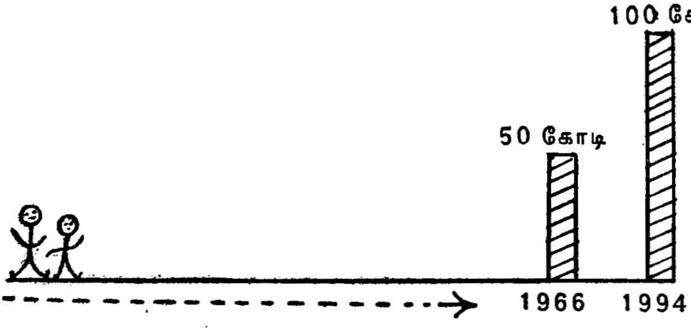
வேலையில் அவன் அதுகாறும் பெற்ற கணித அறிவைப் பயன் படுத்த இயலும்.

3. நம்முடைய சமுதாயத்தின் அமைப்பு, அறிவியல், தொழில் நுட்ப (Technical) அறிவுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது. ஆனால், இவையெல்லாம் கணிதத்தையே சார்ந்தவை யாதலால், உயர்நிலைக் கணித அறிவு பெறாமல் அறிவியலில் முன் னேற்றம் அடைய முடியாது.

4. கணிதப் படிப்பு. கூரிய அறிவுத் திறனை வளர்க்கின்றது. வாழ்க்கையில் பலவிதமான சந்தர்ப்பங்களில் தேவைப்படும் ஆய்வறிதிறனைக் கணிதப் படிப்பு வளர்க்கின்றது. மேலும், சிந்திக்கும் திறனை வளர்ப்பதிலும், கருத்துகளைச் சுருக்கிக் கூறி விளங்கவைப்பதிலும் கணித முறைகள் சிறந்த பயிற்சியளிக் கின்றன. உதாரணமாக, நம் நாட்டின் 'மக்கள்தொகை வெடிப்பைக்' கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து தெரிந்துகொள்ள லாம்.

(i) ஒவ்வோர் ஒன்றரை வினாடிக்கும் ஒவ்வொரு குழந்தை, ஒவ்வொரு தினமும் 57,000 பிறப்பு. ஒவ்வோர் ஆண்டும் 2 கோடியே 10 இலட்சம் பிறப்பு.

(ii) 1921-ல் பிறப்பு விகிதம் 1,000-க்கு 49, இறப்பு விகிதம் 1,000-க்கு 48. இன்று பிறப்பு விகிதம் 1,000-க்கு 39, இறப்பு விகிதம் 1,000-க்கு 14.



படம் 3

(iii) மக்கள்தொகை எவ்வளவு விரைவாகப் பெருகிவரு கிறது என்பதைப் படம் 3 காட்டுகிறது.

3. பாடப்பொருளும் அமைப்பும்

பாடப் பொருள்
(Content)

நற்காலப் போக்கு (Modern trend): கணிதம் கற்பது அறிவைப் பயன்படுத்தி இயங்குகின்ற ஒருகடும் செயல்முறையாகும். ஆகவே, பாடத் திட்டமும் இவ்வித இயங்கு சக்தியைப் பிரதிபலிக்க வேண்டும். கணிதம் ஒரு வளர்ந்துவரும் பாடப்பகுதியாக அமைக் கப்படல் வேண்டும். கற்கால மனிதன் தான் வேட்டையாடிய விலங்குகளை எண்ணுவதற்குக் கற்றுக்கொண்ட, வரலாற்றுக்கு முற் பட்ட காலத்திலிருந்து, திங்களுக்கும், கோள்களுக்கும் செலுத்தப் படும் விண்வெளி விமானங்களின் இயக்கத்தைக் கணிப்பதற்கான மிகச் சிக்கலான கணிப்புகள் வரை, கணிதம் வளர்ந்துகொண்டே வந்திருக்கின்றது. இப்போதும் அறிவியல், பொறியியல் துறை களின் முதுகெலும்பு போன்றது உயர் கணிதம். எண்பதுக்கும் மேற்பட்ட கிளைகளாகப் பிரிந்து வளர்ந்து பயன் தரும் கணிதம், இன்னும் வளரும்.

கணிதத்தை, வெறும் விதிகளின் திரட்டு என்றோ, இவற்றைச் சிந்தனையாற்றல் சிறிதுமின்றிக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் பயன்படுத்தி விடைகள் காண்பதுதான் கணிதத்தின் நோக்கம் என்றோ மாணவர்கள் நினைக்கும்படி பாடப்பகுதிகளை அமைக்கக் கூடாது.

கணிதத்தின் முக்கியமான சிறப்பே அதன் வாத முறை கள்தாம்; தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட கோட்பாடுகளை மைய மாகக் கொண்டுதான் பலவிதமான முடிவுகளும் தருக்கித்து முடிவு செய்யப்படுகின்றன.

தத்தம் போதனைக்காக எடுத்துக்கொள்ளும் மூலப் பொருள் களின் கருத்தைப்பற்றி ஆசிரியர்கள் மிகுந்த கவனமாயிருக்க வேண்டும். நம்முடைய சிக்கலான நவீனச் சமுதாய வாழ்க்கையை வளப்படுத்துவதற்கான முயற்சியில் கணிதம் பங்கு கொள்ளா விடில் பள்ளிப் பாடத்திட்டத்தில் அதற்கு இடம் இருப்பதில் அருத்தமில்லை. எந்தப் பாடத்தையும், அது என்ன குறிக்

கோளுடன் பாடமாகக் கற்றுத்தரப்படுகின்றது என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டுதான் அதற்கான பாடத்திட்டத்தை (Curriculum) வகுக்கவேண்டும்.

நல்ல நெறி முறைகளை வளர்க்கும் என்ற பயனைமட்டும் கருதிக் கணிதத்தில் எந்தப் பகுதியையும் சேர்க்க வேண்டியதில்லை. கணிதத்தைக் கற்றுக்கொடுக்கும் விதத்தில்தான் இதன் கட்டுப் பாடும், நெறி முறைகளும் தெரியவேண்டும். கணிதத்தின் எந்த ஒரு பகுதியைக் கற்பித்தாலும் இந்தப் பயனை அடையமுடியும்.

வெகுகாலமாகவே கணிதத்தை ஒழுங்குப் பயிற்சிக்காகவே (theory of mental discipline) கருதிக் கற்பித்து வந்தனர். இதற்காகப் பல பயனற்ற, கவர்ச்சியற்ற, சிக்கலான புதிர்க்கணக்குகள் மாணவர்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டன. மாணவர்களுக்குப் பாடத்தில் ஆர்வம் குன்றியதுமன்றி அநேகர் எதிர்பார்த்த செயல் திறமையும் அடையவில்லை. எனவே, பாடத்திட்டங்களிலும், கல்வி முறைகளிலும் அதிருப்தி வளர்ந்தது.

ஆனல், தற்காலத்தில், நடைமுறைக்கேற்ற, பயனுள்ள அறிவை மாணவருக்குப் புகட்டுவதே கல்வியின் முக்கிய நோக்க மாகும். பயனுள்ள பல உண்மைகளைப்பற்றி அறிந்துகொள்ளு வதற்குக் கிடைக்கும் கால அளவோ, மிகக்குறைவு; இதில் தேவை யற்ற, கவர்ச்சியுமற்ற சிக்கல்களை விடுவிக்கப் பணிப்பது மாணவர் களின் நேரத்தை வீணுக்குவதாகும். மேலும், வாழ்க்கைக்குத் தொடர்பில்லாத, இயற்கைக்கும் முரணுன பல கணக்குகள் மாணவர் மனத்தில் வெறுப்பை வளர்க்க இடமுண்டு.

உதாரணமாக, 1872 ஆம் ஆண்டு மெட்ரிக் தேர்வில் கீழ்க் கண்ட கணக்குக் கொடுக்கப்பட்டது.

$$\frac{2}{9} \div \left\{ \frac{\frac{28}{81} \text{ல்} \frac{1}{9\frac{1}{3}}}{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}} \right\} - \frac{1}{3} \text{ல்} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \text{ல்} \frac{1}{3 - \frac{1}{1-\frac{2}{9}}} \right\}$$

இம் மாதிரியான ஒரு கணக்கைத் தீர்க்கும் சூழ்நிலை வாழ்க்கை யில் ஏற்படுவது அரிது. ஆகவே, அறிவு பயனுள்ளதாக இருக்க வேண்டும் என்பது கற்பிப்பதற்கான மூலப் பொருளைத் தேர்ந் தெடுப்பதன் அடிப்படையாக அமையவேண்டும். ஆனல், மாணவர் களின் தேவைகளும் குறிக்கோள்களும் ஒரே மாதிரியானவையல்ல; உதாரணமாக, கல்லூரியில் உயர்கணிதம் கற்க விரும்பும் மாணவ னுக்கு இயற்கணிதம், வடிவகணிதம், கோணகணிதம் முதலியவை

தேவை. வாணிகம் செய்ய விரும்பும் மாணவனுக்கு வாணிகக் கணக்கு முறைகள் தேவை. பள்ளிப்படிப்பு முடிந்தவுடன் வீட்டைக் கவனித்துக்கொள்ளப் போகும் பெண்ணுக்கு வீட்டு வரவு செலவுகளைக் கணக்கிட வேண்டிய அடிப்படைக் கணித அறிவே போதும். கணிதப் பாடப்பகுதிகள் உயர்நிலைப்பள்ளி தேறிய மாணவர்களுக்கு ஏதாவது ஒரு வேலை—கடைகளில் கணக்கராகவோ, தரகராகவோ, நடுநிலைப்பள்ளி ஆசிரியராகவோ, விற்பனையாளராகவோ—பெறக்கூடிய அளவுக்கும், பல்கலைக்கழகப் படிப்பு, தொழில் நுட்பக் கல்விக்கான வாய்ப்புகளுக்கும் ஏற்ற வாறு சிறப்பாகப் பாட உட்பொருள் அமைய வேண்டும். ஏனெனில், பெரும்பாலான மாணவர்கள் உயர்நிலைப்பள்ளி யளவிலே தங்கள் படிப்பை முடித்துக்கொள்கின்றனர். மேலும், பலவிதமான வேலைவாய்ப்புகளுக்கும் இது அடிப்படைத் தேவை யான கல்வியாகக் கருதப்படுகின்றது.

பல்வேறு மாணவர்களின் வெவ்வேறான இத் தேவைகளை ஒரே விதமான பாடத்திட்டத்தினால் நிறைவேற்றுவது கடினம். ஆகவே, அதிகமான மாணவர்களுக்கு அதிகப்படியாக எவ்வித மான அறிவு தேவையோ அதையேதான் பாடப்பகுதியில் சேர்க்க வேண்டும். இயற்கையிலேயே சில மாணவர்களுக்குக் கணிதத்தில் மிகுந்த ஆர்வமும் அதற்கேற்ற திறமையும் உண்டு. அத்தகைய மாணவர்களுக்குப் பின்னால் சிறந்த கணித மேதைகளாக வளர் வதற்கு ஏற்றாற்போல் சூழ்நிலைகளைப் படைத்துக் கொடுப்பது கல்வித் திட்டத்தின் நோக்கமாக இருத்தல்வேண்டும். இப்படி அமைக்கப்பட்ட பாடத்திட்டத்தினால் மாணவர் பயனடைவது மட்டுமன்றி, நாடும் இக் குடிமக்களால் நலம் பெறும்.

பாடப் பகுதிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் விதி முறைகள்

கணிதப் பாடத் திட்டத்திற்காகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் தலைப்புகள் எந்த அடிப்படையில் அமையவேண்டும்?

(i) கணிதம் கற்பிப்பதன் பயன்களையும், குறிக்கோள்களையும் அடிப்படையாகக்கொண்டு, இவற்றை அடைய ஏற்றவாறு பாடத் தலைப்புகள் அமைய வேண்டும்.

(ii) எந்த ஒரு பாடத்திட்டமும் மாணவர்கள் உணர்ந்து பாராட்டும் விதத்தில் ஏற்படுத்தப்பட வேண்டும். கணிதக் கருத்துகளை இசைந்திணைத்துத் திட்டமிட்டு அமைப்பதன் நோக்கம், அறிவியல், தொழில்துறை, சமுதாயம் முதலியவற்றின் மேம்பாட்டிற்கு இது முக்கியமான கருவியென்ற உண்மையாகும்.

(iii) நடைமுறையில் வாழ்க்கைக்குத் தேவையான கணித அறிவே பாடத்திட்டத்தில் இடம் பெறுதல் வேண்டும். தேவை யற்ற பாடப்பொருள்கள் பாடத்திட்டத்திலிருந்து நீக்கப்படுதல் வேண்டும். நாட்டு வளர்ச்சிக்குத் தேவையானதும், உலகச் சூழ்நிலையைச் சரியாகப் புரிந்துகொள்வதற்கு உதவக்கூடியது மான கணிதப் பகுதிகள் அவ்வப்போது காலத்திற்கு ஏற்பச் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. அறிவுள்ள ஒரு குடிமகனிடம் தற்கால வாழ்க்கையில் எதிர்பார்க்கின்ற பரந்த கணிதப் பயிற்சியின் தேவையை முன்னிட்டு முதலீடுகள், தரகு, வரி, மறைமுகமாக அளத்தல், சரக்கும் பங்குமுதலும் போன்ற பாடப்பகுதிகள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

(iv) பள்ளியில் ஒவ்வொரு நிலையிலும்—அதாவது ஆரம்பப் பள்ளி, நடுநிலைப் பள்ளி, உயர்நிலைப்பள்ளி—ஒரு மாணவன் கற்கும் பாடங்கள் அவனுடைய பிற்கால வாழ்க்கைத் தேவைக்கு மிக அவசியமான பொது அறிவையும், ஆற்றல்களையும், ஒழுக்கப் பண்பாட்டையும் பெறும்படியான முறையில் பாடப்பகுதிகள் அமைய வேண்டும். மேலும், மாணவர்களுடைய வயது, நாட்டம், பட்டறிவு ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் அமையவேண்டும். மாணவர்களின் ஆக்கத்திறன் (creativity) வளர்வதற்கான பாடங்களும், செயல்களும் பாடத்திட்டத்தில் இடம் பெற வேண்டும்.

(v) பாடத்திட்டங்களில் செயல் திட்டங்களுக்கும் செயல் முறை மூலம் கற்றறிவதற்கும் இடமிருக்க வேண்டும். ஏனெனில், ஐம்புலன்களின் வாயிலாக மாணவர்களின் அறிவு வளர வேண்டும். உண்மைகளைத் தாமே பார்த்தும் உணர்ந்தும் மனத்தில் கொள்ளு மாறு செய்யாமல் மனத்திற்கு மட்டும் பயிற்சி அளிப்பது நல்ல பயனை அளியாது.

முடிவாக, பள்ளிப் பாடத்திட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட பாடப் பகுதி இடம்பெற வேண்டுமானால் அப் பகுதியானது,

1. அன்றாட வாழ்க்கைக்குப் பயனுடையதாக இருக்க வேண்டும்.

2. மற்றப் பாடங்களைக் கற்பதற்கு உதவியாக இருக்க வேண்டும்.

3. வாழ்க்கைத் தொழில்களுக்குப் பயனுடையதாயிருக்க வேண்டும்.

4. நவீன நாகரிக வளர்ச்சியின் பற்பல பகுதிகளான தொழில் துறை, வாணிகம், பொறியியல் போன்ற பல துறைகளும் முன்னேற்றமடைவதற்குக் கணிதம் எவ்வளவு பயன்படுகிறது என்பதை உணர்த்துவதாக இருக்கவேண்டும்.

5. இயற்பியலிலோ, மன்னுய நூலிலோ புதிய கருத்துகளைக் கண்டுபிடிப்பதற்குப் பயன்பட வேண்டும்.

6. சமுதாய ஒருமைப்பாட்டிற்கும், முன்னேற்றத்திற்கும் ஒழுங்குமுறையான எண்ணங்களுக்கும் அது ஒரு வழியாக அமைய வேண்டும்.

மாணவர்களின் தேவைகள் முதற்கண் கவனிக்கப்பட வேண்டும். அதாவது, இந்த ஆண்டில் இந்த மாணவன் தன் பள்ளிப்படிப்பை முடித்துக்கொண்டால் இவனுக்கு என்னென்ன பாடப் பொருள்களை என்னென்ன அளவிற்குக் கற்றுக்கொடுத்தால் இவனுக்கு மிகுந்த அளவு பயன் இருக்கும் என்பதைக் குறிக்கோளாகக் கொண்டு பாடத்திட்டம் அமைக்கவேண்டும்.

உயர்நிலைப் பள்ளிக் கல்வியானது, சாதாரண மனிதன் ஒருவனுடைய அன்றுட வாழ்க்கைத் தேவைகளை மட்டும் அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்படாமல், அவன் ஓர் அறிவுள்ள, பண்பட்ட வாழ்க்கை நடத்துவதற்குரிய தேவைகளின் அடிப்படையிலே அமைக்கப்பட்டுள்ளது. கற்பிக்கப்பட்ட ஓர் உண்மையானது எத்தனை முறை பயன்படுகின்றது என்பதோ, அல்லது, எத்தனை பேருக்குப் பயன்படுகின்றது என்பதோ அதன் முக்கியத்துவத்திற்கு அளவுகோலாகாது: பொதுவாக, சமுதாயத்தில் அதன் பயனைப் பொறுத்தே அதன் சிறப்பை அறியவேண்டும்.

இப்போது நடைமுறையிலிருக்கும் கல்வி முறைகளை ஆராய்ந்து பார்த்தால், கடந்த இருபது ஆண்டுகளில் வாழ்க்கைத் தேவைக்குப் புறம்பானவை எனக் கருதப்பட்ட பல பாடப் பொருள்களும் நீக்கப்பட்டு மிகவும் முக்கியமான பாடப்பகுதிகள் (Modern Maths) சேர்க்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம்.

கட்டாயக் கணிதம் (Core Mathematics)

எந்தெந்த வகுப்புகளில் என்னென்ன பகுதிகளை மாணவர் கற்க வேண்டும், எந்த அளவுக்குக் கற்கவேண்டும் என்று அரசாங்கக் கல்வித் துறை, பள்ளிப் பாடத்திட்டத்தில் பாடப்பகுதிகளை அமைத்திருக்கிறது. பாடத்திட்டம் காலத்துக்கும், வாழ்க்கைத் தேவைகளுக்கு ஏற்றவாறும் அவ்வப்பொழுது மாற்றி அமைக்கப்

படுகிறது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் கற்க வேண்டிய பாடப் பகுதிகள் சுருக்கமாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வகுப்புகள் (I-V): தொடக்க நிலையில் கணங்கள், எண் அறிவு, அதன் நான்கு அடிப்படைச் செயல் முறைகள், ரூபாய், பைசா, மெட்ரிக் அளவைகள், கூட்டல், சாதாரணப் பின்னங்கள், கலப்புப் பின்னங்கள், தசமப் பின்னங்கள், பரப்பளவு முதலியவை உள்ளன. வடிவியலும், இயற்கணிதமும் அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றன.

வகுப்புகள் (VI-VIII): நடுத்தர நிலையில், தொடக்க நிலையிலிருந்தபாடப்பகுதிகளின் மீள்பார்வையும், கலப்புப் பின்னங்களைக் கூட்டல், கழித்தலும், விகிதம், விகிதசமம், பகு எண், பகா எண், அதமப் பொது மடங்கு, உத்தமப் பொது அளவு, பரப்பளவு (சதுரம், செவ்வகம், பாதைகளின் பரப்பு) வட்டத்தின் பரப்பளவு, அளவு திட்டம் எடுத்துவரைதல், சராசரி, இலாபம் நட்டம், வரி, சதவீதம், தனிவட்டி, கன உருவங்களைத் தெரிந்துகொள்ளவும், அவற்றின் பெயர்களைச் சொல்லவும், கனச்செவ்வகம், கனச்சதுரம் அவற்றின் கனஅளவுகள், சூத்திரங்களை அமைத்தல், கோணங்களைப்பற்றியும், அவற்றின் வகைகள், செங்குத்துக் கோடு இவைகளைக் கருவிகள் கொண்டு வரையவும், அளக்கவும், வட்டம் வரையவும், பாடத்திட்டம் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. கிடைகோடு, நிலைகுத்துக்கோடு இணைகோடுகள், முக்கோணங்கள் அமைத்தல், புள்ளியியல் வரைபடங்கள் முதலியவையும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

உயர்நிலைப்பள்ளியில் (IX-XI)

வகுப்பு IX: விகிதம், பிரதிபின்னம், கலப்பு விகிதம், அதன் அடிப்படையாகக் கொண்ட சில தலைப்புகள்—கூட்டு வியாபாரம், காலமும் வேலையும், காலமும் தூரமும், சதவீதம்-அதனை அடிப்படையாகக் கொண்ட சில தலைப்புகள்-தள்ளுபடி, தரகு, கலவைகள், மக்கள்தொகை முதலியன, திசை எண்கள், அடுக்குக் குறிகளின் விதிகள், ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன்; சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்—அடங்கியுள்ளன.

பத்தாவது வகுப்பிலிருந்து மாணவர்கள் தங்களுடைய பிற்கால வாழ்க்கைக்கு ஏற்பவும், தம்முடைய விருப்பங்களுக் கேற்பவும்: முறையே, கட்டாயக்கணிதமும் (Core Mathematics), விருப்பக் கணிதமும் (Elective Mathematics) பாடத்திட்டத்தில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

வகுப்பு—X: முன்னுல் படித்த சில பாடப்பகுதிகளின் மீள் பார்வையும், இருபடிமூலம், முற்றொருமைகள், பிதாகரஸ்

தேற்றம், கூட்டுவட்டி, நிகழ்கால மதிப்பு, வட்டி, தள்ளுபடி, மற்றும் வியாபார சம்பந்தமான கணக்குகள்; கன அளவுகள், ஒருங்கமைசமன்பாடுகள், முக்கோணம், இணைகரம், சாய்சதுரம் முதலியனவற்றின் அமைப்பும், பரப்புகளைக் கணக்கிடுதலும், நாற்கர நிலங்களை அளத்தல், $y=mx+c$ வடிவிலுள்ள சமன்பாடு களின் வரைபடங்கள், $y=mx$ஐச் சார்ந்த நொடிக் கணக்குகள் (Ready reckoner graphs) என்ற தலைப்புகள் கொண்டது.

வகுப்பு-(XI): மீள் பார்வையும்; முதலீடு என்ற தலைப்பின் கீழ்க் குறித்த காலவைப்பு, தொடர்வைப்பு, பங்குகளும், சரக்கு முதலும், ஒருபடிச் சமன்பாடுகள், ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைப் புனைந்து பிரச்சினைக் கணக்குகளைத் தீர்த்தல், வட்டம், வட்டவில், வட்டப்பகுதி முதலியன; வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைதல், மறைமுகமாக உயரங்களையும், தூரங்களையும் அளத்தல், நாற்கரம், டிரபீசியம் முதலியவை அமைத்து, பரப்பளவு கண்டுபிடித்தல், பயண வரைபடங்கள் மூலம் கணக்குகளைத் தீர்த்தல், ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை வரைபடம் வரைந்து தீர்த்தல்—இத் தலைப்புகள் இடம் பெற்றுள்ளன. சில பாடப்பகுதிக்கு என்னென்ன செயல்கள் செய்யவேண்டும் என்றும் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கிறது.

விருப்பக் கணிதம் (விருப்பப் பாடம்)—வகுப்பு (X-XI)

மாணவர்களின் கணிதத்திறன் வீணுவதை நாம் புறக்கணிக்க முடியாது. அபூர்வத் திறனுள்ள மாணவர்களின் ஆர்வத்தையும், முயற்சியையும் ஊக்குவிக்கும் வண்ணம் அவர்களுக்கு வேலை கொடுக்க வேண்டும். இல்லையேல் இவர்களுடைய அரியதிறமைகள் பயனற்றுப்போகும். தொடர்ந்து நுண்ணறிவுடன், உயர்தரமான வேலை செய்யக்கூடிய திறனுள்ள மாணவர்கள் மட்டுமே சிறப்புக் கணிதத்தை விருப்பப் பாடமாகப் படிக்க அனுமதிக்கப்பட வேண்டும்.

வடிவியல்

தருக்க முறை வடிவியலை (demonstrative geometry), அதாவது யூக்ளிடின் வடிவியலை அம் மாணவர்களுக்கு அறிமுகப்படுத்திக் கண்டிப்பான வாத முறைகளில் காரணங்கள் கூறி உண்மைகளை நிலைநாட்டி நல்ல தேர்ச்சியளிக்கப் பாடம் அமைக்கப்பட் டிருக்கிறது.

இயற்கணிதம்

இருபடிச் சமன்பாடுகளைச் சூத்திரங்களைக் கொண்டு, அல்லது வரைபட முறையில் தீர்த்தலைப் பற்றியும், பல்லுறுப்புக்

கோவையை மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்தவும், ஒருபடித்தான கோவை, சமச் சீர்கோவை, வட்டச் சீர் கோவைபற்றியும் சில பாடத்தலைப்புகள் உள்ளன. சார் பலன்கள், சார்புக் குறியீடு, தேராக் குணகங்கள் கோவையின் வருக்கமூலம் என்ற பாடப்பகுதிகளும் உள்ளன.

கோண கணிதம்

எண்களைக் குறிக்கும் குறியீட்டுகளுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளதால் கோண கணிதமானது இயற்கணிதத்தில் ஒரு பகுதியாகக் கருதப்படுகின்றது. உயரங்களையும், தூரங்களையும் மறைமுகமாக அளப்பதற்கு வேண்டிய ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்களைச் சார்ந்திருப்பதால் வடிவியலின் ஒரு பகுதியாகவும் இதனைக் கருதலாம். இக் காரணங்களால் இது விருப்பப்பாடத்தில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. கோண கணிதத்தின் முக்கிய விகிதங்களான சைன்θ (sineθ) கொசைன்θ (cosineθ) டான்ஜன்டுθ (tangentθ) என்பவை இயற்கையின் பண்புகள் பலவற்றை விவரிக்கப் பயன்படுகின்றன. இவை ஒவ்வொன்றும் சார்பின் (function) தன்மைகளைக் கொண்டவை. மேலும், இவை ஒவ்வொன்றையும் வரைபடத் தாளில் குறிப்பிடுவதால் கிடைக்கும் வளைவரைகளை இத் தகவுகளின் உருவக வடிவங்கள் (symbolic forms) எனலாம். இப் பாடப் பகுதி நேரடியான அளவீடுகளுக்கும், மறைமுகமான அளவீடுகளுக்கும் உள்ள வேற்றுமையைப்பற்றி அறிய மாணவர்களுக்கு வாய்ப்பளிக்கின்றது. கோண கணிதமானது நில அளவை முறைகளிலும், ஆதார அறிவியலிலும், மற்றும் பல அளவை முறைகளிலும் பெரிதும் பயன்படுகின்றது. ஆதலால், இப் பாடம் பாட அமைப்பில் இடம் பெற்றுள்ளது.

மடக்கை (Logarithm): கணிப்பு இயந்திரங்கள் (computers) ஒரு மடக்கையின் செயல்முறை முக்கியத்துவத்தை ஓரளவு குறைத்தாலும், இயற்கணிதத்தில் இதன் பயன்கள் இன்னும் உயர்ந்தேயுள்ளன. கணிப்பு வேலையைத் திட்பமாகவும் வேகமாகவும் செய்ய வேண்டுமானால், மடக்கையைப் பயன்படுத்தியே செய்யமுடியும் என்பதை மாணவர்கள் அறிந்துகொள்வது அவசியமாகும். பெரும்பாலான மாணவர்கள் கோண கணிதத்தைப் பயிலும் போதுதான் மடக்கைகளை அறிந்துகொள்கிறார்கள்; அதாவது முக்கோணங்களைத் தீர்ப்பதிலுள்ள கடினமான கணிப்புகளை மடக்கைகளைப் பயன்படுத்தி எளிதாகச் செய்கிறார்கள். இந்தப் பகுதி சிறப்புப் பாடத்தில் அமைவது விரும்பத்தக்கது.

கணிதப் பாடத்திட்ட அமைப்பு முறை (Organisation)

கணிதப் பாடத்திட்டத்தில் வெவ்வேறு பகுதிகள் என்னென்ன நோக்கங்களுடன் சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன என்று இதுவரை பார்த்தோம். இப் பகுதிகளை எவ்விதம் அமைத்தால் மாணவர்கள் இப் பயன்களையெல்லாம் அடைவார்கள் என்று ஆராய்ந்து, பாடப் பொருளை ஒழுங்குபடுத்துதல் வேண்டும்.

வாதமுறை (தருக்க முறை–Logical)

நெருங்கிய தொடர்புள்ள கருத்துகளை ஆதாரமாகக் கொண்டது தருக்க முறையாகும். வரையறைகளும், எடுகோள், வெளிப் படை உண்மைகளும் இதன் அடிப்படையாகும். உதாரணமாக, எண் கணிதத்தில் எண்களில் பயன்படுத்தப்படும் இடமதிப்புக் கருத்தைப் போதிக்கும்போது, தருக்க முறைப்படி பார்த்தால், எண்களைக் கற்றவுடன் தசமப் பின்னத்தைப்பற்றித்தான் கற்க வேண்டும், அதாவது, இட மதிப்பு முறைப்படி இடப் பக்கமாகப் பத்தின் மடங்காய் எழுதுவது போல, வலப் பக்கமாக 10-ன் கீழ் மடங்காய் எழுதவேண்டும்.

654·321 என்றது, $6\times100+5\times10+1+3\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ என்று பொருள். அதாவது, 654·321 என்ற எண்ணில், 5-ன் இடமதிப்பு 4-ன் இடமதிப்பின் 10 மடங்கு. அதே போல், 3-ன் இடமதிப்பு 4-ன் இடமதிப்பில் 10-ல் ஒன்று. ஆனால், முழு எண் களையும், பின்னங்களையும்பற்றி அறிந்த பின்னரே மாணவர்கள் தசமப் பின்னத்தைப்பற்றிய கருத்துகளைப் புரிய முடியும். கணிதம் வளர்ந்த முறையும் இதுவே. மாணவர்களுடைய வாழ்க்கை அனுபவத்தை ஒட்டியுள்ள அரை, கால், முக்கால் என்ற சாதாரணப் பின்னங்கள்தாம் அவர்கள் எளிதில் புரிந்துகொள்ளக் கூடிய பகுதிகள்.

குறைகள்

1. மாணவர்களுக்கு ஏற்படும் இடர்ப்பாடுகள் கவனிக்கப் படுவதில்லை.

2. தலைப்புகள் தருக்க முறையில் அமைக்கப்படுவதால் அவை எளிமையானவையா, கடுமையானவையா என்று பார்க்க முடிவதில்லை. ஆகவே, மிகச் சுலபமான ஒரு பகுதியும், மிகக் கடினமான ஒரு பகுதியும் ஒன்றன் பின் ஒன்றாகத் தொடர்ந்து அமையும். மாணவர்கள்தாம் பாடத்திற்கு ஒத்துப்போக வேண்டி யிருக்கின்றது.

3. இவ்விதமான ஒருபடித்தான நிலை (homogenity) ஏற் படாததால் மாணவர்கள் மனநிறைவு பெறுவதில்லை.

தருக்கமுறை என்ற பெயரளவைத் தவிர, கணிதத்தை நன்ருக அறிய இந்த அமைப்பு உகந்ததன்று.

உளவியலடிப்படையில் வகுக்கப்பட்ட அமைப்பு (Psychological)

மாணவர்களுக்குப் பயன்தரும் பொருள்கள்பற்றியே பாட முறை அமைக்கப்படினும், எந்தெந்த வயதில், அறிவு வளர்ச்சி நிலையில், என்ன பாடங்கள் கற்றுத் தரப்படவேண்டும் என்றறிவது மிக முக்கியமாகும். உதாரணமாக, 'தொடர் வட்டி' பற்றி அறிதல் எல்லோருக்கும் பயனுள்ள தென்ருலும், தொடக்க நிலை மாணவருக்கு இதைக் கற்பது கூடாத காரியமாகும். மாணவர் கண்ணேட்டத்தில் பார்த்தால்தான் ஒரு கருத்தின் எளிமையும், கடினமும் நன்கு புரியும்.

கணிதம் எவ்விதம் படிப்படியாக வளர்ந்ததோ அதே முறையில்தான் பகுக்கப்பட்டுப் பாடமுறை அமைக்கப்பட வேண்டும். அதாவது,

1. பாடப் பகுதிகளை எளியவற்றிலிருந்து கடினமான பகுதிக்கு வரிசைப்படுத்த வேண்டும்.

2. தெரிந்த கருத்துகளிலிருந்து புதிய கருத்துகளுக்கு விளக்கும் முறையில் அமைக்கவேண்டும்.

3. எடுத்துக்கொண்ட பகுதியில் நல்ல தேர்ச்சி பெறும் நிலை வரும் அளவிற்கு நேரமும் முயற்சியும் எடுத்துக்கொள்ளக் கூடிய விதத்தில் பாடப்பகுதி அமைய வேண்டும். இதனுல் மாணவர்களுக்கு அதிக ஆர்வம் ஏற்படுவதோடு, கல்வி அருத்தமுள்ளதாகவும் அமையும். மூலாதாரமான முறைகளும் கருத்துகளும் இந்த அமைப்பில் வலியுறுத்தப்படுகின்றன. மாணவர்களின் அறிவுக்கும், ஆற்றலுக்கும் இந்த அமைப்பு உகந்தது (எ-டு).

அலகு : கோணங்கள்

தருக்கமுறை அமைப்பு	உளவியல் அமைப்பு
1. பொதுக் கருத்து: கோண முனை, பக்கங்கள், கோணங்களின் அளவுகள், கோணங்களின் வகைகள், இணைகோடுகள், செங்குத்துக் கோடுகள், எதிர் கோணங்கள், ஒத்த கோணங்கள் முதலியன.	1. கோணங்களை அன்ருட வாழ்க்கையில் எங்கெங்குக் காண்கிருேம்? இவற்றின் பயன்கள் என்ன? (சாய்வு தளம், தச்சன் மட்டம், கடிகார முள்கள், திசைகள் முதலியன) குறியீடுகள், கோணங்களை வகைப்படுத்தல்-நிரப்பு, மிகை நிரப்பு, கோணங்கள், எல்லா வகைக் கோணங்கள்.

தருக்கமுறை அமைப்பு	உளவியல் அமைப்பு
2. குறியீடுகள் — கோணம் : ∠B அல்லது ∠ABC அல்லது ∠CBA. கூறுகள் : a° b' c'', 28° $30'$ $15''$ இணைகோடுகள் AB ∥ CD செங்குத்துக் கோடுகள் AB ⊥ CD	2. கோணமானியின் உதவியால் எல்லாவிதக் கோணங்களையும் அளத்தல், முக்கோணத்தின் கோணங்கள், அடுத்துள்ள கோணம், திசைகளின் கோணங்கள் முதலியன.
3. கோணங்களின் வகைகள்; நிரப்பு கோணங்கள், மிகை நிரப்பு கோணங்கள், குத்தெதிர் கோணங்கள், இணை கோடுகளைக் குறுக்குக் கோடு வெட்டும் பொழுது உண்டாகும் கோணங்கள், ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் முதலியன.	3. கோணமானியின் உதவியால் கோணங்களை வரைதல். கொடுத்துள்ள கோணத்திற்குச் சமமாக ஒரு கோணம் அமைத்தல், சமபக்க, இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் அமைத்தல் முதலியன.
4. கருவிகள் கொண்டு வரைதலும், அளத்தலும், கோணமானி, T-வடிவக் கருவி முதலியன.	4. இணைகோடுகள் வரைதல், இணைகோடுகளும், குறுக்கு வெட்டியும், அதனால் உண்டாகும் கோணங்கள், தன்மைகள், இணைகோடுகளின் குறியீடு. செங்குத்துக் கோடு வரைதல்—அதன் குறியீடு.
5. கோணங்களின் பயன்கள்-நில அளவைகள், வானநூல், கடல், காற்று வழிகளில் திசைகள்.	
6. இயற்கணிதம் : கோண சம்பந்தமான சிக்கல்களை விடுவித்தல் [$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, n பக்கங்கள் கொண்ட பல கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் $(2n-4)$ செங்கோணங்கள் முதலியன.]	

கணிதப் பாடப் பகுதிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறும் அமைக்கலாம்: (1) படிமுறை அல்லது தலைப்புவாரியான அமைப்பு (Topical plan), (2) சுருள் வட்ட அமைப்பு (Spiral plan).

படிமுறை அல்லது தலைப்புவாரியான அமைப்பு

இம் முறையில் அதன் பெயருக்கேற்ப, ஒவ்வொரு படியையும் அடுத்த படிக்குப் போகுமுன் முழுவதுமாகக் கடக்க வேண்டியது போல், எடுத்துக்கொண்ட ஒவ்வொரு தலைப்பையும் முழுவதுமாகக் கற்று முடித்த பின்னரே அடுத்த தலைப்பு எடுத்துக்கொள்ளப்படும். அதாவது, ஒவ்வொரு தலைப்பும் தன்னில்தானே முழுமை அடையும்படி பாடத்திட்டம் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

ஆரம்பக் கணிதப் பாடத்தில், எடுத்துக்கொண்ட ஒரு செயல் முறையில், குறிப்பிட்ட ஒரு காலத்துக்குள் முழுத் தேர்ச்சியடையும்படி பாடத்தைத் தொடர்ந்து நடத்தவேண்டும். இப்படித் தேர்ச்சி பெற்ற பின் அடுத்த முறையைப் படிப்பதற்கு மாணவர்கள் தயாராகின்றனர். உதாரணமாக, பின்னங்களைப்பற்றிக் கற்பிக்கும்போது பின்னங்களைச் சார்ந்த செயல் முறைகள் பலவற்றையும் பயிற்றுவிக்க வேண்டுவதுமன்றி, இவற்றில் தடங்கலில்லாமல் செய்யும்படியும் பழக்கவேண்டும்.

பல சிறந்த காரணங்களுக்காகப் பண்டைக்கால ஆசிரியர்கள் இம் முறையைப் பின்பற்றினர். முக்கியமான செயல் முறைகளில் முழுத் தேர்ச்சிபெற இம் முறை பெரிதும் பயன்படுகின்றது; பன்முறைப் பயிற்சிக்கும் இதில் மிகுந்த வாய்ப்பிருக்கின்றது. மேலும், ஒருமுகமாகச் சிந்திக்க மாணவர்களுக்கு வாய்ப்பளிக்கின்றது. ஆற்றல் குறைந்த மாணவர்கள், எந்த வகுப்பில் (period), எந்தப் பகுதியில் கவனக்குறைவாகக் கற்றிருக்கக்கூடும் என்று திட்டமாக அறிந்து தகுந்த நடவடிக்கை எடுக்கலாம். பாடங்களை முழு நிறைவுடன் கற்கிறோம் என்ற மனநிறைவு மாணவருக்கு ஏற்படுகின்றது. என்றாலும், இம் முறையில் சில குறைகள் புறக்கணிக்க முடியாதவை. தனித்தனிப் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, ஒரு பகுதிக்கும் மற்றொரு பகுதிக்குமுள்ள தொடர்புபற்றிக் கூறாமல் கற்பிக்கப்படுவதால் இம் முறை, ஒருவித இயந்திரமயமாக்கப்படுகின்றது. விதவிதமான செயல்முறை வளங்கள் இம் முறையில் எடுத்தாளப்பட முடியாத நிலை ஏற்படுகின்றது. உண்மையில், கணிதத்தின் வெவ்வேறு பகுதிகளும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவையாயினும், படிமுறையமைப்பில் உள்ள செயற்கைப் பிரிவுகள் காரணமாகக் கணித அறிவு மட்டுப்படுகின்றது. உதாரணமாக, 7/8 என்பதும் $87\frac{1}{2}\%$ என்பதும் ஒரே மதிப்புடை

யவை என்ற சாதாரணக் கருத்தைக்கூட மாணவர்கள் அறியாமல் போக வாய்ப்புண்டு. சாதாரணப் பின்னமும், தசம பின்னமும் தொடர்புடையவை என்பது மறைந்துவிடுகின்றது. ஆகவே, பாகுபாடுகள் அவசியமெனினும் அவற்றிற்குள்ள உட்தொடர்பு தகுந்த முறையில் எடுத்து விளக்கப்படாவிடில் அறிவுவளர்ச்சியிலும் சீரான முன்னேற்றம் ஏற்படாமற் போகும். எடுத்துக் கொண்ட ஒரு பொருளைத் தொடர்ந்துநடத்தி முடிக்கவேண்டும் என்ற நிலை 'காலமும் வேலையும்' போன்ற தலைப்பின்கீழ் இயலாத காரியம்.

எடுத்துக்கொண்ட தலைப்பில் மிகக்கடினமான கணக்குகளைக் கூடச் சிறுவர்கள் செய்யவேண்டிய நிலை ஏற்படுகின்றது. மாணவர்களின் மனவளர்ச்சியை அனுசரித்து இப் பாடம் அமையாமல், பாடத்தின் உயர்நிலைக்குக் குழந்தைகளின் அறிவுநிலை வளர வேண்டிய கட்டாயம் ஏற்படுகின்றது. சில தலைப்புகளிலுள்ள எளிதான பகுதிகளைக் காலங்கடந்த பின்னர் எடுப்பதாலும் சலிப்புண்டாகும். ஒரே தலைப்பை நீண்டநாள் நடத்தினாலும் சலிப்புத் தட்டும்; களைப்பு மிகும். ஆதலால், கணிதப்பாட அமைப்பில் ஒரு பாடப்பகுதியும் இந்தத் தலைப்புவாரியான அமைப்பில் இல்லை. பொது மையமுறையில் அல்லது சுருள் மையமுறையில் தலைப்பு வாரியாக அமைப்பதே சிறந்த ஏற்பாடு.

சுருள்முறையமைப்பு (அ) பொது மையமுறை யமைப்பு (Spiral plan)

இம் முறையில் ஒரு கணிதத் தலைப்பை மையமாகக்கொண்டு, குழந்தைகளின் மனவளர்ச்சிக் கேற்ப ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் சிறுகச்சிறுக விரிவாக்கிக்கொண்டு செய்திகளைக் கற்பிக்க வகை செய்யப்படுகிறது. பல வகுப்புகளிலும் ஒரே தலைப்புப் பொதுவாக இருக்குமாறு அமைப்பதால் இதனைப் 'பொது மைய அமைப்பு' அல்லது 'சுருள்முறையமைப்பு' என்று கூறுவர்.

இத் திட்டப்படி அமையும் பாடத்திட்டத்தில் ஏற்படுகின்ற அனுபவம் திரும்பத் திரும்ப வரக்கூடுமாதலால், பல படிகளிலும் அந்தந்த வகுப்பிற்கேற்ப, ஏற்கெனவே தெரிந்த பாடப் பகுதிகளின் அளவைப் பெருக்கிக்கொண்டே கற்பிக்கப்படும். மாணவர்களின் மனோவளர்ச்சி, தேர்ச்சி, மற்றத் தேவைகளுக்கு ஏற்றவாறு செய்திகளின் அளவையும், போதனு முறைகளையும் விரிவாக்கிக் கொண்டும், மாற்றிக்கொண்டும் போக வகைசெய்யப்படுகிறது. கணித அறிவும் அபிவிருத்தியடைந்து பூர்த்தியாகிறது.

சுருள் முறையில், வட்டம் என்னும் பாடப்பகுதி:

தலைப்பு—வட்டம்

வகுப்பு	பாடப் பகுதி	செயல்கள்
VI	வட்டம், ஆரம், விட்டம், பரிதி (மற்றப் பாகங்கள் இல்லை).	கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆரத்தைக் கொண்டு, காம்பஸின் உதவியால் வட்டம் வரைதலும், மேலும் பல அமைப்புகளைச் செய்தலும்.
VII	வட்டமும் அதன் பாகங்களும், தொடுவட்டங்கள், வெட்டும் வட்டங்கள்.	முழுவட்டவடிவிலும், அரை வட்ட வடிவிலும் தோட்டங்கள் அமைத்தல். கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோட்டை, காம்பஸின் உதவியால் இரு சமக் கூறிடல், எளிய அமைப்புகள் செய்தல்.
VIII	வட்டத்தின் பரிதியின் நீளத்தைக் காணல், சூத்திரத்தை உபயோகித்து ஆரத்தைக் காணல் வட்டத்தின் பரப்புக் காணச் சூத்திரம்	வட்டவடிவில் உள்ள நாணயம், வட்டவடிவப் பொருள்கள் இவற்றின் பரிதியின் நீளத்தை அளத்தல், பரிதியின் நீளத்திற்கும், விட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தை இரு தசமஸ்தானச் சுத்தமாகக் காணல். வட்டத்தைச் சிறுசிறு வட்டக்கோணப் பகுதிகளாகச் செய்து அவற்றை மாற்றியமைத்து வட்டத்தின் பரப்பளவிற்கான சூத்திரத்தைக் காணல்.
IX	—	—
X	—	—
XI	வட்டம், பரிதி, வட்ட வில்லின் நீளம், வட்டக் கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம், வட்ட வளையத்தின் மூலம் விகிதக் கூறிடல், வட்டத்தின் பண்புகள், அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம்	வட்டத்திற்குத் தொடு கோடு வரைதல். 1. வட்டத்தின் பரிதியில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து. 2. வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து.

நன்மைகள்: இம் முறையில் கீழ்க்காணும் அனுகூலங்கள் உள்ளன.

(i) பள்ளிப்படிப்பை எந்த நிலையிலேயும் விட்டுச்செல்ல நேரும் மாணவர்கள்கூடக் கணிதத்தில் அநேகமாக எல்லாப் பாடப் பகுதிகளிலும் சிறிதளவாவது அறிந்துகொள்கின்றனர். ஏனெனில், ஆரம்பப் பள்ளியில் எண்கணிதம், வடிவியல், இயற் கணிதம் முதலியவை அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றன. நடுநிலைப் பள்ளியில் எண்கணிதத்தில் சதவீதம், வாழ்க்கையில் அதனுடைய பயன்கள், வடிவியலில் சில அமைப்புகள், இயற் கணிதத்தில் குறியீடுகள், புள்ளியியல் வரைபடங்கள் முதலியவை பாடத் திட்டத்தில் சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன. உயர்நிலைப் பள்ளியில் எல்லோருக்கும் கட்டாயக் கணிதமும் (Core Mathematics), கணி தத்தில் ஆர்வம் கொண்ட சில மாணவர்களுக்குச் சிறப்புக் கணித மும் (Elective Mathematics) அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. எண் கணிதம், வடிவியல், இயற்கணிதம் வரும் எல்லாத் தலைப்புகளும் சுருள்முறையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

(ii) வெவ்வேறு தலைப்பில் கணிதம் கற்ருலும் இவற்றின் தொடர்புபற்றி மாணவர் அறிந்துகொள்ள வாய்ப்பிருக்கின்றது. உதாரணமாக, சாதாரணப் பின்னம், தசமப்பின்னம், சதவீதங்கள் எல்லாம் தோற்றத்தில் வேறுபட்டவையானுலும், ஒரே நிலையைத் தான் குறிக்கின்றன ($\frac{1}{2} = 5 = 50\%$) என்ற உண்மை, அநேக செயல் முறைகளில் பயனளிக்கிறது. இவ்விதத் தொடர்புமுறை இயற்கை யாகப்படுவதனுல், புரிந்துகொள்ளும் ஆற்றல் வளர்வதுமன்றி மனத்தில் நிலையாகப் பதியவும் வாய்ப்பளிக்கின்றது.

(iii) சுருள் முறையில், முந்திய வகுப்புகளில் கற்ற பாடங் களைத் திரும்பவும் பயன்படுத்தவோ, படிக்கவோ வாய்ப்பு கள் இருப்பதால், முந்திய வகுப்பில் ஒருவேளை நன்ருகப் புரிந்து கற்காத பாடங்களை உயர்வகுப்புகளில் அறிந்துகொள்ள முடியும். முடிவாகக் கூறப்போனுல் இம் முறையில் பரவலாகக் கற்கும் வாய்ப்புள்ளது.

(iv) பாடப்பொருள் தருக்க முறையில் அமைக்கப்படாமல் மனநிலை வளர்ச்சியை உளவியல் முறையை ஒட்டியே படிப் படியாக வளர்க்கப்படுவதால் மாணவர் முழுத் தேர்ச்சிபெற முடிகின்றது. வளரும் மாணவனின் அறிவுத்திறன் பெருகும் போது, கணிதப்பாடத்தின் பொருளும் கூடவே வளர்கின்றது. உதாரணமாக, சுலபமாகக் கற்கக்கூடிய சராசரி, பின்னம் போன்ற வற்றைக் கீழ்வகுப்புகளிலேயே கற்கமுடியும். ஆனுல், 'பங்குகள்,

சரக்குமுதல்' போன்ற தலைப்புகளைப் புரிந்துகொள்வதற்குச் சிறிது வளர்ச்சியுற்ற மனநிலை தேவையாதலால் பெரிய வகுப்பு களிலேயே இவற்றைக் கற்க முடியும். நடை முறையிலுள்ள பாட அமைப்புகள் இந்த அடிப்படையில்தாம் அமைக்கப்பட்டுப் பாடப்புத்தகங்களும் அதைச் சார்ந்தே எழுதப்பட்டுள்ளன.

இணைப்பு முறை (Correlation pattern)

அறிவு பலவகைப்பட்டதானாலும் அதைத் தொடர்ந்து தனிக் கூறுகளாகப் பாவித்தல் முறையாகாது. அவ்வித அறிவு முழுமை பெறாத அறிவாகும். ஆகவே, புதுமையான எந்தவொரு அறிவும் தனித்து நில்லாமல், முன்னமேயே அறிந்த தகவல்களின் ஒரு தொகுதியாக மனத்தில் பதிய வேண்டும். ஒருவகைக் கல்வி அறிவு மற்றொன்றை வலியுறுத்தவோ, விளக்கவோ பயன்படுத்தப்படுவது புதிய கருத்தன்று; இது ஆசிரியர்கள் உணர்ந்தும், பயன்படுத்தியும் வரும் தத்துவமாகும்.

பள்ளிப்பாடங்களில் இவ்விதமான தொடர்பு இருப்பதை நாம் நடைமுறையில் காணலாம். அநேகமாக எல்லாவிதமான வாழ்க்கை அனுபவங்களிலும், அறிவியல் துறைகளிலும் கணிதம் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது என்பது எல்லோருக்கும் தெரிந்ததே. ஆகவே, இணைப்பு அல்லது இயைபு முறையின் நோக்கம் ஏட்டளவில் விதிமுறைகளைக் கூறுவதன்று, கற்பவர் மனத்தில் இத் தொடர்புபற்றி நிச்சயமான நம்பிக்கையை ஏற் படுத்தி அறிவின் பற்பல பிரிவுகளையும் ஒன்றுசேர்த்து நோக்கும் மனநிலையை வளர்ப்பதேயாகும்.

இணைப்பு நான்கு வகையாகும். (i) கணிதத்திற்கும் வாழ்க் கைக்கும் உள்ள இணைப்பு, (ii) கணிதத்திற்கும் பள்ளியில் கற்பிக்கப் படும் மற்றப் பாடங்களுக்கும் இடையேயுள்ள இணைப்பு, (iii) கணி தத்தின் பல பிரிவுகளுக்குள்ளேயே காணப்படும் இணைப்பு, (iv) கணிதத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவுகளிலுமுள்ள பல தலைப்புகளில் உள்ள இணைப்பு.

(i) இவற்றில் முதல்வகை இணைப்பு மிகவும் முக்கியமானது. பள்ளியைவிட்டு வெளிச்செல்லும் மாணவன் தான் கற்ற கணிதத் திற்கும், நடைமுறைக் கணிதத்திற்கும் தொடர்பு இல்லை என்று அறிந்தால் பள்ளிப்படிப்புப் பயனற்றது என்று எண்ணுவான். எண்கணிதக் கணக்குகள் எல்லா மாணவர்களின் அன்றாட வாழ்க் கையிலோ அல்லது வீட்டிலோ நிகழக்கூடிய அனுபவங்களோடு தொடர்புடையதாக இருக்கவேண்டும்.

வரவு செலவுகளைப்பற்றிய கணக்குகள், பட்டியல் தயாரித்தல், வட்டிக் கணக்குகள், முதலீடு அதோடு சம்பந்தப்பட்ட தலைப்புகள், சேமிப்புக் கணக்குகள், வியாபாரஞ் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகள் (இலாபம், நட்டம், கூட்டு வியாபாரம், தள்ளுபடி, தரகு, நொடிப்பு, கலவைகள்), வரிகள், வரிவீதங்கள், பற்பல வரி வகைகள், காப்புறுதி முதலிய தலைப்புகள் பாடத்திட்டத்தில் அமைந்துள்ளன.

ஒரு காலத்தில் வரி விதிப்பதிலும், பண்டமாற்று முறையிலுமே (barter system) எண்கணிதம் பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தது. பண்டமாற்று முறையிலே பொருள்களைக் கொடுத்துப் பொருள்கள் வாங்கப்பட்டன. ஏனெனில், அக் காலத்தில் பணம் என்று ஒன்று இல்லை. பணத்தை வாணிகத்திற்குப் பயன்படுத்தியதை மனித நாகரிக வளர்ச்சியின் முக்கியமான ஒரு படியாகக் கருதலாம். பணத்தைப் பயன்படுத்தும் முறையைக் கண்டுபிடித்த பின்னரே, இலாப நஷ்டம், நாணயமாற்று, கூட்டு வியாபாரங்கள், வட்டி வீதங்கள் முதலியவை தொழில்களில் பெரும் பங்கேற்றன. எனவே, மேற்கண்டவையெல்லாம் நூற்றுக்கணக்கான ஆண்டுகளுக்கு முன்பே முக்கியத்துவம் பெற்றிருந்தன. இவ்வாறு பல நூற்றாண்டுகளாக மனிதனுடைய வாழ்க்கை முன்னேற்றத்தில் இணைந்து வளர்ந்துவந்த கணிதத்தின் பயன்களை ஒவ்வொன்றாக எடுத்துக்கூறுவது எளிதல்ல,

இதேபோல் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படும் வடிவியல் உருவங்களும், வரைபட அமைப்புகளும் பாடத் திட்டத்தில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. 'விண்வெளி சகாப்தம்' (Space age) என்று கூறப்படும் இக் காலத்திலே பள்ளியைவிட்டு வெளியேறும் மாணவர்களில் பெரும்பாலோர் முப்பரிமாண வெளியின் (Three dimensional space) கருத்தைப்பற்றி அறியாமல் இருப்பது வருந்தத்தக்கது. எனவே, விண்வெளிபற்றிய அடிப்படைக் கருத்துகளும் தளங்களைப்பற்றியுமான (Two-dimensional) விவரங்களைப் பத்தாவது வகுப்பிலும், பதினோராம் வகுப்பிலும், பாடப் பகுதியில் சேர்த்துள்ளனர். பட்டகங்கள், உருளை, கூம்பு, கோளம் ஆகியவற்றின் பக்கப் பரப்பையும், கன அளவையும் கண்டுபிடிப்பதைக் கனவடிவ கணிதத்தில் (Solid geometry) சேர்த்துள்ளார்கள்.

(ii) கணிதத்திற்கும் பள்ளியில் கற்பிக்கப்படும் மற்றப் பாடங்களுக்கும் இடையேயுள்ள இணைப்பு எல்லோருக்கும் தெரிந்ததே. இந்த இணைப்புகளைப்பற்றிப் பாடத் திட்டத்தில் குறிப்பிடலாம். ஆயினும் இவற்றைக் கணித ஆசிரியர் வகுப்பில் விவர

மாகக் கற்றுக் கொடுக்க இயலாது போனால், மாணவர்கள் தாங்க ளாகவே அனுபவத்தில் உணரும் வண்ணம் குறிப்பிடல் வேண்டும்.

உதாரணமாக — விகிதப்படி பிரித்தல்: நாம் உண்ணும் உணவைச் சமைப்பது, அதிலுள்ள சத்துப் பொருள்களின் விகிதங் கள் முதலியவற்றில் தொடங்கி, உடைகள் (Terry cotton — டெரி காட்டன்), பற்பல உலோகக் கலவைகள், வேதிக் கலவைகள் (Chemicals), உர வகைகள் தயாரிப்பதில் பயன்படும் கலவைக் கூறுகள், சாயங்கள் (Paints) முதலியவற்றின் கலவை விகிதங்கள் வரையில், எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் கணிதப் பாடத் திட்டத்தில் இடம் பெறலாம்.

(iii) எண் கணிதம், வடிவியல், இயற்கணிதம் இவற்றின் சில தலைப்புகளைத் தொடர்புபடுத்தி அமைத்தல்

இயற்கணிதம், வடிவ கணிதத்தைக் காட்டிலும் கருத்திய லான தன்மை வாய்ந்தது. நடைமுறை வாழ்க்கையோடு அதன் தொடர்புகளும் அதிகமல்ல. மேலும், வடிவ கணிதத்திலுள்ள நிருபணத்தைக் காட்டிலும் அதிகமான ஆய்ந்தறியும் திறன் இயற் கணிதத்திற்குத் தேவைப்படுகிறது. முற்றொருமைகளுக்கும், ஈருறுப்புக் கோவைப் பெருக்கல்களுக்கும், வடிவியல் முறையில் எடுத்துக்காட்டுகள் கூறி விளக்கலாம். ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் காணும் கணக்குகள் ($\angle A + \angle B + \angle C = 180°$), ஒரு பல கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் $(2n-4)$ செங்கோணங்கள், ஒரு குவிந்த பல கோணத்தின் வெளிக்கோணங் களின் கூடுதல் = 4 செங்கோணங்கள், இவற்றை இயற்கணிதப் பயிற்சிகளாக அமைத்துக்கொடுக்கலாம்.

(உதாரணம்) ஒரு குவிந்த அறுகோணத்தின் உட்கோணங் களின் கூடுதல் என்ன?

n-பக்கம் கொண்ட பல கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் $= (2n-4) \times 90°$

∴ 6 பக்கம் கொண்ட பல கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் $= (2 \times 6 - 4) \times 90°$

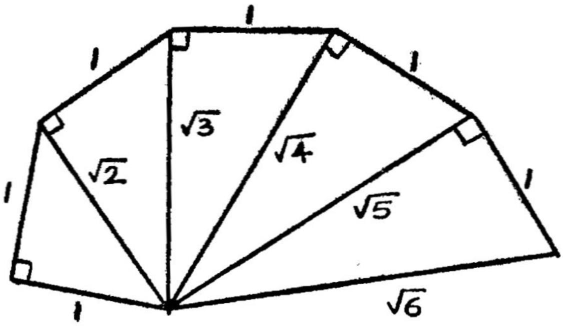
$= (12-4) \times 90°$

$= 8 \times 90° = 720°$

வர்க்கமூலத்தைப் பிதாகரஸ் தேற்றத்தோடு சேர்க்கலாம்.

(உதாரணம்) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ என்ற மதிப்புகளை வடிவ கணிதத்தின் மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம் (படம் 4).

இயல், எண் கணிதங்களை, வடிவ கணிதத்தோடு இணைப்பது விரும்பத் தக்கது. பொதுவாகக் கணிதச் செயல் முறைகளிலுள்ள



படம் 4

ஒன்றிணைந்த தன்மைகளையும், அவற்றின் தொடர்பையும் அறிவதால் மாணவர்களிடம் ஏற்படும் ஆர்வத்தையும், கணிதத்தின் மேலுள்ள நன்மதிப்பையும் இவ் விணைப்பு முறை வளர்க்கும்.

இயற்கணிதமும் எண் கணிதமும்

பொதுவாக மாணவனுக்குத் தேவைப்படும் இயற்கணிதம் விதியாகவோ, அல்லது சூத்திரமாகவோ இருக்கும். எளிய சூத்திரங்களைக் கொண்டுள்ள இயற்கணிதத் தொடக்கம், இக் கணிதத்தைப்பற்றி மாணவர்கட்கு எடுத்துக்காட்டுகிறது. இந்த வகையிலே பார்க்கும்போது, இயற்கணிதத்தை ஒரு மொழியாகவும் நாம் கருதலாம். இம் மொழி வாயிலாகச் சிந்தனை செய்வதற்கும் அவற்றை வெளிப்படுத்துவதற்கும் ஒரு வழியை நமக்கு வகுத்துத் தருகிறது.

1. சூத்திரமோ அல்லது சூத்திரத்திற்கு அடிப்படையாக உள்ள விதியோ நடைமுறை வாழ்விலுள்ள ஆரம்பக் கணிதம் சம்பந்தமான அளவீடுகளோடு (வட்டிகள், விகிதங்கள் போன்றவையோடு) தொடர்புள்ளதாக இருக்கவேண்டும். விகித சமம் இரண்டு விகிதங்களின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கின்றது.

2. எண் கணிதக் கணக்குகளில் சிக்கல் மிகும்போது, இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி அவற்றைத் தீர்க்கலாம்.

3. வரை படத்தினைப்பற்றி மாணவர் நன்கு அறிந்திருக்க வேண்டும். ஒருங்கமை சமன்பாடுகளையும், இருபடிச் சமன்பாடுகளையும், காலமும் தூரமும் என்ற தலைப்பில் வரும் கணக்குகளையும் வரைபடத்தின் மூலம் தீர்வு காணலாம்.

கணிதத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவுகளிலுள்ள பல தலைப்புகளின் உள் இணைப்பு

பின்னமும் விகிதமும்: பின்னத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு தோன்றியது விகிதம். ஒரு பொருளை 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், இவ் விரண்டு பாகங்களும் முழுப் பாகத்தோடு கொண்டுள்ள தொடர்பு $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$. இவற்றின் நேர் தொடர்பு $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$ இதையே 2 : 3 என்று எழுதுகிறோம்.

பின்னம், தசமப் பின்னம், சதவீதம்

இவை மூன்றும் ஒரே கருத்தைக் கொண்டவை. அதாவது ஒரு பொருளின் ஒரு பாகத்தையே இம் மூன்றும் குறிக்கின்றன. பொருளை ஒன்று என்று கொண்டால் (Part of a whole), அதன் பாகத்தைச் சாதாரணப் பின்னம் என்கிறோம். அதே பாகத்தை 10-ன் அடிப்படையில் குறிப்பது தசமப் பின்னம் ; நூறின் பாகமாகக் குறிப்பது சதவீதம். உதாரணமாக, $\frac{1}{3}$ என்பதை ·3333 என்றோ, $33\frac{1}{3}\%$ என்றோ குறிக்கலாம். அதேபோல் $\frac{1}{4}$ என்பதை ·25 என்று அல்லது 25% என்று குறிக்கலாம். ஆனால், இவற்றை இடத்திற்குத் தகுந்தாற்போல் பயன்படுத்த வேண்டும்.

இன்றைய கணிதப் பாடத்திட்டம் சமூகத்தின் தேவைகளுக்கேற்ப அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதாவது, பொதுமக்கள் தம் அன்றாடச் செயல்களிலும், தொழில் வகைகளிலும் எண்களைத் திறம்படப் பயன்படுத்தவும், உயர்கணிதம் கற்க விரும்புவோர் தேவையான அடிப்படைக் கணித அறிவை வளர்த்துக்கொள்ளவும் வழி வகுக்கின்றது.

பற்பல காரணங்களுக்காகக் குழந்தைகளைப் பள்ளிக்கு அனுப்புகின்றோம். வாழ்க்கைக்கு மிகவும் இன்றியமையாத அடிப்படைத் திறமைகளாகக் கருதப்படும் மொழிப் பயிற்சியும், எண் கணிதப் பயிற்சியும் இவற்றில் தலைசிறந்தன. இவ் வுலகில், சொந்த வாழ்க்கையில் அனுபவித்துத் தெரிந்துகொள்ளமுடியாத எத்தனையோ தகவல்கள் குழந்தைகளுக்குத் தேவைப்படுகின்றன. குழந்தைகளின் இயற்பாங்கினையும் நன்மனப்பான்மையையும் வளர்க்கும் முறையில் அவற்றிற்கு வாய்ப்பளிக்க வேண்டியது அவசியம். குழந்தையின் முழுமையான வளர்ச்சிக்கு அதனிடம் இயற்கையாக அமைந்துள்ள விருப்புவெறுப்புகளை அறிந்து அறிவை வளர்ப்பதற்காகப் பாடத்திட்டங்கள் வகுக்கப்பட்டாலும் அவற்றை முறைப்படுத்தி அவர்களுடைய மனநிலைக்கேற்றபடி கற்பிப்பது ஆசிரியரின் தலையாய கடமையாகும்.

4. கற்பித்தல் முறைகள்

கணிதம் எவ்வாறு கற்பிக்கப்பட வேண்டும்?

கணிதத்தை நன்கறிந்து கொள்ளுவதற்கு அசாதாரணமான ஒரு மனநிலை தேவை என்று மாணவர்களல்லாமல் பிறரும் நினைக்கின்றனர். ஒழுங்காகவும் நன்ருகவும் எடுத்துரைக்கப்பட்டால் பள்ளிக் கணிதத்தில் இருக்கும் பகுத்தறிலின் முடிவு எந்தச் சாதாரண அறிவுக்கும் புரியும். இந்தப் பகுத்தறிவு ஆற்றல் இல்லாத ஒருவன் அன்ருட வாழ்க்கையில் அவனிடம் எதிர்பார்க்கப்படும் இதைவிடக் கடினமான காரியங்களை எப்படிக் காரணப்படுத்தி அறியமுடியும்?

அடிப்படைக் கணிதம் கற்பதற்கு மிகச் சாதாரணமான பொது அறிவு மட்டுமே போதுமானது. இதற்கு மிக்க நுண்ணறிவு தேவையென்று பலர் கூறுவது வெறும் கற்பனையேயாகும். கல்வியின் பொது நோக்கங்களையோ அல்லது குறிப்பிட்ட ஒரு பாடத்தைக் கற்பித்தலின் நோக்கங்களையோ எந்த முறையில் ஆசிரியர் கைகூடச் செய்தாலும் அம் முறை சிறந்ததேயாகும். அறிவை ஊட்டுவது மட்டுமே கற்பிப்பதன் குறிக்கோளாகிவிடாது. போதுமான அறிவு புகட்டுவதோடு மாணவரின் திறமையையும், வல்லமையையும் வளர்ப்பதற்கும், எண்ணங்கள், மனப்பான்மைகள் ஆகியவற்றைச் சீர்படுத்திச் சிறப்பும் சிக்கனமுமான வகையிலே கற்றுக்கொடுப்பதே ஆசிரியரின் கடமையாகும். மாணவர்கள் பாடத்தைப் படிப்பதற்கும், அப் பாடத்தில் தளராத ஆர்வம் கொள்வதற்கும், மாணவர்கள் அவற்றை ஒழுங்காகப் படிக்க வேண்டியது அவசியமாகும். பொதுவாக ஆசிரியர் எந்த அளவுக்கு மாணவர்களின் இயல்பான மனப்போக்குக்கு ஏற்பக் கற்பிக்கிருரோ அந்த அளவிற்குக் கற்பித்தல் பயனளிப்பதாக இருக்கும். கற்றலை ஊக்குவிப்பதில் கற்பிக்கும் முறையே முதன்மையானது. கற்பித்தலே கற்றலின் அடிப்படைச் செயல்முறையாகும்.

கணித ஆசிரியர் பல்வேறு கற்பிக்கும் முறைகளில் தேர்ந்திருத்தல் வேண்டும்.

கற்போரின் மனத்தில் நிலைத்துநிற்கக்கூடிய அளவில் கற்பிக்கும் பொருளை, ஆசிரியர், துணைக் கருவிகளையும் செயல்

முறைகளையும் பயன்படுத்தி எடுத்துரைக்கும் திறனைப் பொறுத்தே அவருடைய வெற்றி அமைகிறது. கற்றல், மாணவர்கள் செய்ய வேண்டிய செயலாதலால் அவர்கள் நன்கு கற்கக்கூடிய அளவிலே அவர்களுடைய செயல்களை அமைப்பதே ஆசிரியரின் கடமையாகும். கற்றலில் வெவ்வேறு நிலைகளையும் நன்குணர்ந்த திறமையான ஆசிரியரே, ஒவ்வொரு மாணவனின் கணித அறிவு வளர்ச்சிக்கும் வழிகாட்ட வேண்டும். ஒரே ஒரு முறையைக்கொண்டு மிகவும் பயனளிக்கக்கூடிய விதத்தில் கற்பிக்க முடியுமென்று யாரும் உறுதி கூற இயலாது. கற்பித்தல் உண்மையிலேயே பயனளிக்க வேண்டு மென்றால், பாடப் பொருளானது மாணவர்களின் வயதுக்கும், பட்டறிவிற்கும், நுண்ணறிவு வளர்ச்சிக்கும், ஆர்வத்திற்கும் ஏற்றவாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதாக அமையவேண்டும் என்பது அனைவரும் நன்கறிந்ததே. மேலும், பாடப் பொருளானது, ஆர்வ மூட்டும் வகையிலும், புரிந்துகொள்ளக்கூடிய வகையிலும் கற்பிக் கப்பட வேண்டும். இவற்றோடு பாடப்பொருளில் போதுமான பயிற்சியும் கொடுக்கப்பட வேண்டும். மாணவர்களிடம் ஏற்படுத் தப்பட்ட திறமைகளையும், பொதுக் கருத்துகளையும் அடிக்கடி பயன்படுத்தச் செய்வதோடு அவற்றைக் காத்தோம்புதலும் வேண்டும். எல்லா மாணவர்களும் ஒரே வேகத்திலோ அல்லது சமமான சராசரித் திறமையுடனோ கற்க இயலாது. எனவே, தனியாள் வேறுபாட்டையும் கருத்திற்கொண்டு அதற்கேற்றவாறு கற்பிக்க வேண்டும்.

கணிதம் கற்பிப்பதிலுள்ள அடிப்படைப் பிரச்சினைகள்

கணிதம் அதன் அமைப்பிலும், பயனிலும் பெருகிப் பரந்து வளரும் ஒரு பாடமாகும். ஒவ்வொரு புதிய பாடம் தொடங்கும் போதும் பின்வரும் அடிப்படைப் பிரச்சினைகள் ஆசிரியர் முன் எழுகின்றன. (1) புதிய கோட்பாடுகளையும் அவற்றின் தொடர் பையும் முதலில் புரிந்துகொள்ள உதவிசெய்தல், (2) புரிந்து கொண்ட கோட்பாடுகளை நிலைநிறுத்தவும், வலுப்படுத்தவும் துணை புரிதல், (3) புரிந்துகொண்ட கருத்துகளையும், திறன்களையும் காப்பதற்கு உதவுதல், (4) வெளி உலகச் சமூக அறிவுக்குகந்த சூழ்நிலைகளுக்கேற்றவாறு மாணவர்கள் திறமைகளையும், அறிந்து கொண்டவற்றையும் உபயோகிக்கும் வழியில் துணைசெய்தல்.

மேற்கண்ட நான்கு தன்மைகளும் ஒருங்கமைந்ததே சிறந்த கற்பித்தல் திட்டமாகும். எந்தக் குறிக்கோளுக்காகக் கற்றுக் கொடுக்கப்படுகின்றதோ, அதைப் பொறுத்தே முறையையும் தீர்மானிக்க வேண்டும். முயற்சியிலும் நேரத்திலும், சிக்கனமும்,

மாணவரின் பதில் குறிப்பும் பயனெய்துவதைக் காண்பதும் நற்பயனளிக்கும் கற்பித்தல் முறையின் முக்கியமான பண்புகளாகும். முழு வகுப்பிற்கும் பாடம் கற்பிக்கப்பட்டாலும், நல்லதொரு கற்பிக்கும் முறையானது ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் தனித் தனியே கற்பிப்பதுபோல் அமையவேண்டும்.

பழைய போதனை முறை அல்லது கூறும் முறை

இம் முறை அதிகார பூர்வமான 'இப்படிச் செய்' (do-it-this-way method) என்ற கற்பித்தல் முறையாகும். இம் முறையில் ஆசிரியர் அனைத்துக் கருத்துகளையும் முறைப்படுத்தித் தாமே கூறி விடுவார். மாணவர்கள் அவற்றைக் கேட்டு அப்படியே ஏற்றுக் கொள்ளவேண்டும். வேறு வகையில் பரிசோதித்தறிய வாய்ப்பு இல்லை. ஆசிரியர் எல்லாவற்றையும் அழுத்தந் திருத்தமாகக் கற்பிப்பதையே இங்குக் குறிக்கப்படுகிறது. மாணவர்களின் கூட்டுறவை எதிர்பார்ப்பதில்லை; உணர்ச்சிகளையும் பொருட்படுத்துவதில்லை. இம் மாதிரி ஆசிரியர் எல்லாவற்றையும் கூறும் முறை கல்லூரி மாணவர்களுக்குப் பொருந்தலாம்; பள்ளிகளில் இம் முறையைப் பின்பற்றுவது வருந்தத்தக்கதாகும்.

கற்பித்தலுக்கு உதவக்கூடிய சில கோட்பாடுகளை ஹெர்பார்ட் ஸ்பென்சர் (Herbart Spencer) ஆசிரியர்களுக்கு உருவாக்கித் தந்துள்ளார். இவை பின் வருவனவாகும்:

1. தெரிந்தவற்றிலிருந்து தெரியாதனவற்றிற்குப் போதல் (Known to unknown).

2. எளிமையிலிருந்து சிக்கலுக்குப் போதல் (Simple to complex).

3. சிறப்பிலிருந்து பொதுவிற்குப் போதல் (Partlcular to general).

4. காட்சிப் பொருள்களினின்று கருத்துப் பொருளுக்குச் செல்லல் (concrete to abstract).

இந்த அடிப்படையில் போதனு முறைகள் அமைந்தால் மாணவர்களின் கற்றல் திறனும், கற்றதை மனத்தில் இருத்தித் தகுந்த இடங்களில் பயன்படுத்தும் திறனும் பாராட்டத்தக்க விதத்தில் வளரும். கணிதம் கற்பிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் சில முக்கியமான முறைகளாவன : விதிவருமுறை, விதி விளக்கமுறை, பகுப்பு முறை—தொகுப்பு முறை, கண்டறிமுறை, செயல்திட்ட முறை முதலியவை கருதப்படுகின்றன. இவை ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும்

தொடர்பற்றவை என்று கூறமுடியாது, சில முறைகள் ஒன்றை யொன்று சார்ந்தும் இருக்கின்றன. ஆயினும் ஒவ்வொன்றிற்கும் தனித் தன்மைகள் உண்டு; ஒவ்வொன்றும் பயன்படுத்தப்படும் சூழ்நிலைகளும் பொதுவாக வேறுபட்டவையாகும்.

விதிவருமுறை அல்லது தொகுத்தறிமுறை
(Inductive Method)

சாதாரணமாக அனைவராலும் பயன்படுத்தப்படும் ஆய்வு முறை, தொகுத்தறி முறையாகும். விதிவருமுறையிலே குறிப்பிட்ட கருத்திலிருந்து பொதுக் கருத்தையும், புலனியல்பானவற்றிலிருந்து கருத்தியல் கருத்துகளையும் பெறுகிறோம். தனிப்பட்ட சில விவரங்களை ஆய்ந்தறிவதன் மூலம் பொதுவான கூற்றையோ, உள்ளடங்கியுள்ள உண்மையையோ ஒருவர் கண்டறியலாம். கணிதப் பாடங்களில் பெரும்பாலனவற்றை இம் முறையில் கற்பிக்கலாம். சிறப்புமிக்க போதனையானது, மாணவர்கள் சரியான பொதுமைப் பாட்டைக் காண்பதற்கேற்றவாறு அமையவேண்டும். அதாவது, ஒரு பொது விதியையோ, சூத்திரத்தையோ மாணவர்கள் அமைக்கும்வகையில் போதனை இருந்தால் அதற்கு அறிவியல் தொகுத்தறி முறை (Scientific induction) என்றும், ஆசிரியரே தனிப்பட்ட உதாரணங்களை நேரில் விளக்கி அதிலிருந்து விதி அல்லது சூத்திரத்தை ஊகிக்கச் செய்தால் அதற்குச் செய்து காட்டல் தொகுத்தறிமுறை (Demonstrative induction) எனவும் பெயர். வரைதலும், அளத்தலும் சம்பந்தப்பட்ட விவரங்களை முந்திய முறையிலும், கணக்கீடுகள் அடிப்படையில் அமையும் விவரங்களைப் பிந்திய முறையிலும் கையாளலாம். பல்லாண்டுகளுக்கு முன் ஜெர்மன் கல்வியாளர் ஹெர்பார்ட் ஸ்பென்ஸர் பாடத்தைப் போதிப்பதில் முறையான படிகளை ஏற்படுத்தினர். அவை உளவியல் அடிப்படையிலே அமைந்துள்ளன. இயற்கையிலேயே திறன்பெற்ற ஆசிரியரொருவர் புதிய பாடத்தைக் கற்பிக்கும்போது இயல்பாகவே ஹெர்பார்டின் முறையைக் கையாளுவார். இந்தத் தொடர்ச்சிப் படிகள் அனுபவமற்ற ஆசிரியருக்கு வழிக்காட்டும் தகுதி வாய்ந்தது.

விதிவரும் வளர்ச்சிப் பாட முறையின் ஐந்து படிகளாவன

I. ஆயத்தம் (Preparation): அ) மாணவனின் முன்அனுபவத்தின் அடிப்படையைக் காணுதல், அல்லது, பிரச்சினைக்குரிய கணக்கில் அனுபவம் அளித்தல். ஆ) பிரச்சினையின். அத்தியாவசியத்தை உணரச்செய்தல்.

இந்தப் படியானது பாடத்தின் நோக்கத்தை மாணவர்கள் சுருக்கமாக அறிய உதவுகிறது. மாணவர்கள், அவர்கள் நிலைக்கு மீறிய அளவிலே விவரங்களை அறிந்திருப்பதாக நினைப்பது, பல ஆசிரியர்களிடையே காணப்படும் குறைபாடாகும். புதியனவற்றை அறிந்துகொள்ளும் அவசியத்தை மாணவர்கள் உணர, அவர்கள் முன்அனுபவத்தை நினைவுகூரச் செய்வது அவசியமாகும். இவ்வாறு வகுப்பானது பாடத்தை ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய நிலைக்குக் கொண்டுவரப்படுவதோடு மாணவர்களின் ஆர்வமும் தூண்டப்படுகின்றது.

II. எடுத்துக்கூறல் (Presentation): இதில் முக்கியமான இரு படிகள்: (அ) தெரிந்த பல செய்திகளிலிருந்து எடுத்துக்கொண்ட பொருளுக்குத் தொடர்பான எண்ணங்களின்பால் மாணவர்கள் மனத்தை ஒருமுகப்படுத்துவது; (ஆ) புதிய தகவல்களையும் கருத்துகளையும் முன்பே அறிந்தவற்றோடு தொடர்புபடுத்தி நோக்குவது.

III. ஒப்பிடுதலும், சுருக்குதலும் (Comparison & abstraction): பிரச்சினையைத் தெளிவாக வரையறுத்து அதைப் புரிந்துகொண்ட பிறகு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஒப்பிட்டு, பிரச்சினையின் முடிவிற்குத் தேவையான பொருளை அவற்றிலிருந்து பிரித்தெடுத்தல் அவசியமாகும். இவ்விதமாகப் புதிய தகவல்களை முன்பே அறிந்தவற்றோடு தொடர்புபடுத்துகிறோம்.

IV. பொதுவிதி காணல் (Generalization): பொது விதியென்பது, முக்கியத்துவம் வாய்ந்த கருத்துகள் பலவற்றால் தெளிவாக எடுத்துக்கூறப்பட்ட பொதுக் கருத்தாகும். இது விதியாகவோ, வரையறையாகவோ, சூத்திரமாகவோ இருந்தாலும் செயல்முறை ஒன்றேயாம்.

V. விதியைச் செயற்படுத்தல் (Application): கணிதத்தின் பயன் முறைகளை அறியும்வரை எந்த மாணவனும் பொது விதிகளின் முக்கியத்துவத்தை அறியமுடியாது. அவற்றை ஆசிரியர் நன்றாகக் கற்பித்தால் அவற்றின் எழிலையும், அவனுடைய சிந்தனை ஓட்டத்தில் அவை இடம் பெறும் விதத்தையும் அறிவதோடு அதில் ஆர்வமும் கொள்வான். ஆனால், அவற்றின் உண்மையான முக்கியத்துவத்தைச் செயல்படுத்தும் போதுதான் நன்கறிந்து கொள்வான்.

உதாரணம்: இருபடிச் சார்பலன்களைக் காரணிப்படுத்துதல்.

1. ஆயத்தம்: 8×7-ன் பெருக்கற் பலன் யாது? 56-ன் காரணிகள் யாவை? 8-ம், 7-ம் 56-ன் காரணிகளாகும். இதன்

மற்றக் காரணிகளாவன $(-8,-7)$; $(-1,-56)$; $(1,56)$; $(4,14)$; $(-4,-14)$; $(2,28)$; $(-2,-28)$ அதேபோல்,

கேள்வி	விடை
1. ab-ன் காரணிகள் யாவை?	$(-a, -b)$; (a, b)
2. $-cd$-ன் காரணிகள் யாவை?	$(-c, d)$; $(-d, c)$
3. $(3x+6)$-ன் காரணிகள் யாவை?	$[3, (x+2)]$; $[-3, -(x+2)]$

ஓர் எண்ணை அல்லது கோவையை அதன் காரணிகளாகப் பிரித்தலே காரணிப்படுத்துதல் ஆகும்.

II. எடுத்துக் கூறல்: பின்வருமாறு கேள்விகள் கேட்டு விடையை வரவழைக்க வேண்டும். (அ) $(2x^2+3x-2)$, (ஆ) (x^2-6x+8) கோவைகளில் x^2-ன் குணகம் என்ன? x-ன் குணகம் என்ன? மாறிலி என்ன? x-ல் முதல்படி, இரண்டாம்படிக் கோவைகளுக்கு உதாரணம் கொடு. அதில் x^2-ன் குணகம், x-ன் குணகம், மாறிலி இவற்றைக் கூறு? ஒருபடிக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனைக் கண்டுபிடித்துக் கீழே கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

காரணிகள்	பெருக்கற்பலன்	கரும்பலகை வேலை
1. $(x+2)(x+3)$	x^2+5x+6 அல்லது $x^2+x(2+3)+\overline{2\times3}$	$x+2$ $x+3$ x^2+2x $3x+6$ $x^2+x(2+3)+6$
2. $(x-6)(x-8)$	இதேபோல் $x^2+x(-6-8)+(\overline{-6\times-8})$	
3. $(x-5)(x+7)$	$x^2+x(-5+7)+(\overline{-5\times7})$	
4. $(x+a)(x+b)$	$x^2+x(a+b)+(\overline{a\times b})$	

III. ஒப்பிடுதலும், சுருக்குதலும்: பெருக்கற் பலனில் (இரண்டாம் பத்தி) x^2-ன் குணகம் ஒன்று, மாறிலியின் காரணிகளுக்கும் x-ன் குணகங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கவனி.

IV. பொது விதி காணல்: மாறிலியை இரு காரணிகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். இவற்றில் ஏதாவது ஒரு ஜோடிக் காரணிகளின் கூடுதல், x-ன் குணகத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

V. விதியைச் செயற்படுத்தல்

உதாரணம்—1.

x^2-6x+8 ஐக் காரணிப் படுத்து.

x-ன் குணகம் $= -6$ மாறிலி $= +8$.

$+8$-ன் காரணிகள் என்ன? $(+8,+1)$; $(-8,-1)$; $(-4,-2)$. $(4,2)$ இதில் எந்த ஜோடி x-ன் குணகத்திற்குப் பொருத்தமானது? மூன்றுவது ஜோடி. எனவே, $(x^2-6x+8)=(x-4)(x-2)$.

உதாரணம்—2.

தனிப்பட்ட விவரங்கள் :

1. முதலிரண்டு ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+3=4=\underline{2}^2$
2. முதல் மூன்று ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+3+5=9=\underline{3}^2$
3. முதல் நான்கு ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+3+5+7=16=\underline{4}^2$
பொதுமைப்பாடு	
∴ முதல் $\underline{n}$ ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+3+5+7+\ldots(2n-1)=\underline{n}^2$
செயற்படுத்தல்	
ஆதலால் முதல் $\underline{30}$ ஒற்றைப் படை இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+3+5+7+\ldots=30^2=900$

விதிவரு முறை, பயன்கள்

1. இம் முறை எளிதில் புரிந்துகொள்வதற்கு ஏதுவாயிருக்கிறது. எளிய உதாரணங்களிலிருந்து கணிதக் கோட்பாட்டைப் பெறப் பெரிதும் உதவுகின்றது. 'ஏன்' 'எவ்வாறு' போன்ற சந்தேகங்களைத் தொடக்கத்திலேயே தெளிவாக்குகிறது.

2. சூத்திரங்களையும், விதிகளையும் கண்டுபிடிப்பதில் மாணவர்களும் பங்கு கொள்வதற்குப் பெரிதும் வாய்ப்பளிக்கிறது.

3. உற்றுக்கவனித்தல், சிந்தித்தல், செய்துபார்த்தல், இவற்றை இந்த முறை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

4. பொருளுணராமல் மனனம் செய்து படிப்பதை இம் முறை தடுக்கிறது.

விதிவிளக்க முறை
(Deductive Method)

இம் முறையில், ஒரு பொது விதி அல்லது கொள்கையை எடுத்துக்கொண்டு, அதை ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட உதாரணங்களிலும் பயன்படுத்திச் சரிபார்க்கப்படுகின்றது. இதில் பொதுவிதிகளைப் பயன்படுத்திச் சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்க்கலாம். அதாவது, இது ஹெர்பார்ட் முறையின் செயல்முறை நிலை.

உதாரணம்,

1. ஒரு வட்டவில் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம், மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தாங்கும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும் என்றால், ஓர் அரை வட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணம் என்று காட்டு.

2. $a^3 + b^3 + c^3 = 3\,abc$ என்றால், a, b, c-க்குள்ள தொடர்புகளை வருவி (deduce).

விதிவரு முறை, விதிவிளக்க முறைகள் இரண்டுமே வகுப்புப் போதனைக்குப் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. கணித வேலையானது விதிவருமுறையில் உருவாகி இறுதியில் விதிவிளக்க முறையில் அமைகிறது. மனித இனத்தின் வரலாற்றிலும் சரி, தனியொருவனின் வரலாற்றிலும் சரி, விதிவருதல் என்பது இறுதியில் அறியப்பட்டதேயாகும். ஆகவே, கணிதத்தைக் கற்பிக்கும்போது விதிவரு முறையில் தொடங்குவதே இயல்பானதாகும். சிறந்த ஆசிரியர்கள், கணித நிபுணர்கள் ஆகியோர் பலரும் இம் முறையையே பின்பற்றுகின்றனர். விதிவருமுறையில் கற்ற சூத்திரங்களையும், விதிகளையும் விதிவிளக்க முறையில் பயன்படுத்திப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணலாம். சிறந்த பாடம் ஒவ்வொன்றும், முதலில் விதிவரு முறையில் நடத்தப்பட்டாலும், விதிவிளக்க முறையையே இறுதியாகக் கொண்டுள்ளது. விதிவரு முறையானது விதிவிளக்க முறையின் முன்னோடி (Fore-runner) ஆகும். இரண்டும் தனித்தனியானவை என்றாலும் ஒன்று மற்றதன் மிகைநிரப்பு ஆகும். கற்பித்தல் நல்ல பலனைத் தரவேண்டுமாயின் இரண்டு வழிகளும் பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும்.

பகுப்பு முறையும் தொகுப்பு முறையும்
(Analytic and synthetic-Methods)

கணிதம் கற்பிக்கும்போது இவ் விரு முறைகளேயும் ஆசிரியர்கள் பயன்படுத்துவதுண்டு. கொடுக்கப்பட்ட தெரிந்த தகவல்களிலிருந்து தெரியாத தகவலேக் கண்டுபிடிக்க வழிசெய்யும் முறை தொகுப்பு முறை எனப்படும். மாருக, தெரியாத தகவலே உண்மையென எடுத்துக்கொண்டு தெரிந்த தகவல்களின்மூலம் அதை நிலேநாட்டுவதே பகுப்புமுறை யெனப்படும்.

தொகுப்பு முறையானது தெரிந்த உண்மைகளே ஒன்றுசேர்க்கும் (puts together). பகுப்பு முறையானது பிரச்சினேக்குரியதான கூற்றை மெய்யென்றும், பொய்யென்றும் தீர்மானிக்கக்கூடிய கூற்றுகளாகப் பிரித்துக்காட்டுகிறது (pulls apart). அடிப்படை வடிவ கணிதப் புத்தகங்களிலே பொதுவாகக் காணப்படும் நிரூபணங்களின் கூற்றுகள் (theorems) தொகுப்பு முறைக்குச் சான்ருகும். தெரிந்த விவரங்களிலிருந்தும், உண்மைகளிலிருந்தும் தொடங்கப் பட்டே, தேற்றங்கள் படிப்படியாக நிரூபிக்கப்படுகின்றன. கீழே கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் பகுப்பு முறைக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு.

$x^2+bx=C$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவேண்டுமாஞல்

$x^2+bx+\frac{b^2}{4}=C+\frac{b^2}{4}$ இதைத் தீர்க்கவேண்டும்.

அல்லது $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\left(C+\frac{b^2}{4}\right)$ ஐத் தீர்க்கவேண்டும்.

அல்லது $\left(x+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{C+\frac{b^2}{4}}$ ஐத் தீர்க்கவேண்டுமாஞல்

$\left(x+\frac{b}{2}\right)=+\sqrt{C+\frac{b^2}{4}}$ —ம்

$\left(x+\frac{b}{2}\right)=-\sqrt{C+\frac{b^2}{4}}$ ஐத் தீர்க்கவேண்டும்.

தொகுப்பு, பகுப்பு முறைகள், வடிவியல், எண் கணிதப் பாடங்களில் எவ்வாறு பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதைப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் விளக்கலாம்.

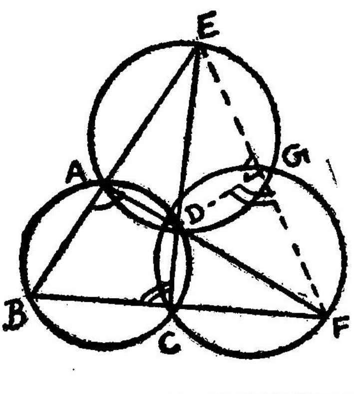
ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம், BA-ம், CD-ம் E-லும், BC-ம் AD-ம் F-லும் சந்திக்கின்றன. △ADE, △CDF-ன் சுற்றுவட்டங்கள் G-ல் சந்தித்தால், EGF ஒரு நேர்கோடு என நிரூபி.

தெரியாதது:—EGF என்பது ஒரு நேர்கோடு.

தெரிந்தது:—ABCD, ADEG, CDGF என்பது வட்ட நாற்கரங்கள்.

தொகுப்பு முறையில் நிரூபணம்

கூற்று (Statement)	காரணம் அல்லது சான்று (reason or authority)
$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ ...(1)	ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம்
$\angle BAD = \angle DGE$ ....(2)	AEGD ஒரு வட்ட நாற்கரம் வெளிக்கோணம் $\angle BAD$ = நாற்கரத்தின் உள் எதிர் கோணம்
$\angle BCD = \angle DGF$ ....(3)	CDGF ஒருவட்ட நாற்கரம் வெளிக்கோணம் $\angle BCD$ = நாற்கரத்தின் உள் எதிர் கோணம்
(2)யும் (3)யும் கூட்டுக. $\angle BAD + \angle BCD = \angle DGE + \angle DGF = 180^\circ$	முதற் கூற்றின்படி
$\therefore$ $\angle DGE + \angle DGF = 180^\circ$ $\angle DGE$-ம் $\angle DGF$-ம் அடுத்துள்ள கோணங்களாகும்.	
$\therefore$ EGF ஒரு நேர்கோடாகும்	



பகுப்பு முறையில் நிரூபணம்

1. தெரியாதது:—EGF என்பது ஒரு நேர்கோடு.

தெரிந்தது:—ABCD, ADEG, CDGF என்பது வட்ட நாற்கரங்கள்.

கூற்று	காரணம் அல்லது சான்று
EGF என்பது ஒரு நேர்கோடானுல் $\angle DGF + \angle DGE = 180°$ ...(1) என்பது உண்மை.	
ஆனுல், $\angle DGE = \angle BAD$ ......(2), $\angle DGF = \angle BCD$ ......(3) (2)-யும், (3)-யும் சேர். $\angle DGE + \angle DGF = \angle BAD + \angle BCD$	ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டுவதால் ஏற்படும் வெளிக் கோணம் உள் எதிர் கோணத்திற்குச் சமம்.
(1) உண்மையானுல் $\angle BAD + \angle BCD = 180°$	ABCD என்ற நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களின் கூடுதல்
∴ ABCD வட்ட நாற்கரம் என்பது உண்மை	இது தெரிந்ததே
∴ EGF ஒரு நேர்கோடு.	

2. A, B-யிடம் 12% லாபத்திலும், B, C-யிடம் 20% லாபத்திலும், C, D-யிடம் 10% நஷ்டத்திலும் ஒரு வீட்டை விற்கும்போது D ரூ. 3,02,400 கொடுத்து அவ் வீட்டை வாங்கினுன்.

A அவ் வீட்டிற்கு எவ்வளவு கொடுத்தான்.

தெரிந்தது : D ரூ. 3,02,400 கொடுத்தது—அதாவது D-ன் கொள்விலை.

தெரியாதது: A எவ்வளவு கொடுத்தான் அல்லது A-ன் கொள்விலை.

தொகுப்பு முறை

D ரூ. 3,02,400-க்கு ஒரு வீட்டை வாங்கினால்

C-ன் வாங்கிய விலை

$$— ரூ. 302400 \times \frac{100}{90} \text{ க்குச் சமம்.}$$

அதாவது B-ன் வாங்கிய விலை

$$— ரூ. 302400 \times \frac{100}{90} \times \frac{100}{120} \text{ க்குச் சமம்}$$

அதாவது A-ன் வாங்கிய விலை

$$— ரூ. 302400 \times \frac{100}{90} \times \frac{100}{120} \times \frac{100}{112} \text{ க்குச் சமம்.}$$

$$= ரூ. 2,50,000.$$

பகுப்பு முறை

A-ன் கொள்விலை B-ன் கொள்விலையில் $\frac{100}{112}$ பாகம்

B-ன் கொள்விலை C-ன் கொள்விலையில் $\frac{100}{120}$ பாகம்

C-ன் கொள்விலை D-ன் கொள்விலையில் $\frac{100}{90}$ பாகம்

D-ன் கொள்விலை ரூ. 3,02,400

$$\therefore \text{ A-ன் கொள்விலை } = \frac{100}{112} \times \frac{100}{120} \times \frac{100}{90} \times 302400$$

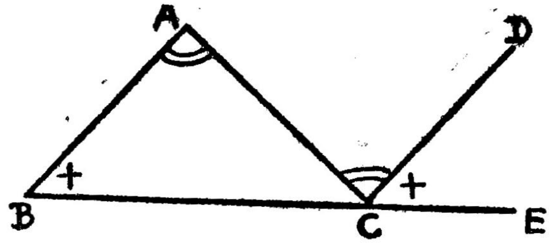
$$= ரூ. 2,50,000$$

தொகுப்பு, பகுப்பு இரண்டும் சிறந்த தருக்க முறைகளே.

வடிவகணிதத்தில் பகுப்பு முறையும், தொகுப்பு முறையும்

மெய்ப்பிக்க வேண்டிய பகுதியைக் கூறுகளாகப் பிரித்து ஆய்வு செய்வதைப் பகுப்பு முறை என்றும், அறிந்த கருத்துகளை ஒன்று திரட்டிச் சேர்த்து, கேட்டிருக்கும் தேற்றத்தை மெய்ப்பிப்பதைத் தொகுப்பு முறை என்றும் கூறலாம். தொகுப்பு முறையின் மூலம் வரும் மெய்ம்மை விளக்கத்தை (proposition) நிலைநாட்டுவது

பெயரளவில் மிகச் சிறந்ததாகப் பட்டாலும், அமைப்புகளைக் கண்டுபிடித்து வரைவதற்கோ அல்லது நிரூபணத்தைக் கண்டு பிடிப்பதற்கோ இது வழிகாட்டுவது இல்லை.



படம் 6.

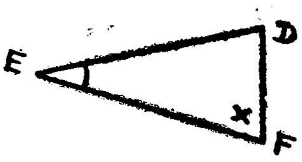
உதாரணம்: ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் $\equiv 180^\circ$ என்ற தேற்றத்தை நிரூபித்தலில், அமைப்பாக (construction) பக்கம் BCஐ நீட்டி, AB-க்கு இணையாக CD வரையப்பட்டுள்ளது. தேற்றம் இந்த அமைப்பின் அடிப்படையில் நிரூபிக்கப்பட்டாலும், முதலில் இந்த அமைப்பின் காரணம் எது என்பது தெரிவது இல்லை.

பகுப்பு முறையில், கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலை விடுவிப்பதற்குச் சிக்கலின் முடிவை உண்மை என்று ஊகித்துக் (assume) கொள்ள வேண்டும். இதிலிருந்து படிப்படியாகப் பின்னோக்கிச் செயல்படுவதால் ஊகத்தின் விளைவுகளை அறியலாம். இதன் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட, சிக்கலுக்கும் தெரிந்த நிபந்தனைகள் அல்லது தேற்றங்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகளை அறிய முடிந்தால், தேவையான அமைப்புகளை (constructions) வரையலாம். இந்த முறை வெற்றி பயக்குமானால் ஊகத்தின் அடிப்படையில் அமைந்த படிகளைத் தகுந்தபடி மாற்றி, அமைப்பும், நிரூபணமும் தொகுத்துக் (synthetic proof) கொடுக்கப்படலாம். கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலை விடுவிப்பதற்காக ஏற்கெனவே தெரிந்த கோட்பாடுகளைப் பயன் படுத்தி, உண்மையை வெளிப்படுத்துவது வடிவியல் பகுப்பு முறை (Geometrical analysis) எனப்படும். பொதுவாக, கடினமான சிக்கல்களை விடுவிப்பதற்கு இது ஒரு சிறந்த, இயல்பான வழியாகக் கருதப்படுகின்றது. இது ஒரு தனிப்பட்ட முறை என்று கூற முடியாது என்றாலும், அமைப்புகளை ஊகிக்க இது ஒரு சிறந்த வழியாகும்.

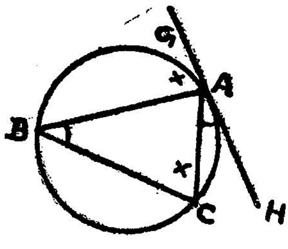
உதாரணம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்திற்குள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைதல்.

ABC கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டம், DEF கொடுக்கப் பட்டுள்ள முக்கோணம்.



படம் 7.



படம் 8.

பகுப்பு முறை (Analysis)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் பரிதியில் உள்ள A என்னும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து AB, AC என்ற நாண்கள், B,Cஐ இணைக்கும் போது,

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ஆக இருக்குமாறு வரையப்பட்டால் $\angle A = \angle D$ ஆக இருக்கும்.

ஆகவே, $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ இரண்டும் சமகோண முக்கோணங் கள், அதாவது வடிவொத்தவையாக இருக்கும்.

புள்ளி A-ல், கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்கு GAH என்ற தொடுகோடு வரையப்பட்டால்,

$$\angle HAC = \angle B = \angle E$$

$$\angle GAB = \angle C = \angle F$$ ஆக இருக்கும்.

∴ A-ல் தொடுகோடு வரைய வேண்டும் என்பதை ஊகிக் கலாம்.

இதிலிருந்து பின்வரும் அமைப்பு முறையைத் தொகுத்துக் கூறலாம். அமைப்பு: வட்டப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி A-ல் GAH என்ற தொடுகோடு வரை,

A-ல் $\angle GAB = \angle F$ ஆக இருக்குமாறு ABஐ வரைக.

$\angle HAC = \angle E$ ஆக இருக்குமாறு ACஐ வரைக.

பிறகு BCஐ இணை.

$\triangle ABC$ தேவையான முக்கோணமாகும்.

துணைப்பயிற்சிகளை (Riders) 'இரு எல்லைக'ளிலிருந்தும் (worked from both ends) தொடங்கலாம். எது பயனளிக்குமோ அந்த முறையைத் தேர்ந்து கொள்ளலாம். இரண்டு முறைகளின் கலப்பாகக்கூட இது சில நேரங்களில் அமையலாம்.

கண்டறி முறை

(The Heuristic Method)

அறிவியல் பாடம் கற்றுக் கொடுப்பதற்காகப் பேராசிரியர் ஆர்ம்ஸ்டராங் என்பவரால் இம் முறை முதன்முதலாகப் பயன் படுத்தப்பட்டது. அதில் அவர் கண்ட வெற்றியே, கல்வித் திட்டத்திலுள்ள மற்றப் பாடங்களுக்கும் இம் முறையைப் பயன் படுத்தக் காரணமாயிற்று. 'ஹுரிஸ்கோ' (heurisco I find out) என்ற கிரேக்கச் சொல்லுக்கு 'நான் கண்டுபிடிக்கிறேன்' என்பது பொருளாதலால், அச் சொல்லைக்கொண்டு இம் முறை வழங்கப் படுகிறது. இம் முறையில் மாணவர்கள் தாங்களாவே உண்மை களைக் கண்டுபிடிக்குமாறு தூண்டப்படுகின்றனர்.

அறிவியல் மனப்பான்மையை மாணவர்களிடம் ஊட்டுவதே இம் முறையின் நோக்கமாகும். பொதுமைப்பாடுகளைக் காண்பதற்கு முன்னால் உண்மைகளைச் சரியாகக் கண்டறியவும் அவற்றை ஒழுங்கான முறையிலே ஒருங்கிணைக்கவும் இம் முறை வலியுறுத்துகின்றது. மாணவர்கள் பாடம் படிப்பதோடு, ஆராய்ச்சிகளைச் செய்யவும். உற்றுக்கவனிக்கவும், வினாக்கள் வினவவும், தாங்களாகவே வேலைகள் செய்யவும் இது தூண்டு கிறது.

கணிதத்தில் கண்டறி முறையைப் பயன்படுத்திச் சிந்தனைக் கணக்கைச் செய்யுமாறு மாணவர்களிடம் கூறலாம். அப்போது ஒவ்வொருவரும் தனித்தனியே பிரச்சினையை ஆராய்ந்து பார்ப் பார்கள். மாணவர்கள் தங்களுக்கு எழக்கூடிய சந்தேகங்களைக் கேட்டுத் தெரிந்துகொள்ள உரிமையளிக்கப்பட வேண்டும். ஏனெனில், இந்த முறையானது, மாணவர்களைக் கேள்விகள் கேட்கத் தூண்டவும் அவர்கள் அவற்றிற்குப் பதிலளிப்பதையுமே குறிக்கோளாகக் கொண்டிருக்கிறது. மாணவர்களிடம் சுறு சுறுப்பையும் ஆர்வத்தையும் ஊட்டவல்ல கேள்விகளை ஆசிரியர் அடிக்கடி கேட்க வேண்டும். எனவே, வினாக்களைக் கேட்கும் கலையை ஆசிரியர் அறிந்திருத்தல் அவசியம். மாணவர்களின் வயது, பட்டறிவு, மனநிலை ஆகியவற்றை ஆசிரியர்கள் கவனித்து, மாணவர்கள் ஆராய்ந்தறிவதற்கேற்ற கணக்குகளைத் திட்டமிட்டு

அமைக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட வேலே ஊக்க மூட்டுகிற அளவிலே அமைந்திருக்கிறதா வென ஆசிரியர் கவனிக்க வேண்டும். கண்டறிமுறையை விதிவருமுறை அல்லது விதிவிளக்க முறையில் நடத்தும் பாடங்களில் உபயோகப்படுத்தலாம். கண் டறிய விரும்பும் மாணவர்களைக் கேள்விகள் கேட்டும், மாதிரி களைப் போட்டுக் காட்டியும், செயல்முறைகள் சிலவற்றைக் கவனிக்கச் சொல்லியும், விளைவுகளை ஒப்பிட்டும், பொதுமைப் பாட்டைக் காணுமாறு கூறலாம். இத்தகைய சுயேச்சையான செயல்கள் கண்டறி முறையின் பயனை விளக்குகின்றன.

மேலும், ஒரு விதியோ அல்லது சூத்திரமோ நிறுவப்பட்டபின் அதனை மாணவர்கள் புரிந்துகொண்டார்களா என்று காண்பதற் காக எடுத்துக்காட்டுகளும், பயிற்சிகளும் கொடுக்கப்படுவதும், அவற்றின் வரம்பு என்ன? விதிவிலக்குகள் யாவை? என்று சோதிப் பதற்காக மாணவர்களை ஆசிரியர் கேள்விகள் கேட்பதும் கண்டறி முறையின் நோக்கங்களாகும். கேள்விகள் மூலம் பாடத்தை அறிந்து கொள்வது குழந்தைகளின் இயல்பையொட்டி அவர்கள் விரும்பி, உணர்ந்தறியும் முறையாகும். இது அவர்களுடைய அறிவாற்றலையும் வளர்க்கும். அவர்களுக்குக் கேள்வி கேட்கும் வாய்ப்பளிக்க வேண்டும். விதிவரு முறையிலும், விதிவிளக்க முறையிலும் சிக்கல்களை விடுவிப்பது கண்டறி முறையைச் சேர்ந்ததேயாகும்.

நன்மைகள்

1. அறிவியல் மனப்பான்மையை வளர்ப்பதோடு, கண்டறிய வும், சோதித்தறியவும் இம் முறை ஊக்குவிக்கின்றது.

2. தன்னம்பிக்கையையும், தானே இயங்கும் மனப் பக்குவத்தையும் மாணவர்களிடம் வளர்க்கிறது.

3. தனித்தனியே ஒவ்வொரு மாணவனையும் கவனிக்க வாய்ப்பிருப்பதால், ஆசிரியர் மாணவர்களோடு நெருங்கிய தொடர்புகொள்ள முடிகின்றது.

4. மாணவர்களின் அறிவாற்றலை வளர்க்க வாய்ப்பளிக் கின்றது.

குறைபாடுகள்

1. இம் முறையைப் பின்பற்றுவதால் பாடத்தை மிக நிதான மாகவே நடத்தமுடியும்.

2. மாணவர்களாகவே கண்டுகொள்ள முடியாத பல உண்மைகளை ஆசிரியர்கள் சொல்லியே ஆகவேண்டும்.

3. சிறிது முன்னறிவு இருக்கக்கூடிய, இடைநிலை, உயர் நிலைப் பள்ளி மாணவர்களுக்கே இம் முறைப்படி கற்பிக்கலாம்.

சோதனைச் சாலை முறை (Laboratory method)

கல்வி முறையில் ஆசிரியர் செய்திகளையும் கருத்துகளையும் கூறிக் கொண்டேயிருக்க, மாணவர் இவற்றைக் கேட்டு, புரியாமல் மனனம் செய்தால் கல்வியின் முழுப் பயனையும் அடைய முடிவ தில்லை. இக் குறையை நீக்கும் முயற்சியில் உருவானதே சோதனைச் சாலை முறையாகும். ஒருவர் சொல்ல மற்றவர் கேட்பது அறிவைப் பரப்புவதற்குரிய ஒழுங்கான முறை யென்பதற்கு ஐயமில்லை. ஆசிரியர்கள் மூலமாகக் கேட்டும் நூல்களின் வாயிலாகப் படித்தும் பல கருத்துகளை அறிந்துகொள்கிறார்கள். மாணவர்களைப்பற்றி ஒன்றும் கருதாது ஆசிரியர்கள் கூறிக்கொண்டேயிருப்பது நெறி பிறழ்ந்த கல்வியேயாகும். ஏனெனில், புதுக் கருத்துகளைத் தெரிந்துகொள்ள இது சிறந்த முறையன்று; மேலும், கல்வி முறை யில், கருத்துகளை மட்டும் தெரிந்துகொள்வது முழுமையான கல்வியன்று.

தமது நாட்டிலும் பிற நாடுகளிலும் பெயர்பெற்று விளங்கிய ஜான் டூயி (1859-1952) என்ற அமெரிக்கக் கல்வி நிபுணரின், தத்துவமான, 'தேர்வாய்வு முறை'யில் (experimentalism) அல்லது, 'செய்து கற்றல்' மனனம் செய்வதைக் காட்டிலும் எவ்வளவு சிறந்தது என்பதை வற்புறுத்தியிருக்கிறார். ஆய்வுக்கூடம், தொழிற்சாலை முறைகள், மாணவரின் ஆக்கத்திறனை வளர்க்கும் என்ற நோக்கத்தில், இம் முறைகளை ஆதரித்துவந்தார்.

பொதுவாக, சோதனைச்சாலை, அறிவியற் பாடங்களாகிய இயற் பியல், வேதியியல் முதலிய பாடங்களுக்கு உரித்தானது என்ற கருத்து இருந்துவருகிறது. நடைமுறைக் கல்வித் திட்டத்திலும் அறிவியற் சோதனைச் சாலையின் அமைப்பிற்கே கட்டணம் (fees) செலுத்தப்படுவது பழக்கத்தில் இருந்துவருகிறது. சோதனைச் சாலை முறையில் பெறுகின்ற நன்மைகள் கணிதப் பாடப் போதனை யில் எவ்வகையிலும் குறைந்தவையன்று.

சோதனைச் சாலையில் மாணவர்களுக்கு நேரடி அனுபவம் ஏற்பட வாய்ப்பிருக்கிறது. எப்போதும் கற்பனைத் திறன் மூலமே ஆசிரியரின் கருத்தை மாணவன் அறிவது இயலாது. சோதனைச்

சாலையில் மாணவர்கள் தாங்களே கருவிகளைத் தொட்டு உணர்கின்றனர்: ஒலியைக் கேட்டு அறிகின்றனர்; மூக்கால் நுகர்கின்றனர்; இம் முறையில் பெறும் அறிவு மனத்தில் நன்கு நிலைபெறும் தன்மை பெறுகிறது.

வகுப்பறையிலிருந்து இடமாற்றமும், கற்கும் முறை மாற்றமும், மாணவர்களுக்கு மகிழ்ச்சி ஊட்டுகின்றன. கற்கும் பாடப் பொருளில் ஆர்வம் ஏற்படுகிறது. அறிந்துகொள்ளும் வேட்கை அதிகரிக்கிறது. சோதனைச்சாலையில் மாணவர்கள் குழுக்களாகப் பிரிந்து தாங்களே பல சோதனைகளை நடத்திப்பார்க்க வாய்ப்புத் தரப்படுகிறது. இதனால் நேரடி அனுபவம் ஏற்படுவதோடு மாணவர்களில் குழு உணர்ச்சியை வெளியிட நல்ல வாய்ப்புக் கிடைக்கிறது. பல கணித உண்மைகளைத் தாங்களே நேரில் காணவும், பரப்பளவு, கன அளவு, வில்கள், கோணங்கள் முதலியவற்றை வரையவும், அளந்தும், நிறுத்தும், அவற்றைப்பற்றி அறியவும் வாய்ப்பிருக்கின்றது. ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட கணித உண்மையும் பல சோதனைகள் செய்ததன் விளைவாகவே அமையும். ஆகவே, ஆய்வுக்கூட முறையில் கல்வி கற்பதற்குத் தேவையான தகுந்த ஏற்பாடுகளைச் செய்ய வேண்டும் என்பதில் ஐயமில்லை. நல்ல மேசைகள், நூலகம், உரு மாதிரிகள் (models), வரைகருவிகள், தராசு, கத்திரிக்கோல், அட்டைத்தாள் முதலான பல பொருள்கள் முதற்படித் தேவைகளாகும்.

இம் முறையை, வகுப்பறையின் கற்பித்தலுக்குத் துணை முறையாகக் கொள்ளலாமேயன்றி அதற்கு மாற்றாகக் கொள்ள இயலாது.

சில எடுத்துக்காட்டுகள்

I வட்டத்தின் பரப்பளவு

தேவையான முன்னறிவு : வட்டத்தின் சுற்றளவு ($2\pi r$ அலகுகள்)

(i) அட்டைத் தாள்களிலிருந்து தகுந்த அளவில் மூன்று வட்டங்கள் வெட்டி எடுக்கவேண்டும். இதே அட்டைத் தாளில் பரப்பு அலகு ஒன்று இருக்குமாறு எடுத்து அதன் நிறையைக் காண வேண்டும். இதன் நிறையை வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்டங்களின் நிறைவோடு ஒப்பிட்டு வட்டங்களின் பரப்பளவைக் கணிக்கலாம். அல்லது,

(ii) அட்டைத் தாளிலிருந்து அளந்து வெட்டி யெடுக்கப்பட்ட வட்டத்தைச் சிறிய, ஆனல் சமமான வட்டக் கோணப் பகுதி களாக வெட்டவேண்டும். இவற்றை முறைப்படி ஒன்ருே டொன்று சேர்த்து ஒரு செவ்வகம் அமைக்க முடியும். இச் செவ்வகத்தின் நீளம் தோராயமாக πr அலகுகள், அகலம் r அலகுகள். ஆகவே, வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2 ச. அலகுகள்.

II கோளத்தின் கன அளவு

சோதனை : (a)

தேவையான முன்னறிவு : உருளையின் கன அளவு ($\pi r^2 h$ கன அலகுகள்) தேவையான கருவிகள்: (1) கட்டையில் செய்த $2r$ அலகுகள் விட்டமும், $2r$ அலகுகள் உயரமும் கொண்ட இரு உருளைகள், (2) அதே கட்டையில் செய்த $2r$ அலகுகள் விட்டமுள்ள மூன்று கோளங்கள், (3) தராசு.

ஒரே மூலப் பொருளிலிருந்து செய்யப்பட்ட உருளைகளும் கோளங்களும் ஒரே அடர்த்தியுள்ளவை. ஆகவே, அவற்றின் கன அளவுகள் அவற்றின் எடைகளின் விகிதத்தில் இருக்கும். தராசின் உதவியால் 2 கன உருளைகளின் எடையையும், 3 கோளங்களின் எடையையும் தனித்தனியே கண்டுபிடி.

முடிவு: 2 உருளைகளின் எடையும் மூன்று கோளங்களின் எடை யும் சமமாயிருப்பதைக் கவனி.

∴ 3 கோளங்களின் கன அளவு = 2 உருளைகளின் கன அளவு.

அல்லது, கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ கன அலகுகள்}$$

சோதனை: (b)

தேவை (i) $2r$ அலகுகள் விட்டமுள்ள உருளைப் பாத்திரம்.

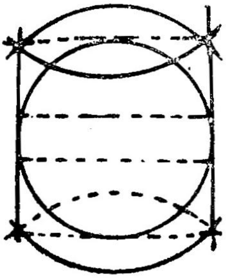
(ii) $2r$ அலகுகள் விட்டமுள்ள ஒரு கோளம்.

உருளையின் கன அள்வு $= \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$ கன அலகுகள்.

உருளைப் பாத்திரத்தை மூன்று சம அளவுகளாகப் பிரித்துப் பாத்திரத்தைத் தண்ணீரால் நிரப்பவும். இப்பொழுது கோளத்தைப் பாத்திரத்திற்குள் முழுவதும் அழுந்துமாறு புகுத்து (படம் 9). வெளியே வழிந்து வரும் நீரைச் சேர்த்து எடு.

கோளத்தை வெளியே எடுத்துவிட்டுப் பாத்திரத்தில் மீதியிருக்கும் தண்ணீரின் அளவைக் கவனி. வெளிப்படுத்தப்பட்ட தண்ணீரின் அளவு, கோளத்தின் கன அளவுக்குச் சமம். ஆனுல், பாத்திரத்தில் மூன்றில் ஒரு பாகம் தண்ணீர் மீந்திருப்பதால், வெளிப்படுத்தப் பட்ட தண்ணீரின் அளவு $= \frac{2}{3}$ உருளைப் பாத்திரத்தின் அளவு.

∴ கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}$ உருளையின் கன அளவு



$= \frac{2}{3} \times \pi$ (விட்டம்)^2 $\times$ உயரம்

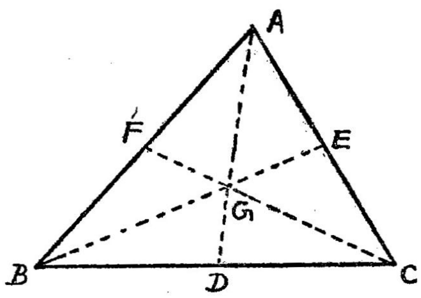
$= \frac{2}{3} \times \pi \times r^2 \times 2r$

$= \frac{4}{3} \pi r^3$ கன அலகுகள்.

படம் 9

III. காகிதத்தை மடித்துச் செய்யும் சோதனை

முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி: முக்கோணம் ABC-ல் D,E,F முறையே BC, CA, AB-ன் நடுப்புள்ளிகள். AD, BE, CF



படம் 10

வழியே காகிதத்தை மடிக்கவும். மூன்று மடிப்புகளும் சந்திக்கு மிடம் மையக் கோட்டுச் சந்தி.

இந்தப் புள்ளியை G என்று குறி. G-யானது முக்கோணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையமும் ஆகும். இதைச் சரிபார்க்க: ஓர் அட்டைப் பலகையில் முக்கோணம் ஒன்று செய்து அதன் மையக்கோட்டுச் சந்தியைக் கண்டுபிடி. முக்கோணத்தை அதன் மையக்கோட்டுப்

புள்ளியில் தாங்கி நிறுத்த முடிகிறதா என்று பார். AG, GDஐ அளந்து பார்; இவற்றிற்குள்ள தொடர்பு என்ன?

(மேற்கண்ட முறையைப்போல் செங்குத்து மையம், சுற்று மையம், உள் மையம் முதலியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.)

நன்மைகள்: வாழ்க்கை அனுபவ முறையின்படி, எந்தப் பொருளேயும், கருத்தையும் (முடிந்த வரையில்) புலனீடாய் அறிந்த பின்னரே கருத்தியலாய் ஆராய்கின்றோம் (from concrete to abstract). இக் கருத்து, புதிய கண்டுபிடிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். ஆய்வுக் கூட முறைகள் முழுவதும் புலனீடானவையாதலால், பொதுவாக மாணவர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டுவனவாயும், மகிழ்ச்சியூட்டுவனவாயுமிருக்கும். செயலுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கும் இந்த முறை, மாணவர்கள் தங்கள் திறமைக்குத் தகுந்த முறையில் பொருள்களே உருவாக்குவதை எதிர்பார்க்கிறது. பரிமாணங்களின் கருத்துப்பற்றித் தெளிவாக அறிய வாய்ப்பளிக்கிறது. உதாரணமாக, வெறும் கொள்கை முறையில் மட்டுமே கோணம் என்றால் என்ன என்று கற்கும் ஒரு மாணவனுடைய அறிவும், கோணங்களே வரைந்தும் அளந்தும் கற்கும் மாணவனுடைய அறிவும் முற்றிலும் வேறுபட்டவை. இம் முறை 'செய்து கற்றல்' (Learning by doing) என்ற கொள்கையின் அடிப்படையில் அமைந்தது.

குறைகள்: 1. இது மிகவும் மந்தமான (slow) முறை, 2. மாணவர்கள் கணித உண்மைகளே அறிந்துகொள்ள இவை மிகவும் பயனுடையவாயிருந்தாலும் தருக்க முறையை வளர்க்கப் பயன்படுவதில்லே. இம் முறை வெற்றிகரமாக அமைவதற்கு ஆயத்தப்படுத்தப்பட்ட ஆய்வுக்கூடம் தேவை.

செயல் திட்ட முறை (Project method): மாணவர்கள் தாங்கள் வாழும் சமுதாயச் சூழ்நிலேக்குத் தகுந்த முறையில் தங்கள் மனத்தை ஒருவழிப்படுத்தி எந்தச் செயலேயும் ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்துடன் செய்வதைச் செயல் திட்டமுறை என்கிறார் டாக்டர் கில் பாட்ரிக் என்ற மேதை. ஸ்டீவன்சன் (Stevenson) என்பவர் 'இயல்பான சூழ்நிலேயில் பிரச்சினேயின் முடிவுகாணுதல்' என்கிறார் (A project is a problematic act carried to completion in its natural setting).

ஆகவே, செயல்திட்டத்தை மனம் விரும்பிச் செய்யும் வாழ்க்கை அனுபவம் என்று கூறலாம். ஒவ்வொரு நாளும் நாம் திட்டமிடுகின்றோம்; செயற்படுகின்றோம். வாழ்க்கையே பல

செயல் முறைத் திட்டங்களால் ஆனதுதானே! பிரச்சினையைத் தீர்க்கும் மனநிலையை இவற்றில் ஒன்றாகக் கூறலாம். கற்கும் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் குறிக்கோள் இருக்கவேண்டும் என்று இம் முறை வற்புறுத்துகின்றது. குழந்தைகள் தாங்கள் பள்ளியில் செய்யும் பல காரியங்களின் கருத்தையும் அவற்றை எதற்காகச் செய்கிறார்கள் என்பதையும் தெளிவாகத் தெரிந்திருக்கவேண்டும் என்று இம் முறை வலியுறுத்துகின்றது. இம் முறைப்படி கற்கும் மாணவர்கள் வகுப்பறைக்கு வெளியில் உண்மையான வாழ்க்கைச் சூழலில் செய்திகளை அறிந்துகொள்கின்றனர். ஏட்டுக் கல்விக்கு இங்கு இடமில்லை.

செயல் திட்டங்களின் குறிக்கோள்கள்

1. மாணவர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டி வளர்த்தல்.

2. தானே படைக்கும் ஆற்றலையும், தன்முயற்சியையும், தன்னம்பிக்கையையும் வளர்த்தல்.

3. உள்ளார்ந்த திறமைகளை வெளிக்கொணருதல்.

4. புதிர்களை விடுவிக்கும் திறமையை வளர்த்தல்.

5. தானே சிந்திக்கும் திறனையும் நுண்ணறிவுத் திறனையும் வளர்த்தல்.

6. உடன் பயிலும் மாணவருடன் சேர்ந்து செயல்படுவதால் சமுதாயக் கட்டுப்பாட்டு முறைகளைத் தூண்டுதல் முதலியவை இந்தத் திட்டத்தின் சில நோக்கங்களாகும்.

எந்த ஒரு செயல்முறையும் வெற்றிகரமாக அமைய வேண்டுமாயின் அது நடைமுறைக்கு ஏற்றதாகவும், வாழ்க்கைக்குப் பயன் தரத்தக்கதாகவும் இருத்தல் வேண்டும். இருப்பினும் இவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும் விதமே இம் முறையின் வெற்றிக்கு அடிப்படையாகும்.

செயல் திட்டங்களின் வகைகள்

1. பள்ளியின் வங்கிகள் நடத்துதல்.

2. விளையாட்டுக் கூடங்கள் அமைத்தல்.

3. மாணவர்களுக்கான கூட்டுறவுப் பண்டகசாலைகள் நடத்துதல்

4. தோட்டம் அமைத்தல்.

5. தொழிற்கூடங்கள், அங்காடிகள், நிதிமனைகள், இரயில் நிலையங்கள் முதலியவற்றைப்பற்றித் தாம் படித்தறிந்தவற்றை நேரில் கண்டுகொள்ளவும், இவற்றைப்பற்றி இனிமேல் படிக்கப் போகும் விவரங்கள் பலவற்றைப்பற்றித் தெரிந்துகொள்ளவும், கணிதம் சார்பான சுற்றுலாக்கள் ஏற்பாடுசெய்தல்.

மேற்கொள்ளும் வழி

செயல் திட்ட வேலையைத் தனித்தனியாகவும் மேற்கொள்ள லாம்; குழுவாகவும் எடுத்துக்கொண்டு செய்யலாம். குழுவாகச் செய்யும்போது குழுவில் உள்ளோர் அனைவரும் ஒரே பிரச்சினையில் ஈடுபடுவார்கள். குழுவில் உள்ள ஒவ்வொருவரும் பிரச்சினையின் திட்டமான ஒவ்வொரு பகுதியிலும் பொறுப்பேற்றுச் செய்வார் கள். ஆனால், மேற்கொண்ட வேலையை வெற்றிகரமாக முடிக்கும் பொறுப்புக் குழுவினையே சாரும்.

செயல் திட்ட முறையில் நான்கு படிகள் உள்ளன. அவை, (1) செயலைத் தேர்ந்தெடுத்தல், (2) திட்டமிடுதல், (3) நிறை வேற்றுதல், (4) மதிப்பிடுதல் என்பவையாகும்.

உதாரணம்: பள்ளித் தோட்டம் அமைத்தலைச் செயல் திட்ட மாக எடுத்துக்கொண்டு மேற்குறிப்பிட்ட நான்கு படிகளின் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு செய்துமுடித்தல்.

செயலைத் தேர்ந்தெடுத்தல்: பள்ளித் தோட்டம் அமைத்தல் காய்கறிகளின் விலைகள் வெகுவாக ஏறிக்கொண்டுபோகும் இந் நாளில் பள்ளி விடுதிக்கு வேண்டிய காய்கறிகளைப் பள்ளித் தோட்டத்தில் பயிரிடுவது இலாபகரமாய் இருக்கும் என்பதை மாணவர்களுக்கு உணர்த்தி, பள்ளித்தோட்டம் அமைத்தலை செயல்திட்டத்திற்குத் தேர்ந்தெடுக்கும்படி செய்யலாம்.

திட்டமிடுதல்: மாணவர்கள் தோட்டம் அமைப்பதற்கான இடத்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல். தோட்டத்தைக் கொத்திப் பதப் படுத்துவதற்கான தோட்டக் கருவிகள் எவையெவை என்பதையும் அவற்றின் விலைகளையும் கேட்டு, அவற்றை வாங்குதல். பயிர்கள் நன்கு விளைவதற்கு வேண்டிய உரம், நல்ல விதை இவைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல். இப் பொருள்களை வாங்குவதற்குத் தேவை யான தொகை எவ்வளவு என்பதை முன்கூட்டியே திட்டமிடல்.

நிறைவேற்றுதல்: தோட்டம் அமைக்கப்போகும் இடத்தை அளந்து மாதிரிப்படம் ஒன்று தயாரிக்கவேண்டும். தோட்டத்தின் மத்தியில் குறுக்காகவும், நெடுக்காகவும் பக்கங்களுக்கு இணையாகப் பாதை அமைப்பதற்கு வேண்டிய நிலப்பரப்பை கணக்கிடுதல்;

பயிர் செய்வதற்கான நிலப்பரப்பையும் கணக்கிடுதல். தோட்டத்தைச் சுற்றி வேலி அமைப்பதற்கான சாதனங்களின் அளவும் அவற்றை வாங்குவதற்கான தொகையையும் கணக்கிட்டுத் தோட்டத்தைச் சுற்றி வேலிஅமைத்தல்.

மதிப்பிடுதல்

தோட்டத்தில் காய்கறிகளைப் பறிக்கும்போது 1 கிலோ கிராம் என்ன விலை என்பதை மேற்கண்ட செலவுகளின் அடிப்படையில் தீர்மானித்தல். பள்ளி விடுதிக்குப் போக மீதிக் காய் கறிகளை விற்றல். இவைகளை எல்லாம் குறித்து ஒரு விவரமான அறிக்கையைத் தயார் செய்யவேண்டும். இதிலிருந்து பெற்ற மொத்தத் தொகையைக் கணக்கிட வேண்டும். இதிலிருந்து, இலாபமா, அல்லது நஷ்டமா, எவ்வளவு சதவீதம் என்பதைக் கணக்கிட வேண்டும்.

தோட்டம் அமைப்பதைச் செயல் திட்டமாக மாணவர்களுக்குக் கொடுக்கலாம். அவர்களுக்குக் கணிதப்பாடத்தில் வந்துள்ள பரப்பளவு என்ற தலைப்பின்கீழ்த் தோட்டத்தின் குறுக்கே அமைந்துள்ள பாதையின் பரப்பு, தோட்டத்தைச் சுற்றி அமைந்துள்ள பாதையின் பரப்பு, பாதையின் பரப்புப் போகப் பயிர் செய்வதற்கான மீதி நிலத்தின் பரப்பு, நிலத்தின் சுற்றளவு ஆகியவைகளை நேர்முறையில் தாங்களே அளந்து தெரிந்து கொள்கின்றனர்.

இம் முறையில் பல நல்ல பயன்கள் உள்ளன. கற்றலில் ஆர்வம் ஏற்படுகிறது; மாணவர்களிடம் பொறுப்பையும் கடமை உணர்ச்சியையும் வளர்க்கிறது. வாழ்க்கையில் பல நிகழ்ச்சிகளைத் தாமாகவே சமாளிக்கும் பயிற்சியினையும் பெறுகின்றனர். அவர்களிடம் ஒற்றுமை, விடாமுயற்சி, பிறர் கருத்துக்கு மதிப்புத் தருதல், முடிவு எடுத்தல் முதலிய நற்பண்புகள் வளர்கின்றன. படைப்பாற்றல் வளர்வதற்கு இம் முறை நல்ல வாய்ப்புகளை நல்குகிறது. கூடி வேலை செய்வதால் சமூகப் பண்புகள் வளர்கின்றன. இம் முறை அறிவின் ஒருமைப்பாட்டை நன்கு எடுத்துக் காட்டுகிறது. வாங்குதல், விற்றல், நிறுத்தல், அளத்தல், பட்டியல் தயாரித்தல் போன்ற பொருள்களை வாங்கும் அடிப்படைகளைத் தெரிந்துகொள்வதற்கும் இவை பயன்படும். மேலும், வரிவிதிக்கும் முறைகளையும் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

குறைகள்

இம் முறையில் சில குறைகளும் உள்ளன. இதில் பெறும் அறிவு ஒழுங்குடன் அமைவதில்லை, தொழில் வளர்ச்சிக்குத் தேவையான

பகுதிகளை மட்டிலும்தான் இம் முறையால் கற்க இயலும்; அதிகச் செலவும் ஏற்படும்; நடைமுறையில் பள்ளிப் பாட வேளையில் இம் முறையை அமைப்பது எளிதன்று; மேல் வகுப்புகளுக்கு இம் முறை பயன்படாது; கற்பிக்க வேண்டிய எல்லாப் பாடங்களையும் இம் முறையில் கற்பிக்கமுடியாது; பாடத்திட்டத்தைக் குறித்த காலத்தில் முடிக்கவும் இயலாது.

மாண்டிஸோரி முறை

குழந்தை உளவியலின் முக்கியத்துவத்தையும், குழந்தைகளின் உள்ளங்கள் வேறுபட்டிருப்பதையும் கல்வியாளர்கள் ஆய்ந்து அறிந்தனர். கல்வி நிபுணரான மாண்டிஸோரியின் கற்பிக்கும் முறையானது, வகுப்பறைப் போதனை முறைக்கு எதிராக எழுந்ததொன்றாகும். இத்தாலிய நாட்டுக் கல்வி மேதையான டாக்டர் மரியா மாண்டிஸோரி (1870-1953) மனவளர்ச்சி குறைந்த குழந்தைகட்குக் கல்வி கற்பிப்பதைப்பற்றி ஆராய்ந்ததில், அவர்கள் அறிவு தளர்ந்திருப்பது புலன்களின் மந்தமான செயலின் விளைவென்று கண்டறிந்தார். மேலும், புலன்களுக்குப் பயிற்சி அளிப்பதன்மூலம் இக் குழந்தைகள் சிறிதளவாவது அறிவு பெறுவார்கள் என்பதை ஆய்ந்தறிந்தார். எனவே, மாண்டிஸோரி அம்மையார் புலன்களுக்குப் பயிற்சி அளிக்கும் தனிக் கல்வி முறையை ஏற்படுத்தினார். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செய்தி 'இந்தியன் எக்ஸ்பிரஸ்' செய்தித்தாளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதன் சுருக்கம்—1970ஆம் ஆண்டுச் செப்டம்பர் மாதம்.

'குழந்தையின் உலகம்'

'சில நாள்களுக்கு முன்பு டாக்டர் மரியா மாண்டிஸோரி யம்மையாரின் நூறாவது பிறந்தநாள் விழாக் கொண்டாடப்பட்டது. இவருக்கு இந்தியா பெரிதும் நன்றிக் கடன்பட்டுள்ளது. அவர் குழந்தையின் மனத்தைப் புரிந்துகொள்வதிலும், குழந்தைகள் கற்றலைக் கடினமாகக் கருதாமல் எளிதாகக் கருதக்கூடிய முறைகளைக் காண்பதிலும் எல்லோரையும்விட அதிகமாகப் பாடுபட்டார்.

சிறந்த கல்வி நிபுணரான அவர் 1939ஆம் ஆண்டு இந்தியாவிற்கு வருகைபுரிந்தபோது தமிழ்நாட்டிலுள்ள, சென்னை அடையாற்றில் (Adyar) இந்தியாவின் முதலாவது மாண்டிஸோரிப் பயிற்சிப் படிப்பைத் தொடங்கிவைத்தார். இவருக்குக் காணிக்கையாக நம் நாட்டில் 10 மாண்டிஸோரிப் பள்ளிகள் இருந்தபோதிலும் இன்றையத் தேவைக்கு அது மிகவும் குறைந்த எண்ணிக்கையாகும்.

குழந்தையானது தான் விரும்பித் தேர்ந்தெடுக்கும் பொருள்களைக் கையாளும்போது, ஆசிரியரின் போதனை மூலமாகக் கற்பதைக் காட்டிலும் மிக வேகமாகக் கற்றுக்கொள்கிறது என்பதைக் கண்டறிந்தது அவருடைய நுண்ணறிவைக் காட்டுகிறது. சாதாரணமாகப் பிள்ளைகள், பிராணிகளோடும் தாவரங்களோடும் விளையாடுவதை விரும்புவர். வளரும் குழந்தைகளின் இயல்பான ஆர்வமே அவர்கள் உலகத்தை அதிசயிக்கத்தக்க தொன்றாகக் காணச் செய்கிறது. குழந்தைகளின் இந்த ஆர்வத்தை நாம் கட்டுப்படுத்தக்கூடாது. மரியா மாண்டிஸோரியின் 'நடைமுறை வாழ்வு'ப் பயிற்சியானது, பிராணிகளையும், தாவரங்களையும் கவனித்துக் கொள்ளுதல், காய்கறிகளை நறுக்குதல், உடுத்துதல், தன்னைத் தானே கவனித்துக் கொள்ளுதல் போன்றவற்றில் குழந்தைகளைப் பழக்கப்படுத்தி அவர்களைத் தற்சார்புடையவர்களாக்குகிறது.

குழந்தைகள் பொருள்களைக் கையாளுவதன் காரணமாகப் பலவகை நிறங்களையும், உருவங்களையும், ஒலிகளையும் வேறுபடுத்தும் விதத்தையும் அறிகிறார்கள். மரியா மாண்டிஸோரி $2\frac{1}{2}$ வயதிலிருந்து 6 வயதுவரை குழந்தையின் புலன்நுகர்வு அதிவேகமாக வளருகின்றது என்பதை எடுத்துக்காட்டியுள்ளார்.

மாண்டிஸோரி முறையில் பயின்ற மாணவர்கள், நம் பள்ளிகளிலும், கல்லூரிகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிற பயிற்சி முறைகளோடு ஒத்துப்போக இயலாமல் இடர்ப்படுகிறார்கள். ஆனால், மாண்டிஸோரி முறையிலுள்ள சுய கல்வி முறையும், ஆய்வும், கல்வியின் மேல்நிலைகளில் முடிந்த அளவு பயன்படுத்தப்பட வேண்டியது அவசியமாகும்.

மாண்டிஸோரி முறையின் கோட்பாடுகள்

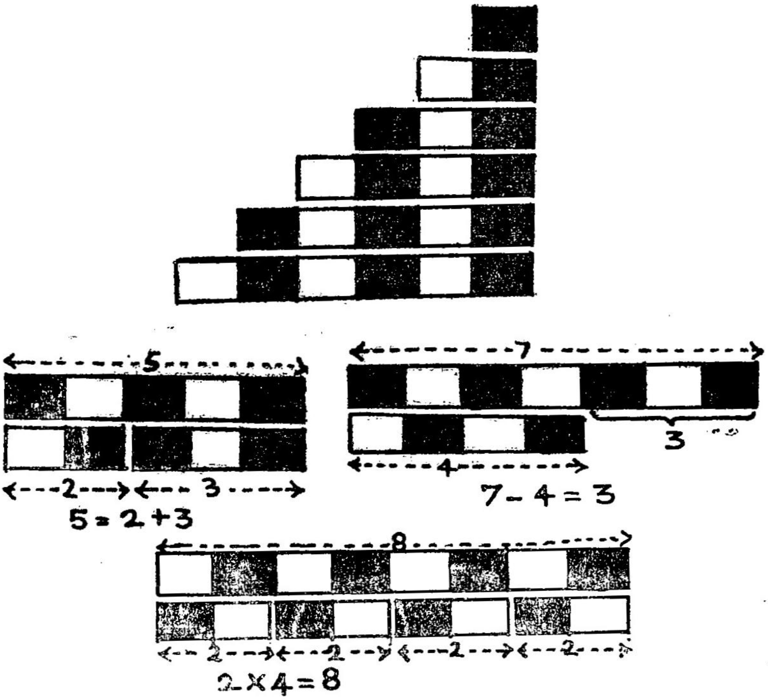
1. ஒவ்வொரு மனிதனுக்கும் சுதந்திரம் என்பது அடிப்படை உரிமை என்று மாண்டிஸோரி நம்பினார். எனவே, ஒவ்வொரு குழந்தைக்கும் முழுச் சுதந்திரம் அளித்து அதற்கு இயல்பான வளர்ச்சி ஏற்படுமாறு செய்தல் வேண்டுமென்றார்.

2. தனித்தன்மை யெனும் கோட்பாடு : இயல்பாகவே வளர்ச்சியுறுமாறு விடப்பட்ட குழந்தை, அதன் தனித்தன்மைத் திறமைகளைத் தானாகவே வளர்த்துக்கொள்கிறது என்று மாண்டிஸோரி நம்பினார்.

3. தாமாகவே கற்பது என்ற கோட்பாடு (auto-education) சுயகல்வி, குழந்தை தன் போக்கிலேயே கற்பதற்குரிய சிறந்த

முறையாகும். அறிவூட்டுகின்ற துணைக்கருவிகள் (Didactic apparatus) அமைப்பானது குழந்தையின் ஒவ்வொரு தவற்றையும் அறிவுறுத்துவதனல் அக் குழந்தை தானகவே திருத்திக்கொள்ள வாய்ப்பிருக்கிறது.

அறிவூட்டுகின்ற துணைக்கருவிகள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:



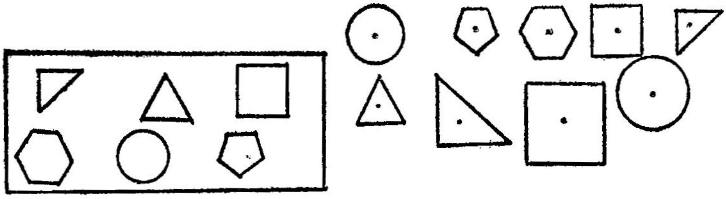
படம் 11

(i) சிவப்பு, நீலம் என அடுத்தடுத்து வண்ணமிடப்பட்ட கட்டைகள் (நீண்டபடி) வெவ்வேறு நீளமுள்ளதாக (10 செ.மீ.லிருந்து 1மீ.வரை) 10 கட்டைகள். நான்கு அடிப்படை விதிகளின் தொடர்புகளைப்பற்றிக் கற்பிக்கும்போது இக் கட்டைகள் பயன்படுத்தப்படும். மாணவர்கள் கட்டைகளை அடுத்தடுத்து வைத்து எண் தொடர்புகளைப் பெறுகின்றனர்.

(ii) வெவ்வேறு வடிவகணித உருவங்களான பட்டகம், பட்டைக்கூம்பு, கோளம், உருளை, கூம்பு போன்றவற்றைக்கொண்டு

பொருள்களின் உருவங்களைப்பற்றிய அறிவைக் குழந்தைகள் பெறச்செய்தல்.

(iii) ஒரு சட்டத்தில் வடிவியல் உருவங்கள் பலவும் குடைந்தெடுக்கப்பட்டிருக்கும் (Geometrical insets). அவற்றில் சரியாகப் பொருந்துமாறு கைப்பிடியுடன் கூடிய அந்த உருவங்கள் தனியாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். குழந்தை, உருவங்களைக் கலந்துவிட்டு அவற்றை ஏற்ற இடங்களில் பொருத்தவேண்டும். அப்போது அக் குழந்தைக்கு அவ் வுருவங்களோடு தொடர்பு ஏற்படுவதோடு அவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டையும், ஒற்றுமையையும் அறிந்து கொள்ள முடிகிறது.



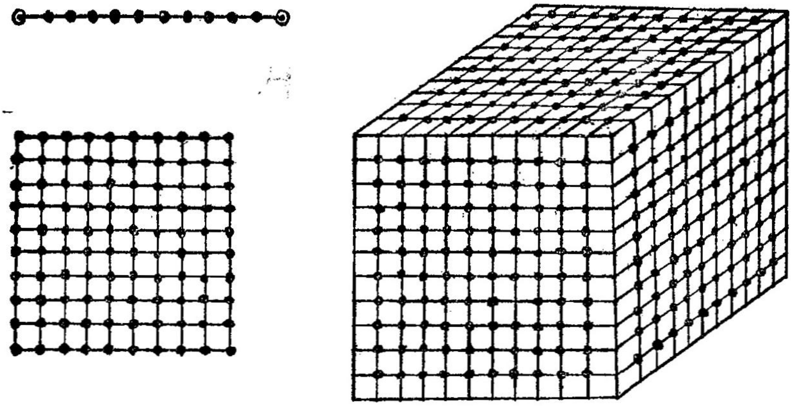
படம் 12

4. தசைகளுக்குப் பயிற்சி: உப்புக் காகிதத்தால் அமைந்த எண்களை அட்டைகளில் ஒட்டவேண்டும். அவற்றின் உருவத்தைக் குழந்தைகள் தம் விரல்களால் தடவி அறியவேண்டும். குழந்தைகளின் மனத்தில் எழுத்துகளின் உருவம் எளிதாகப் பதியும்; அதே சமயம் உச்சரிப்பையும் கற்பிக்கவேண்டும். மாண்டிஸோரி முறையில் எழுதுதல் தலைசிறந்ததொன்றாகும். எழுதும்போது தசை இயக்கத்திற்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படுகின்றது. அடையாளத்தைப் பின்பற்றிக் குறிகளை எழுதப் பயிற்சி அளிக்கப்படுகின்றது.

5. புலப்பயிற்சி: (Sense training) அனுபவங்களினால் நாம் கற்கிறோம். புலன்கள் மூலமாகப் பெறும் கருத்துகளே அனுபவங்களாகின்றன. கல்வியிலே புலன்களே முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன. அறிவாகிய கோட்டைக்குப் புலன்களே வாயில்களாகும். மூன்று வயதிலிருந்து ஏழு வயதுவரை புலன்கள் சுறுசுறுப்பாக இயங்குகின்றனவென்றும், இந்த வயதில் மிகுதியாகக் கற்கவும் முடிகின்றதென்றும் மாண்டிஸோரி அறிந்தார். புலன்வழிப் பயிற்சியானது நுண்ணறிவுக் கல்விக்கு வழிவகுப்பதோடு புலன்களுக்கும் சிறந்த பயிற்சி அளிக்கின்றது.

எண்களின் இடமதிப்பைப்பற்றிய கருத்து மாண்டிஸோரி முறையின்படி மறு பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட விதங்களில் கற்றுத் தரப்படுகின்றது.

1. பத்து, நூறு, ஆயிரம் போன்ற எண்களைக் கற்பிக்க, (அ) தனித்தனியாகச் சில மணிகள், (ஆ) பத்துமணிகள் கோத்த கம்பி, (இ) நூறு மணிகள் கோத்த மணிக்கோவை, (ஈ) ஆயிரம்



படம் 13

மணிகள் கோத்த மணிக்கோவை ஆகிய இவற்றைப் பயன்படுத்த லாம்.

உதாரணமாக, 1342 என்ற ஓர் எண்ணைக் குறிப்பதற்கு, ஆயிரம் மணிக்கோவை ஒன்று, நூறு மணிக்கோவை மூன்று, பத்து மணிகள் கோத்த கம்பிகள் நான்கு, இரண்டு தனி மணிகள் முதலியவற்றை, இதே வரிசையில் வைத்துக்காட்டலாம்.

2. ஒன்று முதல் 9 வரை உள்ள எண்களைத் தனித்தனி அட்டைகளிலும், 10, 20......90, 100, 200......900, 1000, 2000 ......9000 முதலிய எண்களைத் தனித்தனி அட்டைகளிலும் குறிப்பிட்டுக் கொள்ளவேண்டும்.

ஒரு குழந்தையிடம், 2298ஐ எப்படி அமைப்பாய்? என்று கேட்டால், குழந்தை முதலாவதாக, 2000 போட்ட அட்டை யையும், 200, 90, 8, போட்ட அட்டைகளை அதற்குப்பின் வரிசை யாகவும் எடுத்து, இடமதிப்பு வாரியாக ஒழுங்குபடுத்தி அட்டை களைச் செருகிக் காட்டவேண்டும். இவற்றை உபயோகித்துக் கற்றல், மாணவர்களுக்கு ஒரு சுவையுள்ள விளையாட்டாக அமை கிறது. அட்டைகளில் எழுதப்பட்ட எண்களின் இலக்கங்களை, அவற்றின் இடமதிப்புடன் வாசிக்கவும் அவற்றைப் பலகையில் எழுதவும் கற்பிப்பதன் மூலம் மாணவர் இடமதிப்பில் பயிற்சி அடைகின்றனர்.

குறைபாடுகள்

1. திட்டமிட்ட வகுப்பறைப் போதனை இல்லை.

2. அறிவூட்டும் துணைக் கருவியினால் குழந்தையானது தன் கருத்துகளை வெளிக்காட்டுவதற்குக் குறைந்த வாய்ப்பே உள்ளது.

3. பல்வேறு பாடங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகள் வெளிப்படுத்தப்படுவதில்லை.

கைத்தொழில் மூலம் கற்பித்தல்

நடைமுறையிலிருக்கும் கல்வி முறைகள் நாட்டை உருவாக்குவதற்குப் போதாது என்று காந்திஜி கண்டார். ஆகையால், 1937ஆம் ஆண்டில் தம் கருத்தான ஆதாரக் கல்வி முறைத் தத்துவத்தைத் தோற்றுவித்தார்.

தற்போது நடைமுறையில் இருக்கும் கல்வியில் பாடங்களும் பாடப் புத்தகங்களுமே மிக முக்கியமாகக் கருதப்படுகின்றன. இருந்த இடத்தை விட்டு நகராமல், அமைதியாக அமர்ந்து ஒழுங்காக முறைப்படுத்தி அமைக்கப்பட்ட பாடப் பொருளை ஆசிரியர் கூறக் கேட்பது இம் முறையின் குறிக்கோள். எப்பொழுதோ, என்றைக்கோ வயதுவந்தபின் பயன்படும் என்ற நம்பிக்கையோடு கற்கப்படும் இக் கல்வி முறையில், ஒவ்வொரு படி நிலை முடிவிலும் வரும் தேர்வுகளைப்பற்றியே ஆசிரியரும் மாணவரும் நினைத்துக் கவலைப்படுகின்றனர்.

அரிஸ்டாட்டில் முதல் ஹெர்பார்ட் ஸ்பென்ஸர் வரையிலுள்ள புகழ் பெற்ற கல்வி வல்லுநர்கள் யாவரும் பயனும் திறனுமுள்ள கல்வி, 'செய்து கற்றல்' (learning by doing) என்று வலியுறுத்தியிருக்கின்றனர். குழந்தைகளை வற்புறுத்திப் பாட உண்மைகளை மனனம் செய்ய வைப்பதை இவர்களெல்லோரும் கடுமையாகக் கண்டித்திருக்கின்றனர். ஏனெனில், இம் முறையினால் மாணவர்கள் பாடப் புத்தகத்திலிருப்பதைத் தெரிந்துகொள்ள முடியுமேயன்றி, இது வாழ்க்கை முறைக்குப் பயன்படாத கல்வியாகும்.

குழந்தைகள் செயல் முறையில் கற்பதற்கு வாய்ப்பளிக்க வேண்டும். தாங்களாகவே ஒரு குறிக்கோளுடன் அல்லது ஒரு பொருளை உருவாக்கும் நோக்கத்துடன் செய்து கற்கும் கல்வியே சிறந்ததாகும். கைத்தொழில் முறையினால் குழந்தைகள் கல்வி கற்றால் அவர்கள் உழைப்பின் தத்துவத்தை, அதன் மதிப்பீட்டினைக் கற்றுக்கொள்வார்கள். செயல் நோக்கத்துடனே அல்லது படைக்கும் நோக்கத்துடனே கல்வி அமையவேண்டும்; முடிந்த

வரையில் கல்வியின் நோக்கம் இவற்றைத் தழுவியே இருக்க வேண்டும். குழந்தைகள் வாழும் சுற்றுப்புறங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு அவர்களுடைய முக்கியமான கைத்தொழில்களைத் தீர்மானிக்கவேண்டும். சமுதாய, இயற்கைச் சூழ்நிலைகளையும் தொடர்புபடுத்திக் கற்பிப்பது நல்ல பயன் கொடுக்கும்.

பள்ளியில் படிக்கும் குழந்தைகளுக்குப் பொருள் ஈட்டவும் வாய்ப்பளிக்க வேண்டும் என்று காந்திஜி கருதினர். இதனல் குழந்தைகளுக்குத் தன்னம்பிக்கை வளரும்; தன்னைத்தானே சார்ந்திருக்கவும் இயலும். குழந்தைகள் ஒருவரையொருவர் புரிந்துகொள்ளவும், ஒருவருக்கொருவர் உதவவும், பொதுவாகக் கூட்டுறவு முறைகளை அறிந்துகொள்ளவும் இம் முறை பயன்படுகின்றது, குழந்தைகள் தொழிலையும், தொழிலாளரையும் மதிக்கக் கற்றுக்கொள்கின்றனர்கள். சில கைத்தொழில்கள்:

1. விவசாயத்திற்கு முன்மாதிரியாகத் தோட்டவேலை.
2. புத்தகத் தொழில்.
3. களிமண் வேலைப்பாடு, பானை செய்தல்.
4. பெண்களுக்கான வீட்டு வேலைகள்.
5. நூற்றலும், நெய்தலும்.

பழக்கத்திலிருக்கும் கல்வி முறையைத் தொழில் தொடர்புடையதாகவும், அன்றடத் தேவைகளின் அடிப்படையிலும், உற்பத்தியைப் பெருக்கும் நோக்கத்துடனும், மாற்றி அமைக்க வேண்டியது அவசியமாகும். இப்போது இருக்கும் பள்ளிப்படிப்பு வாழ்க்கைத் தேவைகளுக்கு உடனடியாகப் பயன்படுவதில்லை. எனவே, பள்ளிகளுக்காகப் பெரிய கட்டடங்கள் கட்டுவதை நிறுத்திவிட்டு, எப்போதும் பயன்படக்கூடிய முறையில், கல்வியானது, பண்ணைகளிலும், தொழிற்சாலைகளிலும், தொழிற்பயிற்சிப் பள்ளிகளிலும் கற்பிக்கப்பட வேண்டும் என்று ஒரு சாரார் நினைக்கின்றனர். இவ் வித முறையைப் பின்பற்றுவதால் நம்முடைய இளைஞர்கள் பெரும்பாலானேர் தாங்கள் தொழில் அமைக்கும் நிலையில் இருப்பதால் தன்னம்பிக்கையுடையவர்களாயிருப்பார்கள். மேலும், பல இளைஞர்கள் இப்படி ஆதாயம் அளிக்கின்ற தொழில்களை மேற்கொள்வதால், குறிக்கோளில்லாமல் கல்லூரிகளில் சென்று படிப்பதையும் தவிர்க்கலாம். இதனல், வேலையில்லாத் திண்டாட்டத்தையும், அதனல் பண்பு அழிந்து மனச்சோர்வடைந்த இளைஞர்கள் போராட்டம் நடத்தி நாட்டின் வளத்தைப் பாழாக்குவதையும் தவிர்க்கலாம்.

மர வேலை (Wood work): ஆசிரியரும் மாணவர்களும் சேர்ந்து உள்ளூர்ச் சந்தையில் நன்ருக விலைபோகக்கூடிய மரப்பொருள்

களின் பட்டியல் ஒன்றைத் தயாரிக்கவேண்டும். இவற்றில், மாணவர்களின் தகுதிக்கும் ஆற்றலுக்கும் ஏற்ற முறைப்படி குறிப்பிட்ட சில பொருள்களைத் தயாரிக்க முடிவெடுக்கவேண்டும்.

இப் பொருள்களைத் தயாரிக்குமுன், இவற்றின் மாதிரி அல்லது மாதிரிப் படங்கள், தச்சுக் கருவிகள், மரக்கட்டைகள், மற்றும் வேண்டிய பொருள்களையும் சேகரித்து வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

1. உருமாதிரிகள், வடிவப் படங்கள் (Exhibits)

(i) மேல்பாகம் செவ்வகமாகவோ, சதுரமாகவோ, வட்ட மாகவோ, நீள் வட்டமாகவோ அமைந்த முக்காலி அல்லது மணைகள்.

(ii) திண்டு மெத்தை அமைக்கப்பட்ட முக்காலிகள்.

(iii) நார் பின்னிய அல்லது பிரம்பினாலான மேல்பகுதி கொண்ட மணைகள்.

(iv) மடக்கு மணைகள்.

(v) மேற்கண்டவையல்லாமல் வேறு விதமான முக்காலி அல்லது மணைகளின் பொருள்களின் விளக்கத் திட்டப் படங்கள், வடிவமைப்புப் படங்கள் (blue prints).

(vi) பல கட்டைகளை ஒன்றோடொன்று இணைக்கும் பலவித இணைப்பு முறைகளின் விளக்கத் திட்டப்படங்கள் (துளைப் பொருத்து, முளைப்பொருத்து இணைப்புகள்—mortice and tenon joints).

(vii) செதுக்குமுறை, சித்திர வேலைப்பாடு, வார்ப்படச் சித்திர வேலைப்பாடு முதலிய அலங்கார வேலைப்பாடுகளின் மாதிரிகள்.

கருவிகள் (Tools)

பென்சில் (எழுதுகோல்), மடங்கு அளவுகோல், இரம்பம், சிற்றுளி, மரச்சுத்தி, இடுக்கி, திருப்புளி, செதுக்கும் கருவி, அரம், தமருசி, சாய்தளம் அளக்கும் கருவி, மூல மட்டப்பலகை, (Try-square—ஒரு புறம் மரக்கட்டையும் மறுபுறம் இரும்புமாக அமைந்த தச்சர் சதுரக் கருவி), முளை செதுக்கிப் பொருத்தும் கருவி (Tenon saw), துளை பொத்திடும் தடித்த அலகுடைய உளி (mortice chisel), ஆதாரம் கொடுக்கும் கட்டைகள் (braces) முதலியவை.

மூலப்பொருள்கள் : மரம், நாட்டுத்தேக்கு, வச்சிரப்பசை (glue), பஞ்சு, திருகாணி (screw), மெருகு (french polish).

உருமாதிரிகள், விளக்கப் படங்களை உபயோகித்துக் கற்பித்தல்

1. வட்டம், நீள்வட்டம் வரையக் கற்பித்தல்; முக்காலி முதலியவற்றின் மேல்பாகத்தின் வடிவங்கள் அமைத்தலைக் கற்பித்தல்.

2. பிரம்பு, நைலான் பிரம்பு, கயிறு முதலியவைகளைக் கொண்டு பின்னும் வழிமுறைகளைக் கற்பித்தல்.

3. மடக்கும் மணைகள், நாற்காலிகளைப்பற்றி அறிதல்.

4. மரவேலையில் உபயோகிக்கும் இணைப்புகள்.

முக்காலிகள், மணைகள் செய்தல்

கீழே கூறப்பட்ட முறைகளைப் பின்பற்றலாம்.

(1) திட்டமிடுதல், (2) பல உறுப்புகளையும் அளவுப்படி வெட்டி வகைப்படுத்துதல், (3) சேர்க்கும் இடங்களைக் குறித்தல், (4) இணைப்புகளுக்கு வேண்டிய துளை, முளைகளைச் செய்தல், (5) சோதனைச் சேர்ப்பு, (6) இறுதியாக இணைத்து முடித்தல்.

மூலப் பொருள்களைப்பற்றி மற்றப் பாடங்களுடன் இணைத்துப் படித்தல்

1. புவியியல்—இந்தியாவில் தேக்கு மரங்களை எங்கெங்கு காணலாம், உயர்ந்தரகத் தேக்கு (பர்மா தேக்கு), மரத்தைப் பக்குவப்படுத்தும் முறைகள், மற்றவகைப் பலகைகள், ஊசியிலைக் காட்டு மரக்கட்டை (soft wood), வயிரம் பாய்ந்த கட்டைகள் (hard wood), பலகைகளைப் புழுப்பூச்சிகளிலிருந்து பாதுகாக்கும் மருந்துவகைகள்.

(1) பசைப்பொருள்கள் (glue): பசைகள் எவற்றிலிருந்து எப்படிச் செய்யப்படுகின்றன என்று அறிதல். (மிருகங்களின் கொம்பு, குளம்பு, முதலியவற்றிலிருந்து செய்யப்படுகின்றன.)

(2) மரக்கட்டைகளை ஒட்டுவதற்காகப் பயன்படும் மற்றப் பசை வகைகள்

உப்புத்தாள் (sand paper): செய்யும் விதம், பலரகங்கள், பயன்படுத்தும் முறையும், பாதுகாக்கும் முறையும்.

மெருகு வகைகள்: மரவேலைகளில் பயன்படுத்தப்படும் பல வித மெருகு வகைகள்.

இந்தக் கைத்தொழிலில் கணிதம்

1. நேர்முகமாக அளத்தல், பல உருவங்களை அறிதல்.

2. முக்காலிகளும், மணைகளும் செய்வதற்காக ஆகும் மொத்தச் செலவு (மரம், பசை முதலியவற்றின் வாங்கிய விலைகள், வண்டிக்கூலி முதலியவை).

3. செய்த பொருள்களின் விலைகளை இலாபத்தின் அடிப் படையில் தீர்மானித்தல்.

4. பொருள்களை விற்றபின், கிடைத்த இலாபத்தின் சதவீதம் கண்டுபிடித்தல்.

குறைகள்

1. பொதுவாகக் கைகளுக்கு மட்டுமே வேலை கொடுக்கும் இத்தொழில் அறிவு வளர்ச்சியைத் தூண்டுவதில்லை. பகுத்தறிதல், தருக்க முறையில் வாதித்தல், காரணங்காட்டுதல் முதலிய ஆற்றல்களை வளர்த்துக்கொள்ளுவதற்கு இதில் வாய்ப்பில்லை.

2. ஒரு குறிப்பிட்ட கைத்தொழிலில் தேவைப்படும் பலவித மான பாடப்பகுதிகளையும் ஒரே ஆசிரியர் தெரிந்து செய லாற்றுவது கடினம்.

3. குறிப்பிட்ட ஒரு கைத்தொழிலில் சில பாடப் பகுதிகளைப் பற்றியே சிந்திக்க முடியும்.

வளர்ச்சியுறும் போதனை முறை (Developmental teaching)

புதிய கோட்பாடுகளைக் கற்பிக்க எப்படிக் குறிப்பிட்ட ஒரு தனி முறை இல்லையோ, அதுபோல் பல்வேறு சூழ்நிலைகளுக்கும் ஏற்றவாறு போதிப்பதற்குத் தனியான ஒரு போதனை முறையும் கிடையாது. புதிய பாடப் பொருள்களை, வெற்றிகரமாகக் கற்பிக்கக் கருதும் ஆசிரியர், சூழ்நிலைக்கேற்பத் தம்முடைய போதனை முறைகளை மாற்றியமைக்கும் திறன் கொண்டவரா யிருக்கவேண்டும். புதிய வழிகளைப் பயன்படுத்திப் போதனை முறையை வளம் பெறச் செய்தல் ஒரு கலையென்று கூறலாம்: இதை 'வளர்ச்சியுறும் போதனை முறை' என்று கூறுவோம். இம் முறை, ஒரே சீரானதாகவோ, அல்லது ஒருதரப்படுத்திய தாகவோ இருக்கமுடியாது. ஆகவே, பெரும்பாலும் இது ஆசிரியரின் ஆளுமையைப் பொறுத்தே அமைவதாகும். அதாவது, ஆசிரியரின் ஆர்வம், பாடத்தைக் கையாளும் ஆற்றல், தம்முடைய அகத்துணர்வாற்றலால் மாணவர்களைப் புரிந்துகொண்டு அவர்களுடைய மனோநிலைக்குத் தகுந்தவாறு போதனை முறையை மாற்றியமைத்துத் தாம் எடுத்துக்கொண்ட குறிக்கோளை அடையும் திறன் முதலியவற்றைப் பொறுத்ததாகும். இம் முறையில் வெற்றி காண விரும்பும் ஆசிரியர், பல செயல்

முறைகளிலும் தேர்ச்சி பெற்றிருக்கவேண்டும். இவற்றைத் தகுந்த இடத்தில், தகுந்த முறையில் பயன்படுத்தும் நுட்பத்தையும் தெரிந்திருக்கவேண்டும்.

நேரடியாகத் தகவல்களைக் கொடுக்கவேண்டிய அவசியம் நேரும்போது ஆசிரியர் சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் அவற்றைக் கூற வேண்டும். அதோடு, நேர்முகமான கேள்விகளைக் கேட்பதன் மூலமாக, மாணவர்கள் பாடத்தைப் புரிந்துகொண்டதைச் சோதிக்க வேண்டும். தீர்வுகளை மாணவர்களே கண்டறியும் விதத்தில், பொருத்தமான கேள்விகள், சோதனைப் பயிற்சிகள் முதலியவற்றைக் கொடுப்பதன்மூலம் மாணவர்களை ஆய்ந்தறியும் செயல் முறைகளுக்குத் தூண்ட முடியுமானால், அவ்வாறே செய்வது நல்ல பயனைத் தரும். மாணவர்கள் புதிதாகக் கற்றுக் கொண்ட கருத்துகளைத் தெளிவாக்கவும், அவற்றில் ஆர்வ மூட்டவும், மாணவர்கள் அவற்றை மறக்காதிருக்கும்படியாகவும் ஆசிரியர்கள் போதுமான எடுத்துக்காட்டுகளையும் பன்முறைப் பயிற்சிகளையும் கொடுப்பது அவசியம்.

வளர்ச்சியுறும் போதனை முறையானது ஆசிரியரின் வேலையை மட்டும் பொறுத்ததன்று. இம் முறை முழு நிறைவுபெற வேண்டுமாயின் ஆசிரியரின் முயற்சியோடு மாணவரின் முயற்சியும் சேர வேண்டும். எடுத்துக்கொண்ட பாடப்பகுதியில் சுயமாகச் சிந்தித்துச் செயற்படும் திறனையும் ஆர்வத்தையும் வளர்ப்பதே இம் முறையின் முக்கிய நோக்கமாகும். இந்தக் குறிக்கோளை மனத்தில் கொண்டு, மாணவர்களின் செயல்களை ஆசிரியர் திட்டமிட்டு, அவர்களுக்கு வழிகாட்டவேண்டும். அவர்கள் தம் சொந்த முயற்சியைப் பயன்படுத்தக்கூடிய அளவிலே அவர்களுடைய ஆர்வத்தைத் தூண்டும் சக்தியாக ஆசிரியர் அமைய வேண்டும். வளர்ச்சியுறும் இப் போதனை முறை போதுமானதாக இல்லாமலிருந்தால், அடிப்படை அறிவைக்கூடப் பெறாத மாணவர்கள், சுயமாக, பொதுமைப்பாடுகளையும், கோட்பாடுகளையும் தம் வயப்படுத்துவதில் முன்னேறமாட்டார்கள். பல்வேறு விதமான எடுத்துக்காட்டுகள் இல்லாமல் பொதுமைப் பாடுகளை நன்கறிந்துகொள்ள இயலாது.

5. செய்முறைத் திறன்கள்

ஊக்குவித்தல்
ஆர்வத்தைத் தூண்டுதலும், காத்தலும்

மாணவர்கள் தாங்கள் உண்மையிலேயே ஆர்வம் கொண்டுள்ள வேலைகளைச் சுறுசுறுப்பாகவும் திறமையுடனும் செய்வார்கள் என்பதை ஒருவரும் மறுக்கமுடியாது. எனவே, பாடத்தில் ஆர்வத்தை ஏற்படுத்துதலும், பின்பு இந்த ஆர்வத்தைப் பேணுவதும் கணித ஆசிரியரின் முக்கியமான வேலைகளாகும். கற்றலை வளர்ச்சியுறச் செய்வதற்கு ஆர்வத்தையே கருவியாகப் பயன்படுத்த ஆசிரியர்கள் முயல்கின்றனர்.

மேலும், மாணவர்களின் பிரச்சினை தீர்க்கும் திறனைப் பொறுத்தே அவர்களுடைய கணித ஆர்வம் பெரும்பாலும் அமைந்திருக்கின்றது. பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணும்போதெல்லாம், அவன் தான் வெற்றிபெற்றதாக மனநிறைவு அடைகின்றான். மாணவர்களின் ஆர்வத்தை வளர்ப்பதற்குக் கீழ்க்கண்ட முறைகளைப் பின்பற்றலாம்.

1. பல வகையான புலனுகர்வுக் கருவிகளும், சோதனைக்கூடமும், வெளிப்புறச் செயல்களும், மாணவர்களின் ஊக்கத்தை வளர்க்கப் பயன்படும் வழிகளாகும். வகுப்பறையிலேயே கொடுக்கப்படும் குழுவேலைகளும் (group activities) மாணவர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டும்.

2. கணிதச் செயல் முறைகளை ஐயப்பாடின்றிப் புரிந்து கற்பது ஆர்வத்தை வளர்க்கும். இல்லையேல், தொடர்ந்து ஏற்படும் ஏமாற்றங்கள் மனச்சோர்வை ஏற்படுத்தும். ஆகவே, மாணவர்களின் புரிந்துகொள்ளும் திறனுக் கேற்ப ஆசிரியர் தம்முடைய கற்பித்தல் முறையை அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

3. தேவைப்பட்ட பொழுது, மாணவர்களின் கவனத்தைக் கவரும் வண்ணம் பொருத்தமான காட்சிக் கருவிகளை ஆசிரியர் கையாள வேண்டும். இவை ஆசிரியரின் வாய்மொழிப் போதனையின் பயனையும், கரும்பலகை வேலையின் பயனையும் மேம்

பாடடையச் செய்கின்றன. பல்வேறு கணிதப் பாடங்களைப் போதிப்பதற்கான நிழற்படங்களும், நிழற்படத் துண்டுகளும் இப்போது நமக்குக் கிடைக்கின்றன. ஆசிரியர் இவற்றைத் தகுந்த முறையில் பயன்படுத்தலாம்.

4. அவ்வப்போது, கணித வரலாற்றினைக் கூறியும் மாணவர்களின் ஆர்வத்தை வளர்க்கலாம்.

5. கணிதக் கழகங்கள் மாணவர்கள் விரும்பிச் செயற்படும் பல செயல் முறைகளைக் கொண்டவையாகும். இவை, கணிதத்தைப் பொழுதுபோக்காகவும், விருப்ப வேலையாகவும் ஆக்குகின்றன.

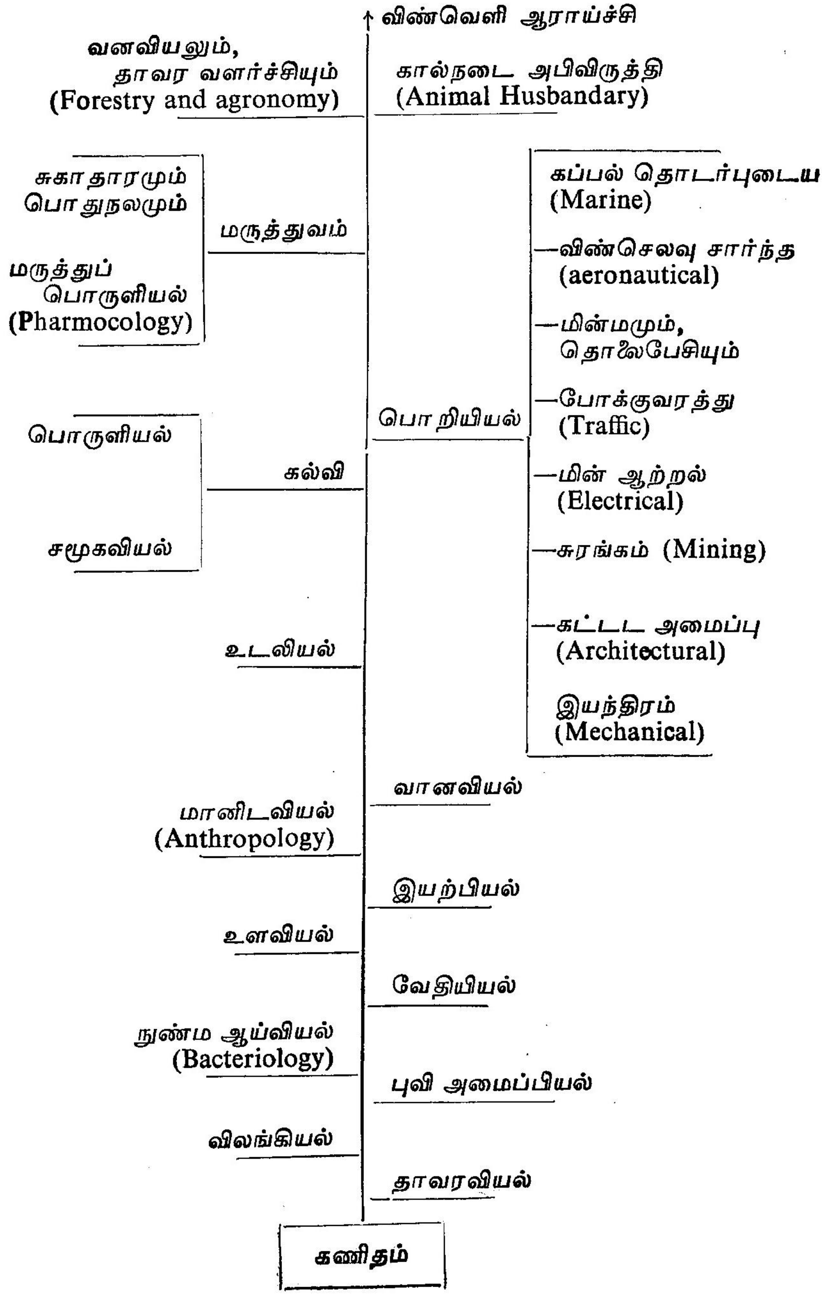
6. மாணவர்களின் முன்னேற்றத்தைக் குறிக்கும் வாரப் பதிவேடுகளில் (weekly records), தனிப்பட்ட மாணவர்களின் முன்னேற்றத்தை (progress) வரைபடங்கள் மூலம் எடுத்துக் காட்டலாம். இதில் தங்கள் முன்னேற்ற வரைகள் (curves of progress) கீழிறங்காமல் பார்த்துக்கொள்வதில் மாணவர்கள் கவனமாயிருப்பர். சிறந்த முன்னேற்றம் காட்டும் மாணவர்களை ஆசிரியர் பாராட்டுவதோடு, அதை மற்ற மாணவர்களுக்கும் வெளிப்படையாக வகுப்பில் கூறவேண்டும்.

7. கடினமான ஒப்படைகள் மாணவர்களை அலைக்கழிக்கின்றன. ஆகவே, ஒப்படைகளைத் தரப்படுத்துவது அவசியம். அதாவது, முதலில் எளிய கணக்குகளும், போகப் போகக் கடினமான கணக்குகளும் வரும்படி வரிசைப்படுத்த வேண்டும். தோல்வியைக் காட்டிலும் வெற்றி அதிகச் சக்தி வாய்ந்தது; மென்மேலும் கற்பதற்கு ஊக்கமளிக்கின்றது; மனநிறைவையும் தன்னம்பிக்கையையும் தருகின்றது.

8. கணிதத்தைப் பிறபாடங்களுக்குப் பயன்படுத்துவதைக் கூறியும் மாணவர்களை ஊக்குவிக்கலாம். ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியையும் போதிக்கும்போது அதன் நடைமுறைப் பயன்களையும் கூறுவது நல்ல பயன் தரும்.

அறிவியல், வேதியியல், வானவியல் மற்றும் பல அறிவுப் பிரிவுகளும் கணிதத்தைச் சார்ந்திருப்பது யாவரும் அறிந்த உண்மையாகும். இந்தத் தொடர்புகளை எதிர்ப்புறத்தில் தந்துள்ள 'அறிவு மரத்தின்' மூலம் தெளிவுபடுத்தலாம்.

அறிவு மரம்
(Tree of Knowledge)



இந்த விளக்கப்படத்திலிருந்து, கணிதம், அறிவியல் பிரிவுகள் பல வற்றிற்கும் அடிப்படையாகவும் உரமூட்டுவதாகவும் அமைந் திருப்பதோடு, செயல்முறை அறிவியல் வகைகளுக்கு (applied Sciences) வலுவான கருவியாய் அமைவதையும் அறியலாம். மாணவர்கள் இதை நன்குணர, ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் இப் படத் தின் நகலை மாட்டிவைக்கலாம்.

9. கணிதம் பல்வேறு வாழ்க்கைத் துறைகளில் பயன்படுத்தப் படுகிறது. அதாவது,

(i) தொழிற் கணிதம் (business arithmetic)

(ii) நிதிக் கணிதம் (finance arithmetic)

(iii) கடைக் கணிதம் (shop arithmetic)

இவ்வாறு கணிதம் பயன்படும் துறைகளைக் கூறுவதால் ஆசிரி யர் மாணவருக்கு வழிகாட்டும் அரிய சேவையைச் செய்வதோடு கணிதத்தில் ஆர்வத்தை உண்டாக்கவும் இயலும். உலகில் ஏற் படும் முன்னேற்றங்களையும் அவற்றின் அடிப்படையையும் மாண வர்கள் புரிந்துகொள்ளுமாறு செய்தல் கல்வியின் முக்கியமான பணியாகும் என்பதை ஆசிரியர் உணர வேண்டும். அறிவும், திறனும் மாணவருடன் சேர்ந்து செயல்படும் மனப்பான்மையும் கொண்ட ஆசிரியரே இவ்வித ஆர்வத்தை மாணவர்களிடம் வளர்க்க முடியும்.

வாய்மொழி வேலை

கணிதம் கற்பதில் வாய்மொழி வேலையின் பயன் மிக உயர்ந்த தாகும். இது, மாணவர்களிடம் ஆர்வத்தைத் தோற்றுவிப்ப தோடு, தொடக்க நிலையில் மிகுந்த பயனளிக்கும் ஒரு முறையு மாகும். எழுதித்தெரிந்து கொள்வதைக்காட்டிலும், கேட்டறி வதும், கண்டறிவதும் மிகுந்த ஆற்றலுடைய போதனை முறை களாகும். கணக்குகளைச் செய்யும்போது, ஒரு சில முக்கியச் செயற் படிகளைத் தவிர, மற்றவற்றை வாய்மொழியின் மூலமாக விளக்கி, நேரத்தையும், சக்தியையும் சிக்கனப்படுத்தமுடியும்.

பாடத்தைத் தொடங்குவதற்கு முன்பாக மாணவர்களின் முன் னறிவைச் (previous knowledge) சோதித்து அறிவதில் வாய்மொழி வினாக்கள் மிகுந்த பயனளிக்கின்றன. இதைப்போலவே பாடத்தைத் தொடங்குவதற்கு இது ஒரு சிறந்த வழி முறை யாகும்; சிறிய, எளிய, ஆனால் தகுந்த வாய்மொழிக் கேள்விகள் மூலம் பாடத்தைத் தொடங்குவது நல்ல பயன்தரும். வாய்மொழி

வேலை, பாடத்தைச் சுலபமாகத் தெரிந்துகொள்ளத் துணைசெய்கின்றது; செயல் முறைகளைத் தெளிவடையச் செய்கின்றது. பல வாய்மொழிக் கேள்விகளைத் துரிதமாகக் கேட்பதன் மூலம், மாணவர்கள் பாடத்தைப் புரிந்துகொண்டார்களா என்பதை அறிந்து கொள்ள முடிகின்றது. வாய்மொழி முறையானது, மாணவர்கள், பாடத்தைப்பற்றிய தங்கள் கருத்தையும், தங்களுக்கு ஏற்படும் சந்தேகங்களையும் உடனுக்குடன், நேர்முகமாகவே வெளியிடுவதற்கும் சந்தேகங்களைத் தீர்த்துக்கொள்வதற்கும் பயன்படுவதோடு, நடந்த பாடங்களைத் திருப்பிப் பார்ப்பதற்கும் பயன்படுகின்றது. மீத்திற மாணவர்களின் ஆற்றலுக்கு இது வடிகாலாகவும் பயன்படுகின்றது. ஒரு சில கேள்விகளை வகுப்பு முழுமைக்குமாகக் கேட்பதால், வகுப்பிலுள்ள மாணவர் அனைவரின் கவனத்தையும் கவருவதோடு, வகுப்பிலுள்ள சோம்பலை நீக்கி வகுப்பைச் சுறுசுறுப்பாக இயங்கச்செய்ய முடிகிறது. ஒரு சூத்திரத்தையோ அல்லது ஒரு கணிதக் கோட்பாட்டையோ உருவாக்கும்போதும் அதைப் பயன்படுத்தும் முறையை அறிமுகப்படுத்தும்போதும் வாய்மொழி வேலை பயன்படுகிறது. கேட்டறியும் இம் முறையின் உதவியால், வேகமாகக் கற்க முடிகின்றது. வேகமாகச் சிந்திக்கவும், பொருள்களைக் கற்பனை செய்து பார்க்கவும் இம் முறை துணை செய்கிறது. இம் முறையில் பயிற்சியளிக்கப்பட்ட குழந்தைகள், பொருள்களை விற்கும் அல்லது வாங்கும்பொழுது, பொருள்களின் விலைகளைத் தாங்களே கணித்துக்கொள்ளும் திறமையடைகின்றன. இதற்காகக் கடைக்காரர்களை நம்பும் நிலையைத் தவிர்க்கலாம். சுறுசுறுப்பான வாய்மொழி வேலை மாணவர்களுக்கு உற்சாக மூட்டுகின்றது. புதிய செயல்முறை, வழிமுறைகளை வாய்மொழி வேலையின் மூலமாகத் தொடங்குவதால் இவை மாணவர்கள் மனத்தில் ஆழமாகவும், நிரந்தரமாகவும் பதிகின்றன.

எளிமையான கேள்விகளை முதலிலும் கடினமானவற்றை இறுதியிலும் கேட்கவேண்டும். வாய்மொழி வேலைக்குப் பின் எழுத்து வேலையைத் தொடங்கலாம். இம் முறைகள் இரண்டையும் தகுந்த விதத்தில் பயன்படுத்துவதாலேயே போதனை முழுமை பெறும்.

மனக்கணக்கு

பழைய கல்வி முறையில், மாணவர்கள், பெரிய எண்களைச் சுலபமாகக் கையாளுவதற்கும், எழுதும் கருவிகளின் உதவியின்றிப் பல சிக்கல்கள் நிறைந்த கணக்குகளைச் செய்வதற்கும் திறமை பெற வேண்டும் என்று எதிர்பார்க்கப்பட்டது. நம் முன்னோர்கள் ($\frac{1}{16}$, ($\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$,) மாகாணி, அரைக்கால், கால், அரை,

முக்கால் வாய்பாடுகளைத் தெரிந்திருந்தனர், ஆனால், இக் காலத்தில் கணிப்பு முறைகள் வெகுவாகச் சுலபமாக்கப்பட்டுவிட்டதால் மாணவர்கள் மிக எளிதாகச் செய்யக்கூடிய கணக்குகளைக் கூட மனத்தால் செய்வதற்கு முடியாத நிலையில் இருக்கிறார்கள்; மேசைக் கணிப்பான் (Desk calculators) உபயோகிக்கிறார்கள்.

எழுதும் கருவிகள் ஒன்றையும் பயன்படுத்தாது, மனத்தால் மட்டிலுமே செய்யக்கூடியது மனக் கணக்காகும். பாடத்தில் மாணவர்களுக்கு ஆர்வமூட்டவும், அவர்களுடைய கவனத்தைக் கவர்வதற்கும் இது ஒரு சிறந்த முறையாகும். மனக்கணக்குகளில் மாணவர்கள் நல்ல விதமான போட்டி முறையில் கலந்து கொள்வார்கள். ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஒரு சிறு நேரத்தையேனும் மனக்கணக்குக்காக ஒதுக்கவேண்டும். விடையை எழுதியோ அல்லது வாய்மொழியாலோ கொடுக்கலாம்.

மாணவர்கள் ஏற்கெனவே அறிந்த எளிய கணித உண்மைகளைப் பயன்படுத்திச் செய்யுமாறு இவை அமையவேண்டும்.

எழுத்து வேலை

புதிய பாடத்தைக் கற்றுத் தரும்போதெல்லாம் அந்தப் பாடத்தில் கற்றுக்கொண்ட கருத்தைப் பயன்படுத்தி எழுத்து வேலை செய்ய மாணவர்களுக்கு வாய்ப்பளிக்க வேண்டுமென்பது பொதுவாக வலியுறுத்தப்படுகிறது. வழிகள் மனத்திலேயே செய்ய முடியாத சிக்கல் கணக்குகளுக்கு, எழுத்துவேலை அவசியம். மேலும், சில சமயத்தில் வழிமுறைகள் சட்டென்று நினைவிற்கு வராமல் மறந்துவிடக்கூடும். புதுக் கருத்துகளை மனத்தில் இருத்திக் கொள்ளும் நோக்கத்துடனேயே எழுத்துப் பயிற்சிகள் பொதுவாகக் கொடுக்கப்படுகின்றன.

இத்தகைய எழுத்துப் பயிற்சிகள் வேறொரு நோக்கத்திற்கும் பயன்படுகின்றன. ஆசிரியர்கள் ஊகிக்காத எத்தனையோ பிரச்சினைகள் எழுத்துப் பயிற்சியின் மூலமாக அவர்கள் பார்வைக்குக் கொண்டுவரப்படலாம். இந் நோக்கத்தின் அடிப்படையில் சிக்கலான மாதிரிகளைப் பொறுக்கியெடுத்துக் கொடுக்க வேண்டும். முதலில் கொடுக்கப்படும் மாதிரிகள், புதிய செயல் முறையின் நேர் விளக்கங்களாக அமைதல் வேண்டும். தேவையை முன்னிட்டோ அல்லது எதிர்பாராத சந்தர்ப்பங்களிலோ ஆசிரியர் அதிகப்படியான பயிற்சிகள் கொடுக்கத் தேவைப்பட்டால் அவர் வேறு பல மாதிரிகளைக் கைவசம் வைத்திருக்கலாம். அந்த மாதிரிகள் அவர் புனைந்தவையாக இருக்கலாம்; அல்லது, வேறு

பல புத்தகங்களிலிருந்து திரட்டியவைகளாகவும் இருக்கலாம். புதிய வழிமுறைகளைக் கற்பிக்கும்போது கையாளப்படும் மாதிரிகள் மாணவர்களின் கணித அறிவுடன் இணைதல் வேண்டும். புதிய நுணுக்கங்களைக் கற்றுத் தரும்போது கடினமான மாதிரிகளைக் கற்றுத் தருதல் கூடாது. ஆசிரியர், அவர்களுடைய முந்தைய மாதிரியைப் போல அல்லது அதிலிருந்து சிறிது வேறுபட்ட மாதிரிகளைத் தந்து புதிய நுணுக்கத்தைக் கற்பித்தல் வேண்டும்.

தெளிவான கையெழுத்து, ஒழுங்கான வழிமுறைகள் இவ்விரண்டும், கண்டவுடன் மனத்தைக் கவர்வதுடன் மட்டுமல்லாமல் செயல் முறையில் அதிக மதிப்பையும் பெற்றுத்தரும் என்பதை மாணவர்கள் நம்பச்செய்தல் வேண்டும். திட்பத்திற்கும், தெளிவாக எழுதப்பட்ட எண்களுக்கும் மிகுந்த தொடர்பு உண்டு. அநேகமாக மாணவர்கள் வேகமாக எழுதும்போது (0, 6) ; (3,8); (7,9); (1,7) என்ற எண்களைச் சந்தேகிக்கும்படியாக எழுதுகிறார்கள்.

ஒழுங்காக (இடமதிப்புத் தவறாது) எழுதப்படாத எண்கள் பெரும்பாலும் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் முதலியவைகளில் தவறு ஏற்படக் காரணங்களாக உள்ளன. தேற்றத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட கணக்குகளுக்கும் (Riders), அவற்றிற்காக வரையப்பட்ட வடிவங்களுக்கும் மிகுந்த தொடர்பு உண்டு. ஆகவே, வடிவப் படங்களைக் கவனத்துடனும், முடிந்தவரையில், கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையிலும் வரைய வேண்டும். சில மாணவர்கள் தேவையில்லாமல் சமன்பாட்டுக் குறிகளை உபயோகிப்பர்.

உதாரணமாக,

சுருக்குக : $$\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{19}{12}} = \frac{3}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{19} = \frac{18}{19} \text{ (விடை)}$$

சில்லறைக் கணிப்புகள் (rough work) சில சமயங்களில் துண்டுத் தாள்களில் செய்யப்படுகின்றன. இந்தத் துண்டுத்தாள் வழக்கமாகக் காணுமற் போய்விடும். இதனுல் செய்த வேலையைச் சரிபார்ப்பது என்பது கடினமாகி விடுகின்றது. சில கணிப்புகளை மனத்திஞல் செய்யலாம்: ஆனுல், முக்கியமான படிகளை எழுதிச் செய்வதே சிறந்த முறையாகும்.

மாணவர்கள் தேற்றங்களுக்கும் துணைப்பயிற்சிகளுக்கும் (Riders) கருவிகளின் உதவியின்றி நல்ல படங்களை வரையக் கற்றுக் கொள்ள வேண்டும். தொடக்கத்தில் அவர்கள் வரையும் நேர் கோடுகள் சீரற்றிருக்கலாம்; வட்டங்கள் பலவித வடிவங்களைக் கொண்டிருக்கலாம். ஆகையால், பயிற்சியின் மூலமாக அவர்கள் முன்னேற்றம் அடைய வேண்டும். முக்கோணங்களை இரு சமபக்க முக்கோணங்களாகவும், நாற்கரங்களை இணைகரமாகவும், ஏதேனும் இரு வட்டங்களை இரு சம வட்டங்களாகவும் வரைவது, சாதாரணமாக மாணவர்களிடம் காணப்படும் குறைகளாகும்.

திட்பமாக வடிவங்கள் வரைவதற்கு வடிவியலில் தனியிடமுண்டு. ஆசிரியர் பிழையில்லாமல் படங்களை வரைவதற்குக் கருவிகளைப் பயன்படுத்தி மாணவர்களுடைய கவனத்தைத் திருப்பலாம். மாணவர்களும் படங்கள் வரைய அதிகக் கவனம் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டியதன் அவசியத்தை உணர்வார்கள்.

கற்பிக்கப்பட்ட பாடப்பகுதியில் வரும் கோட்பாடுகள், விதிகள் முதலியவற்றில் மாணவர்கள் எவ்வளவு தேர்ச்சியடைந்துள்ளனர் என்றும், எந்தக் கருத்துகளை மேலும் தெளிவாகக் கற்பிக்க வேண்டும் என்றும், ஆசிரியர் அறிந்துகொள்ள உதவுகின்றது. மேலும், தாமாகச் சிந்திப்பதற்கு மாணவர்களுக்கு எழுத்துப் பயிற்சி மிகவும் அவசியமாகும். மாணவர்கள் குறிப்பிட்ட சில திறமைகளை, அதாவது, திட்பமாகச் செய்யவும், தெளிவாகவும், ஒழுங்காக வரிசைப்படி எழுதவும், நல்ல மொழிநடையில் எழுதவும் திறமையை வளர்த்துக்கொண்டிருக்கிருர்களா என்று அறிந்துகொள்ள எழுத்து வேலை துணைசெய்கிறது.

வாய்மொழிக் கணக்குகளைத் தொடர்ந்து எழுத்து வேலை கொடுத்தால்தான், கற்பித்தலின் வழிமுறை முழுமையடையும்.

நினைவில் நிலைத்திருக்கும்வண்ணம் பயிற்றுவித்தல்

(1) பன்முறைப் பயிற்சி, *(2)* மீள்நோக்கு, *(3)* கற்றதைப் பேணுதல். (ஓம்புதல்)

புதிய கருத்துகளைத் தெரிந்துகொள்வதும், தெரிந்தவற்றை மேன்மேலும் வளர்த்துக்கொள்வதும் கல்வி கற்பதன் முக்கிய மான இரு வளர்ச்சிப் படிகளாகும். எத்தகைய கருத்தும் தொடக் கத்தில் எவ்வளவு தெளிவாகக் கற்ருலும் நடைமுறைப் பழக்கமும் பயிற்சியும் இல்லாவிடின் நாளாவட்டத்தில் மறந்துபோவதற்கு ஏதுவுண்டு. குறிப்பாக, கணிதப் பாடங்களில் இது மறுக்கமுடியாத உண்மையாகும். செயல் முறைகளில் நல்ல தேர்ச்சி பெறுவதோடு, பெற்ற இத் தேர்ச்சி முறைப்படி பயிற்சிகள் செய்வதன் மூலம் பேணப்பட வேண்டும். முக்கியமாகப் புதிய கருத்துகளும் அவற்றின் தொடர்புகளும் திரும்பத்திரும்ப உபயோகப்படுத் தவும் மறுபரிசீலனை செய்யவும் வாய்ப்புகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும். இந்த நோக்கங்களுடன் கற்பிக்கும் பாடமுறையை 'நிலையாய் நினைவில் நிற்கும் கல்வி முறை'யெனலாம். இதற்கான முக்கிய வழிகள் (1) பன்முறைப் பயிற்சி, (2) மீள் நோக்கு, (3) பேணுதல் ஆகிய இம் மூன்றுமாகும்.

பன்முறைப் பயிற்சியின் நோக்கங்கள்

பண்டைக் காலக் கல்வி முறையில் வெறும் நினைவாற்றலுக்கும் இயந்திரத்தன்மையான முறைகளுக்கும் (mechanical) ஆசிரியர்கள் முதன்மையளித்து வந்தனர். இம் முறையில், இயந்திரமயமான பயிற்சிமுறையே வலியுறுத்தப்பட்டுவந்தது; ஏனெனில், பல்வேறு கருத்துகளை நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவும், சில செயல் முறை களை இயல்பாகச் செய்வதற்கும் இது சாலச் சிறந்த வழியாகும். ஆனுல், போதனை பயனுள்ளதாக இருக்க வேண்டுமாயின், செயல் முறையும் அறிவாற்றலும் ஒன்றி யமையவேண்டும். பொதுவாக, மாணவர் ஒரு செயல் முறையைப் புரிந்துகொண்ட பின்னரே அம் முறையில் பயிற்சிகள் கொடுத்துப் பழக்க வேண்டும். இல்லை யேல், பயிற்சி முறைகள் நோக்கமும் சிறப்பும் குன்றியே காணப்படும்.

கணிதத்திலுள்ள பெரும்பாலான செயல் முறைகள் பயன் தரும் விதத்தில் அமையவேண்டுமானுல், இவற்றைப் பிழையின்றி மட்டுமல்லாமல், வேகத்துடனும், நயத்துடனும் செயல்படும் திறமையுமுற வேண்டும். இம் முறைகளில் சில, இயந்திரமயமாகப் பழக்கப்பட வேண்டியவை.

முறைப்படி திட்டமிட்டு மீண்டும், மீண்டும் செய்து பழகுவ தால் மட்டுமே செயல் முறைகளில் இவ்வித நயம் ஏற்படமுடியும். ஆனுல், புரிந்து கொள்ளாத அல்லது பயன் நோக்கமற்ற கருத்து களைக் கற்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும்போது பயிற்சிமுறை வெறும் சுமையாகத்தான் தோன்றும்.

பயிற்சி முறைகளைக் கவர்ச்சியாகவும், பயனுள்ளவையாகவும் ஆக்கும்பொருட்டுத் தற்காலத்தில் கல்வி உளநூலார்கள், உறுதி யான தத்துவங்களை அமைத்துக்கொடுத்திருக்கிறார்கள். இம் முறையை எளிதாகப் பயன்படுத்தும் விதத்தில் எழுத்தாளரும், பதிப்பாளரும் தெரிந்த பல கருத்துகளை முறைப்படுத்தி அமைத் திருக்கின்றார்கள். அவை வருமாறு:

முறையான பயிற்சியும் செயல்முறைப் பயிற்சியும் (Formal drill, and Functional drill)

எப்படிப்பட்ட மெய்ம்மை (fact) யானாலும், அதை அறிந்து கொள்வதும், தேவைப்படும்பொழுது அதைப் பயன்படுத்துவதும் வெவ்வேறுவகையான ஆற்றல்களாகும்.

உதாரணமாக: $5 \times (\quad) = 35$ என்பதையோ,

$25 + (\quad) = 32$ என்பதையோ செய்வது முறையான பயிற்சி. ஆனால்—ஒரு புத்தகத்தின் விலை ரூ. 7 ஆனால் 8 புத்தகங் களின் விலை என்ன?—என்ற கணக்கில் பயன்படுவது செயல் முறைப் பயிற்சி (functional drill) யாகும். எந்தப் பயிற்சி முறையும், இயல்பான வாழ்க்கைத்தேவைகளுக்குப் பயன்படும் போது செயல்முறையாகின்றது. முறையான பயிற்சி ஓரளவு தவிர்க்க முடியாததாகும். ஆகவே, இவ் விரண்டு முறைகளிலும், மாணவர்களுக்குத் தகுந்த பயிற்சியளித்தால் தக்க தருணங்களில் இவற்றை மாணவர்கள் நயத்துடன் பயன்படுத்துவர். இவை ஒன்றுக்கொன்று 'குறை நிரப்பு' (Supplement) முறைகள் என்று கூறலாம். ஒன்று சரியான செயல் முறையையும் மற்றது சரியான பயன் முறையையும் வலியுறுத்துகின்றது.

பன்முறைப் பயிற்சியின் செயல்கள் (Functions of drill)

பயிற்சி, பழக்கத்தை வளர்க்கின்றது. அநேகமாக, நம் செயல்கள் எல்லாம் பழக்கத்தால் உறுதிப்பட்டவை. இவ்விதப் பழக்கங்களே நம் வாழ்க்கையை ஓரளவு எளிதாகவும் இயல்பாக வும் ஆக்குகின்றன. பழக்கங்கள் பயிற்சியாலேயே உருவாகின்றன. எவ்வளவுக் கெவ்வளவு ஒரு செயல் முறையில் பழக்கம் இருக்கிற தோ அவ்வளவிற்கு அச் செயலை வேகமாகவும், நுட்பமாகவும், நயத்துடனும் செய்ய இயலும்.

கணிதத்தில் தேர்ச்சியடைவதன் மூலம் வளரக்கூடிய பழக்கங்களை மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) பாடசம்பந்தமான பழக்கங்கள்: பெருக்கல், வாய்பாடு கள், கூட்டல் கழித்தலின் சேர்மானங்கள், சூத்திரங்கள், பலவிதக் கணிப்பு முறைகள், தசமப் பின்னக் குறிப்புகள், பலவிதக் குறுக்கு

வழி முறைகள், சாதாரணப் பின்னங்களின் சதவீத மாற்றமைப்பு கள், விடைகளைச் சரிபார்க்கும் முறைகள் முதலியவையும், இவை போன்ற இன்னும் பற்பல பாடமுறைப் பழக்கங்களும் நன்கு பெற்ற மாணவர்கள் உண்மைத் தேர்ச்சியும் தன்னம்பிக்கையும் உடையவராயிருப்பார்கள்.

(2) **செயல்முறைப் பழக்கங்கள்:** கணித ஆசிரியர்கள், கீழ்க் கண்ட செயல் முறைகளை வலியுறுத்துவது மிகவும் அவசியமாகும். (i) ஒரு சிக்கலைத் தீர்க்க முற்படுமுன், அதைக் கூர்ந்து ஆராய்ந்து கொடுக்கப்பட்டது யாது? கண்டுபிடிக்க வேண்டியது எது? என்று தீர்மானித்தல்; (ii) விடைகளை முறைப்படி ஒழுங்குபடுத்தப் பயிலுதல், அவற்றை அவ்வப்போது சரிபார்த்தல்; (iii) புது மாதிரியான கணக்குகளுக்குத், தேவையானல் படம் வரைந்து அவற்றை விடுவிக்கும் முறையைக் காணுதல்; (iv) எண்களை ஒழுங்காகவும், தெளிவாகவும் எழுதுதல் முதலியன. இச் செயல் முறைகளை ஆசிரியர்கள் இடையரூது வற்புறுத்தவேண்டும். திரும்பத்திரும்பச் செய்வதால் இச் செயல் முறைகள், பழக்கத் தோடு ஒன்றிவிடுகின்றன.

(3) **மன ஒழுக்கப் பழக்கம்:** திட்ப உணர்வை வளர்த்தல் (sense of accuracy), மனத்தை ஒருமுகப்படுத்திப் புதுக் கருத்து களைக் கற்பனைசெய்து பார்த்தல், காரணகாரியப்படுத்தி முடி வெடுக்கும் திறனை வளர்த்தல் ஆகிய குறிக்கோள்களை, கணிதம் கற்பிக்கும்போதெல்லாம் நாம் மனத்திற் கொள்ளவேண்டும். இம் மூன்றும் பாடம் கற்பிப்பதனுல் ஏற்படும் நிரந்தரமான பயன்முடிவுகளாகும். இவற்றை அடைவது கற்பித்தலின் முக்கிய மான நோக்கம் என்பதை ஆசிரியர்கள் அறியவேண்டும்.

பன்முறைப் பயிற்சியின் தத்துவம்

1. பன்முறைப்பயிற்சி பயனுள்ளதா யிருக்கவேண்டுமானல், அதற்குக் குறிப்பிட்ட நோக்கம் இருக்கவேண்டும்.

2. மாணவரின் திறமைக்குத் தகுந்த முறையில் வெவ்வேறு நிலையிலுள்ள மாணவர்களுக்கு (மீத்திறம், இடைநிலை, கடைநிலை மாணவர்கள்) வெவ்வேறு விதமான பன்முறைப் பயிற்சிகள் கொடுக்கலாம். வகுப்பு முழுவதற்கும் கொடுக்கும் பயிற்சிக் கணக்குகளோடு சில கடினமான கணக்குகளை மீத்திற மாணவருக்கென்றே கொடுக்கலாம்.

3. மாணவரின் கவனக் காலஅளவு (span of attention) மிகவும் குறைவாதலால், இடைவிடாது தொடர்ந்து கொடுக்கப் படும் பயிற்சிகள் பயனற்றுப்போவது மட்டுமன்றி, சோர்வூட்டு வனவாகவும் இருக்கும்.

4. ஒரு சமயத்தில் குறிப்பிட்ட ஒரு திறமையில் மட்டுமே பயிற்சியளிக்க வேண்டும்; அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட செயல் வகையில் பயிற்சியளிக்கவேண்டும். அதாவது பன்முறைப் பயிற்சி வரையறுத்துக் குறிக்கப்படவேண்டும்.

5. மாணவர்களின் செயல் முறைகளில் தவறுகள் வரும் போது அவற்றைக் கவனித்துக் கண்டுபிடித்து முதலிலேயே அவற்றை நீக்குவதற்கு முயற்சி எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். புதிய செயல் வகைகளில் பயிற்சியளிக்கும்போது மாணவர்களை மிகக் கவனத்துடன் மேற்பார்வையிடுவது அவசியமாகும்.

6. மாணவர்கள் தெளிவாக அறியாத செயல் முறைகளில் பயிற்சிகள் கொடுப்பதை முழுவதுமாக ஆசிரியர்கள் தவிர்க்க வேண்டும். இல்லையேல், தப்பான செயல் முறையைப் பழக்குவது போலாகும்.

பன்முறைப் பயிற்சியின் வகைகள்

பன்முறைப் பயிற்சியில் ஆர்வம் குறையாமலிருப்பதற்கு, பலவகையான பயிற்சிகள் கொடுக்கவேண்டும். அதாவது, (1) விதிமுறைப் பயிற்சியிலிருந்து செயல்முறை பயிற்சிக்கும், (2) வாய்மொழிப் பயிற்சியிலிருந்து எழுத்து முறைப் பயிற்சிக்கும், (3) புலனீடான செயல் முறைகளிலிருந்து கருத்தியலான செயல் முறைக்கும் வருமாறு கொடுக்கலாம்.

தனிமுறைப் பயிற்சியும் (Isolated drill), கலப்புமுறைப் பயிற்சியும் (Mixed drill)

ஒரே செயல் முறையில் கருத்தை ஒருமுகப்படுத்துவது தனி முறைப் பயிற்சி. தொடர்புடைய செயல்முறைகளில் (related skills) கொடுக்கும் பயிற்சி, கலப்புமுறைப் பயிற்சி.

கலப்புமுறைப் பயிற்சி	தனிமுறைப் பயிற்சி
1. $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$	1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
2. $\frac{5}{6} - \frac{1}{8}$	2. $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$
3. $4\frac{1}{8} \times 5\frac{1}{3}$	3. $\frac{3}{8}$ $+\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$	4. $5\frac{3}{10} + 7\frac{1}{5}$

முடிவாகப் பன்முறைப் பயிற்சியானது,

1. எடுத்துக்கொண்ட செயல்முறை முழுவதையும் பழக்கும் விதத்தில் உள்ளடக்கி யிருக்கவேண்டும்.

2. சிறிய அளவில் கொடுக்கப்பட்டாலும் பரவாயில்லை. ஆனால், பன்முறைப் பயிற்சிகள் அடிக்கடி கொடுக்கப்படவேண்டும்.

3. ஒவ்வொரு பயிற்சிக்கும் காலம் வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

4. பழக்க முறையானாலும் திட்பம் வலியுறுத்தப்பட வேண்டும்.

5. பயிற்சிக் கணக்குகள் அவற்றின் கடின நிலைப்படி வரிசைப் படுத்தப்பட வேண்டும்.

6. புதிர்க் கணக்குகளும் பயிற்சிக்குக் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

7. மாணவர்களின் திறமைகளைத் தெரிந்துகொள்வதற்கு இப் பயிற்சிகள் பயன்படும்வகையில் இவற்றை அமைக்க வேண்டும்.

8. ஒவ்வொரு தலைப்பிலும் கலப்புமுறைப் பயிற்சி இருக்க வேண்டும்.

பன்முறைப் பயிற்சி, மாணவர்களுக்கு இன்றியமையாத ஒரு பழக்கமுறை; இப் பயிற்சி முறையில்லாவிடில் கணிதத்தைப் புரிந்துகொள்வற்கோ, அதன் பயன்களை அறிந்துகொள்வதற்கோ அல்லது பொது விதிகளைத் தெரிந்துகொள்வதற்கோ மாணவர்கள் இடர்ப்பாடடைவார்கள் என்பதை அவர்களுக்கு உணர்த்த வேண்டும்.

மீள்பார்வை (மீட்டாய்வு செய்தல்)

திருப்பிப் பார்த்தலை ஓரளவு பன்முறைப் பயிற்சியோடு ஒப்பிடலாம். இவை யிரண்டு முறையிலுமே, செய்ததைத் திரும்பச் செய்யும் தன்மையிருப்பதால் இவை ஒன்று பட்டவையாகும். மேலும், குறிப்பிட்ட ஒரு கருத்தையோ அல்லது செயல்முறையையோ மாணவர்கள் அறிந்துகொள்ளப் பயன்படுவது மட்டுமன்றி இவற்றிற்கு எவ்வித வரவேற்பு மாண வரிடம் இருக்கிறது என்பதையும் அறியப் பயன்படுகின்றன. எடுத்துக்கொண்ட செயல்முறையில் இயந்திர வகையில் இயங்கு வதற்குப் பன்முறைப் பயிற்சி பழக்குகின்றது. திருப்பிப் பார்த் தலில் இது ஒரு குறிக்கோள் என்றாலும், இதைக் காட்டிலும்

முக்கியமாக, எடுத்துக்கொண்ட பாடப் பகுதியிலுள்ள முக்கிய மான கருத்துகளை ஒன்றுதிரட்டி ஒன்றேடொன்று தொடர்பு படுத்தி முழுப்பாடத்திலும் அதன் முக்கியத்துவத்தை அறியவும் பயன்படுகின்றது. இது வெறும் பயிற்சி என்பதைக் காட்டிலும், மாணவர்களின் கருத்தைச் செயல்முறை நோக்கத்திற்குத் திருப்பு கின்ற வழி என்று கூறலாம். கற்றுக்கொடுத்த கருத்துகளையும், கோட்பாடுகளையும் திரும்பவும் அதேபோல் சொல்லுவது திருப்பிப் பார்த்தல் முறையாகா. மறு சீராய்வில், அந்தப் பாடப்பகுதியில் கற்றுக்கொண்ட முக்கியமான கருத்துகளை முறைப்படி தொடர்பு படுத்தி, தேவையானல் இக் கருத்துகளைத் தெளிவாக விவாதிக்க வும் மாணவன் அறியவேண்டும்.

ஓம்புதல்

நன்கு திட்டமிட்டு அமைக்கப்பட்ட பன்முறைப் பயிற்சி, திருப்பிப் பார்த்தல் இவற்றின் ஒன்றிணைந்த சேர்க்கையைப் பேணும் திட்டம் ஓம்புதல் அல்லது பேணுதல் எனலாம்.

1. சிறப்பு வாய்ந்த கருத்துகள், தொடர்புகள், கோட் பாடுகள், சிக்கல்கள் முதலியவை முக்கியமாக இதில் இடம்பெற வேண்டும்.

2. இரண்டாவதாக, மீட்டாய்வு செய்தலே, மாணவன் தன் திறமையைத் தானே அளந்தறியும் சோதனை முறையென்று கூறலாம். இதனுல் மாணவன் தன்னுடைய குறைகளையும் அறிந்து கொள்ளமுடியும்.

மேற்பார்வைப் படிப்பு

மாணவர்களுடைய பாடமுறைகளில், குறிப்பாகப் புதிர்க் கணக்குகளைச் செய்வதற்கும், பல்வேறு ஆற்றல்களைத் திட்டமிட்டு வளர்த்துக்கொள்ளவும் ஆசிரியரின் இடைவிடாத கண்காணிப்புத் தேவை. கல்வியென்பது பற்பல விதமான தகவல்களைச் சேர்ப்பது மட்டுமன்றி, சிறந்த பல திறமைகளை அடைவதுமாகும். ஆகவே, தேவைப்பட்ட குறிக்கோள்களை அடைவதற்குக் கல்விச் செயல் முறைகளை (learning activities) மேற்பார்வை செய்வது தேவை யென்பது தெளிவு.

பள்ளியில் கற்கும் பல மாணவர்களின் கல்வி பயனுள்ளதாக இருக்கவேண்டுமாயின், பாடத்திட்டத்தில் அவர்களுக்கு ஆர்வம் வளரும்படி தூண்ட வேண்டும். கல்விச்செயல் முறைகளில் முறைப்படி மேற்பார்வை இருக்கவேண்டும். பொதுவாக, உயர்நிலைப் பள்ளி மாணவர்கள், ஒப்படைப்புகள் சிலவற்றை வீட்டில் செய்யவேண்டும் என்று எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது.

ஆனால், நம்முடைய சமுதாய அமைப்பில் வெகு சில மாணவர்களுக்கு மட்டுமே வீட்டில் ஒப்படைப்புகளைக் கவனிக்கும் சூழ்நிலை இருக்கமுடியும். படிமுறைகள் எல்லாம் ஆசிரியர்களின் நேர் மேற்பார்வையிலேயே இருந்தால் மாணவர் களிடம் நல்ல முன்னேற்றம் இருக்கும் என்று பல கல்வியாளர்கள் கருதுகின்றனர். இக் காரணங்களைக் கருதியே பல பள்ளிகள் தங்கள் கால அட்டவணைகளில் இதற்கென்று குறிக்கப்பட்ட காலப் பகுதிகளில் கண்காணிப்புச் செய்ய ஏற்பாடுகள் செய்திருக் கின்றனர்.

பொதுவாக, வகுப்பில் பலதரப்பட்ட மாணவர்கள் இருப் பார்கள்; அவர்கள் மனோநிலைகளும் வேறுபட்டனவாயிருக்கலாம். ஆசிரியர்களின் மேற்பார்வையில் கற்பதனால் பெரும்பாலும் பின் தங்கிய மாணவர்களும் (slow learners), ஓரளவு இடைநிலை மாணவர்களும் பயனுறுகின்றனர். கணக்குகளைச் செய்வதற்காக எடுத்தெழுவது முதல் இறுதியாக விடை கண்டுபிடித்து எழுதும் வரை ஒவ்வொரு படியிலும் தவறும் மாணவர்களைத் தனித் தனியே கண்டு திருத்தவேண்டும்.

பெரும்பாலோர் ஒரே பிழையைச் செய்தால், தம் போதனை முறையில் ஏதோ குறைபாடுகள் இருக்கலாம் என்று அறிந்து, ஆசிரியர் வேறு புதிய முறைகளை, கருவிகளைப் பயன்படுத்திக் கற்பிக்கவேண்டும்.

புதிய முறைகள் ஆசிரியருக்கு அதிகமான வேலைப்பளுவையும், சோர்வையும், உண்டாக்கினாலும், இவற்றின் பயனைக் கருதி, ஆசிரியர்கள் இம் முறையை நல்ல விதத்தில் மேற்கொள்ள வேண்டும்.

தனிக்கவனம் அல்லது தனியாள் வேற்றுமைக் கேற்பக் கற்பித்தல்

வகுப்பறைப் போதனை : குருகுலவாச காலத்தில், ஓர் ஆசிரி யருக்கு ஒரு மாணவன் இருந்திருக்கலாம்; கல்வி எல்லோருக்கும் பொதுவானதன்று என்று நினைத்த காலம் அது. ஆனால், இப்போது பழைய நிலை மாறி, மறைந்துவிட்டது. கல்வி எல்லோருக்கும் இன்றியமையாதது என்ற நிலை வளரவே ஓர் ஆசிரியருக்கு ஒரு மாணவன் என்ற நிலை மாறி, ஓர் ஆசிரியர் பல மாணவருக்குப் போதிக்கவேண்டிய நிலை வளர்ந்தது. வகுப்பறைப் போதனை முறையில், பல நன்மைகளும் சில குறைகளும் இருப்பதைப் பார்க்கலாம்.

பொதுவாக, மாணவர்கள், அவர்களுடைய வயதின் அடிப்படையிலேயே ஒரு வகுப்புக்குச் சேர்க்கப்படுகின்றனர். ஓர் ஆசிரியர் ஒரே மாணவனுக்காகச் செலவிடும் நேரத்தில் பல மாணவர்களுக்குக் கற்றுத்தர முடிவதால் குறைந்த செலவில் எல்லோரும் கல்வி கற்க முடிகின்றது. அதுவுமல்லாமல், பல மாணவர்கள் கலந்து விவாதித்துக் கற்பதால் வகுப்பும் களையுடன் விளங்கும்; பாடத்தில் ஆர்வமும் ஓங்கும்; மாணவர்களிடம் நல்ல சுறுசுறுப்பும், திறமையும், போட்டி மனப்பான்மையும் வளரும்.

தனியாள் வேற்றுமைகள்

வகுப்பிலுள்ள பல மாணவர்களிடமுள்ள பரந்த வேற்றுமை இம் முறையைப் பெரிதும் பாதிக்கின்றது. ஒரே வயதான மாணவர்களாயிருப்பினும் அவர்கள் உடல்வளர்ச்சியிலும், மனமுதிர்ச்சியிலும் மாறுபாடு காணப்படுகின்றது. இவர்கள் விருப்புவெறுப்புகள், பலவகையான ஆற்றல்களிலும் வேறுபட்டே காணப்படுகின்றனர். பல்வேறு சமுதாய, பொருளாதாரச் சூழ்நிலையிலிருந்து வந்தவர்களாய் இருப்பதால் அவர்களுடைய அறிவு வளர்ச்சி ஒரே தகைமையுடையதாக இருத்தல் முடியாது.

மாணவர்களிடம் வெளிப்படையாகக் காணப்படும் பலவித வேற்றுமைகள் போலவே அவர்களுடைய மனவியல்புகளிலும் பல வேற்றுமைகள் இருக்கின்றன. அவர்களுடைய நுண்ணறிவும் (intelligence), மனப்பான்மையும், படிக்கும்பழக்கமும், தனிப்பட்ட விருப்பங்களும், கற்பனைத்திறன், உழைக்கும் திறன் முதலிய யாவும் வேறுபட்டவையே. படிப்பில் இவர்களுடைய சாதனை வேற்றுமைகளுக்கு வேறு காரணமும் வேண்டுமோ?

வகுப்பு முறைக் கல்வி, ஒரு மாணவர் கூட்டத்திற்காகத் திட்டமிடப்பட்டுச் செயற்படுவதால் தனியாள் வேற்றுமைகளைக் கவனிக்க முடிவதில்லை. ஆகவே, வகுப்பில் பின்தங்கிய மாணவர்களுக்கும் மற்றவர்களுக்கும் ஒரே நிலையில் கற்றுக்கொடுக்கப்படுவதால், பின்தங்கிய மாணவர்களைப் பொறுத்த அளவில் ஆசிரியருடைய வேலை பயனற்றதாகும். நாளாவட்டத்தில் மாணவர்கள் மனத்தளர்ச்சியுற்றுத் தேர்வுகளில் தோல்வியுறவோ அல்லது பள்ளியைவிட்டே அகன்றுபோகவோ நேரிடுகின்றது.

இதே போல் மீத்திறக் குழந்தைகளும் வகுப்பறை முறையினால் இடர்ப்பாடடைகின்றனர். இவர்களுடைய தனிப்பட்ட தேவைகள் நிறைவேறுவதில்லை. மற்றச் சாதாரணக் குழந்தைகளுக்குத் தரப்படும் கல்வியே இவர்களுக்கும் அளிக்கப்படுவதால் இவர்களுக்கும்

ஒரு வித மனச்சோர்வு ஏற்பட்டுத் தங்களுடைய தனித் திறமைகளை இவர்கள் இழந்துவிட நேரும். நாளாவட்டத்தில் இவர்கள் தங்களுடைய சாதாரணத் தேர்ச்சிப் பேறுகளிலேயே மனநிறைவடைகின்றனர்.

பொதுவாக, ஆசிரியர் வகுப்பில் கற்றுக்கொடுக்கும்போது, பின்தங்கிய மாணவர்கள், இடைநிலைப்பட்டோர், மீத்திற மாணவர்கள் இம் முப்பாலாரின் இயல்புகளையும் மனத்தில்கொண்டு தம்முடைய பாட முறையை அமைத்தால்தான் மாணவர்கள் எதிர்பார்த்த பலனையடைவர்.

தனியாள் கவனிப்பு (Individual attention)

வகுப்பு முறைக் கல்வியில் தனியாள் வேற்றுமைகளைக் கவனித்து, அவர்களுக்கு வேண்டிய வசதிகள் செய்ய இயலாதாகையால், வகுப்பறைப் பாட முறையினால் ஈடுசெய்ய முடியாதவற்றைத் தனிமுறைப் பயிற்சியின் (tutorial) மூலம் செய்ய முடியும் என்று பல கல்வியாளர்கள் கருதுகின்றனர். மாணவர்களைப், பின்தங்கியவர்கள், அல்லது மீத்திறக் குழந்தைகள் என்று கீழே கொடுக்கப்பட்ட பல்வேறு காரணங்களுக்காகப் பிரிக்கலாம்.

பின்தங்கிய மாணவர்கள் (slow learners)

1. நுண்ணறிவு ஈவு (I.Q) : 90-க்குக் கீழ்.
2. குறைந்தகாலக் கவனிப்புத் திறன்.
3. வலுவற்ற, நினைவுத் தொடர்கள்.
4. படித்தறியும் திறனில்லாதிருத்தல்.
5. தருக்க முறையில் தேர்ச்சியின்மை.
6. கற்பனைத் திறன் குறைவு.
7. தன் தவறுகளையே கண்டுகொள்ளத் திறன் இல்லாமை.
8. புதிய கருத்துகளைப் படைக்கும் அவாவின்மை.
9. கருத்தியலானவற்றைச் சிந்திக்கும் திறமையின்மை.
10. ஊக்கமின்மை.

மீத்திறக் குழந்தைகள் (Academically gifted)

1. பொருள்கள், கருத்துகளின் ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை எளிதில் புரிந்துகொள்ளும் ஆற்றல்.

2. சிறந்த நினைவாற்றல், சொல்வன்மை, மிகுந்த காலக் கவனிப்புத் திறன், தானே கற்றறியும் ஆற்றல்.
3. பண்புகளை மதிப்பதில் அளவுக்குமீறிய மனவளர்ச்சி.
4. எதையும் ஊக்கத்துடனும், ஆர்வத்துடனும் செய்யும் மனப்பான்மை.
5. தொடர்ந்து தருக்க முறைகளைக் கவனிக்கும் திறன்.
6. நுண்ணறிவுக் கேள்விகளைக் கேட்கும் திறன்.
7. பன்முறைப் பயிற்சியில் பொறுமையின்மை.
8. உயர் நுண்ணறிவு ஈவு (High I. Q.)

மீத்திறக் குழந்தைகளைத் தனிமுறையில் கவனிப்பதற்கான ஏற்பாடுகள் செய்வது பள்ளியின் தலையாய கடமைகளில் ஒன்ருகும். சற்றுக் கடினமான பிரச்சினைகளைத் தருவதன்மூலம் மீத்திற மாணவர்களின் ஆர்வம் குன்ருமல் காக்கலாம்; அதே சமயத்தில் தனிப்பட்ட முறையில் கவனம் செலுத்திப் பிற்போக்கான மாணவர்களையும் முன்னேற்றலாம். எளிதில் விடைகாணத்தக்க சுலபமான கணக்குகளைக் கொடுத்து அவர்களை மனநிறைவடையச் செய்யலாம்.

குழுவேலை (Group work)

மாணவர்களின் திறமையின் அடிப்படையில் வகுப்பைச் சிறிய குழுக்களாகப் பிரிப்பதில் பல நன்மைகள் இருப்பதாகக் கருதப்படுகின்றது. பல பள்ளிகளில், மாணவர்களை அவர்கள் படிக்கும் ஆற்றலைக்கொண்டு பிரிக்கின்றனர். இதற்கென்று தனியாகத் திட்டமிட்டுத் தேர்வுகள் நடத்தலாம். மாணவர்களின் உடல் இயல்பையும் வீட்டுச் சூழ்நிலையையும் கவனத்தில் கொள்வது நல்லது.

ஒரே திறமையுள்ள சிலர் ஒரே குழுவில் இருந்தால் அவர்கள் ஒரே வேகத்தில் கற்க வாய்ப்பிருக்கின்றது. இதனுல் மீத்திற மாணவர்களின் வேகமும் தடைபடாது; பின்தங்கிய மாணவனையும் துன்பப்படுத்த வேண்டியதில்லை. ஒரு குழுவிலிருந்து மற்றதற்குப் போவதற்கு வாய்ப்பிருந்தால், பெரும்பாலும் பின் தங்கிய மாணவர்கள் முன்னேறவே விரும்புவார்கள்.

இவ்விதக் குழு முறைக்கு எதிர்ப்புகள் இல்லாமல் இல்லை; ஒரே திறனுடைய மாணவர்கள் ஒரு குழுவில் இருப்பதால் குழுக்களிடையே நல்ல போட்டி மனப்பான்மையும், அகத்தூண்டுத

லுணர்வும் (inspiration) குன்றிவிடுகின்றன என்று ஆசிரியர்கள் கருதுகின்றனர். பொதுவாக, இப்படிப் பிரித்தல் ஒரகமான செயல் என்றும், முக்கியமாகப் பின்தங்கிய மாணவர்கள் இம் முறையினுல் தாழ்வுபடுத்தப்படுவதாகவும் கருதப்படுகின்றது. இதனுல் பின்தங்கிய மாணவர்கள் தன்னம்பிக்கை யிழக்கவும் அசட்டையாயிருக்கவும் நேரிடலாம். இவர்கள் தோல்வியைக்கூட விருப்புடன் ஏற்றுக்கொள்ளும் நிலேவரலாம்.

இவ்வாறன்றி, வகுப்பை, நன்ருகப் படிக்கும் சில மாணவர் களின்கீழ்ச் சிறு குழுக்களாகப் பிரிக்கலாம். மீத்திற மாணவர்கள் தங்கள் பொறுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் பாடங்களில் அவர் களுக்கு உதவலாம். ஆசிரியருக்கும் வகுப்பை மேற்பார்வை செய் வதில் இம் முறை மிகுந்த பயனுள்ளதாயிருக்கும். எழுத்து வேலே கள், வீட்டு வேலேகளேத் திருத்தவும் பன்முறைப் பயிற்சியளிக்கவும், வாய்பாடுகளேக் கேட்டுச் சோதித்தறியவும் இக் குழுத் தலேவர் களேப் பயன்படுத்தலாம். இம் முறையினுல்: பின்தங்கிய மாண வர்கள் பயனடைவதுமன்றி மீத்திற மாணவர்களும் தங்கள் திறமையை அறிந்துகொண்டதற்காக மனநிறைவடைவர்.

கணிதத்தில் பின்தங்கிய மாணவர்கள்பற்றிய பிரச்சினே—காரணங்கள்

1. மாணவர்களேப்பற்றியவை

(அ) குழந்தைகளின் நுண்ணறிவு ஈவை (Intelligent Quotient) அறியும் முறை நம் நாட்டில் பழக்கத்தில் இல்லாததால், அவர் களுடைய வயதின் அடிப்படையிலேயே அவர்களேப் பள்ளியில் சேர்க்கின்ருர்கள். இதில் பின்தங்கிய மாணவர்கள் இருப்பின், அவர்களால் வகுப்புச் சரியாக நடைபெறுவது தடைபடும்; அவர் களுக்கும் வகுப்பின் முழுப்பலனும் கிடைப்பதில்லே.

(ஆ) உடல்நிலே, உளநிலே, சூழ்நிலே, பொதுவாக மற்றப் பாடங் களேக் காட்டிலும், கணிதம் கற்கும்பொழுது உடலும் உள்ளமும் வெகுசீக்கிரத்திலேயே சோர்வுறுகின்றன. சூழ்நிலேயும் மன வெழுச்சிகளும் பின்தங்கிய மாணவர்களின் (பாடத்திலுள்ள) கவனத்தில் குறுக்கிடவும், கவனத்தைத் திருப்பவும் காரணமாக அமைகின்றன. அதனுல் கணக்கினேப் புரிந்துகொள்வதில் தடை ஏற்படுகின்றது.

2. ஆசிரியரைச் சார்ந்தவை

(i) குறிக்கோளில்லாத தன்மை: கற்றுக்கொடுக்கும் பாடத் திற்குக் குறிக்கோள் இல்லேயென்று பல சந்தர்ப்பங்களில் ஆசிரியர்

களே கருதுகின்றனர். இவ் வாசிரியர்கள் கற்றல் அனுபவங்களை மாணவர்கட்கு அளிக்க இயலாதவர்களாகின்றனர். கொள்கை கள், கோட்பாடுகள் முதலியவற்றை மாணவர்கள் அறிந்து பின் பற்றும் முறையில் அல்லாது அவசரமாகக் கூறிக்கொண்டு செல்வ தால் கணிதப் பாடம் களையிழந்து மந்தமாகவே அமையும். தகுந்த முன்னேற்பாடு இல்லாமையால் சில சந்தர்ப்பங்களில் மிகக் கடின மான கணிப்புவகைகள் குறுக்கிட்டு, எடுத்துக்கொண்ட கணக்கின் முக்கிய நோக்கத்தை மறக்கவும் நேரலாம். கணிதப் பாடத்தின் உள்நோக்கமே, அதன் வெற்றியைத் தீர்மானிப்பதில் பெருமள விற்கு உதவியாக உள்ளது.

(ii) கருத்துகளையும், கோட்பாடுகளையும் புலனீடாகவோ அல்லது காட்சி வடிவாகவோ அமைக்காமல் கற்றுக்கொடுப்பதே இவற்றை மாணவர்கள் தகுந்த முறையில் அறிந்துகொள்ளாத தற்கு முக்கியமான காரணமாகும். அடிப்படைக் கொள்கைகளைத் தெளிவுபடுத்தாததும், அரைகுறையாக விளக்குவதும் மாணவர் கள் பின்தங்கிப் போவதற்குரிய மற்றொரு காரணமாகும்.

(iii) மேலும், அடிப்படைத் தத்துவங்களில் போதிய அளவு பன்முறைப் பயிற்சிகள் வகுப்பிலேயே கொடுக்காததும் இதற்குக் காரணமாயிருக்கலாம்.

(iv) கணிதத்திற்கு நினைவாற்றல் மிகவும் அவசியம். தேவை யானபோது பழைய கோட்பாடுகளையும் கருத்துகளையும் மீண்டும் நோக்குதல் வேண்டும். இன்றேல், அப் பாடப் பகுதியில் முழுமை யாகவோ அல்லது ஓரளவிற்கோ அறியாமை ஏற்படக்கூடும்.

3. நிர்வாகத்தைச் சார்ந்தவை

பாடங்களை மாணவர் புரிந்துகொள்ளும் தன்மை, அதில் அவர்களது முன்னேற்றம் ஆகியவற்றின் அடிப்படையிலன்றி மாணவர்களை மேல்வகுப்பிற்குத் தேர்ச்சியளித்து அனுப்புவது சரியன்று.

4. பிறகாரணங்கள்

(அ) சில சமயங்களில் ஆசிரியர் ஒரு பாடத்திட்டத்திலுள்ள பாடங்கள் முழுவதையும் ஓர் ஆண்டில் முடிக்க முடியாமல் போவ துண்டு. ஒருவேளை விட்டுப்போன பாடங்களை அடுத்த ஆண்டில் ஆசிரியர் நடத்தாமலும் போவதுண்டு. இவ்வாறு ஆசிரியர் களிடையே ஒத்திசைவில்லாமையால் மாணவர்கள் பாதிக்கப்படு கின்றனர்.

(ஆ) ஆசிரியரின் கண்டனப் பேச்சும், தண்டனைகளும், இரக்க மற்றுக் குறையே கண்டுபிடிக்கும் குணமும், மெதுவாகக் கற்கும் மாணவர்களிடம் தவறான மனப்பான்மையைத் தோற்றுவிக்கின்றன.

(இ) சோதனை முறைகளும், மதிப்பீட்டு முறைகளும்கூட இதற்குக் காரணம் என்று கூறலாம். சோதனைத்தாளில் மிகக் கடினமான கேள்விகளும் சிக்கலான கேள்விகளும் மட்டுமே இருந்தால் இயற்கையாகவே பின்தங்கிய மாணவர்கள் மனத் தளர்ச்சியடைகின்றனர். இச் சோதனைகள் பின் தங்கியமாணவர் கள்கூட முயன்றால் செய்யலாம் என்ற உணர்வைத் தோற்று விக்கும் விதத்தில் அமைந்தால், கணிதம் அவர்களும் விரும்பக் கூடியதாக விளங்கும்.

தொடக்கக் கல்வி பயிலுபவர்களிடம் பொதுவாகக் காணப்படும் குறைபாடுகளும், பிழைகளும்

இவற்றைக் கீழே கண்டபடி வகைப்படுத்தலாம்:

(i) கருத்துகளைத் தெளிவாக அறியாதிருத்தல்.

(ii) அறிவாற்றல் இல்லாமை.

(iii) கற்கும் வேகம் இல்லாமை.

(iv) முன்னறிந்த கருத்துகளைப் பயன்படுத்தத் தெரியாமை.

(v) மனவெழுச்சி காரணத்தினால் அரைகுறையாகவும் கவனக்குறைவாகவும் செயற்படுதல்.

(vi) படிக்கும் பழக்கம் இல்லாமை.

இவற்றுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கீழேகாணலாம் :

1. x^2-க்கும் $2x$-க்கும் வேறுபாடு தெரியாதநிலை.

2. கோணத்தின் அளவுக்குப் பதில் மிகை நிரப்புக் கோணத்தை அளத்தல்.

3. மாணவர்கள் சில சமயங்களில் $3 \times 3 = 6$ என்றும் ஒரு எண்ணுக்குப் பதிலாக வேறொரு எண்ணை எழுதியும் தவறு செய்வர். மாணவர்களின் பரபரப்பும், கவனக்குறைவுமே இதற்குக் காரணங் களாகும். அவர்கள் கணக்குகளைச் செய்வதில் நிதானமும் அமைதியும் தேவைப்படுகின்றன.

குறையறிதல் (Diagnosis)

1. மாணவர்களை ஆசிரியர்கள் நன்றாக அறிந்திருத்தல் வேண்டும். அவன் இதற்கு முன் படித்த பள்ளிப்படிப்பு, அவ

னுடைய சாதனைகள், அவனுடைய தனிப்பட்ட இடர்ப்பாடுகள் முதலியவை ஆசிரியருக்குத் தெரிந்திருக்கவேண்டும்.

2. ஒவ்வொரு சோதனைக்குப் பின்னும் ஒவ்வொரு மாணவன் செய்யும் தவறுகளையும் கவனமாக ஆராயவேண்டும். விடைத் தாள்களைத் திருத்தும்போது, மாணவர்கள் செய்த பிழைகளையும், அவர்களது இடர்ப்பாடுகளையும் குறித்துவைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

3. கடினமான கணக்குகளைத் தம்மிடம் கேட்டுத் தெரிந்து கொள்ளும்படி மாணவர்களை ஆசிரியர் ஊக்குவிக்கலாம்.

4. மாணவர்களை அதிக அளவில் புரிந்துகொள்ள உதவும் திரள்பதிவேட்டினைப் பார்த்து ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும், கணி தத்தில் அவனுக்குள்ள குறைகளின் உண்மையான காரணத்தை ஆசிரியர் அறிந்துகொள்ள முடியும்.

குறை தீர்க்கும் வழிகள் (Remedial measures)

1. புதிய கோட்பாடுகள், செயல் முறைகளில் அதிகமான பன்முறைப் பயிற்சியளிக்கப்பட வேண்டும். முக்கியமாகப் பின் தங்கிய மாணவர்களுக்கு அவற்றில் நல்ல பழக்கம் ஏற்படும்வரை யிலும் இப் பயிற்சிகளைக் கொடுக்கவேண்டும்.

2. வடிவங்கள், விவர விளக்கப்படங்கள், வாய்மொழிக் கணக்குகள் முதலியவற்றை, அதிகமான அளவில் செய்து வகுப் பறையில் தேவைப்படும்போது பயன்படுத்தினால், கணக்குப் பாடம் கவர்ச்சியாக அமையும்.

3. போதிக்கப்படும் பாடத்தின் குறிக்கோளை மாணவர்கள் அறிந்துகொள்ள வேண்டுமாயின் கற்பிக்கும்போதே துருவி ஆராயும்படியான கேள்விகளை ஆசிரியர் கேட்கவேண்டும்.

4. பொருத்தமான கணக்குகள், தகுந்த அளவிற்கு வீட்டு வேலையாக அன்றாடம் கொடுக்கப்படவேண்டும்.

5. மனவெழுச்சி காரணமாக மாணவர்கள் பின்தங்கு வதைத் தவிர்க்க ஆசிரியர்கள் அன்புடனும், ஆதரவுடனும், உதவும் மனப்பான்மையுடனும் மாணவர்களிடம் பழகவேண்டும்.

6. கற்பித்தலின் ஒழுங்கற்ற போக்கிற்குக் காரணம், ஆசிரியரின் திட்டமிட்டுச் செயலாற்றாத தன்மைதான். பாடத்தின்

பல்வேறு பகுதிகளையும், அவற்றின் கடினத் தன்மையை அடிப் படையாகக்கொண்டு, போதனை நேரத்தைச் செலவிட வேண்டும்.

காரண விளக்கம்
(Rationalisation)

பண்டைக் காலக் கணிதப் போதனை முறையில் ஆசிரியர் கூறும் கருத்துகளையும், விதிகளையும், கோட்பாடுகளையும் மாணவர்கள் அப்படியே ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும் என்று வற்புறுத்தப்பட்டு வந்தது. இவற்றை மாணவன் புரிந்துகொண்டு, தேர்ச்சியும் பெறுவதற்கு வேண்டிய பழக்கவழக்கங்களை அவனே வளர்த்துக் கொள்ளும்படியான கட்டாய நிலை இருந்துவந்தது. கடினமான மனனப் பயிற்சியும், மாதிரிகளைப் பார்த்து மற்றக் கணக்குகளை புரிந்தோ, புரியாமலோ செய்வதும் இம் முறையின் முக்கியத் தன்மைகளாகும். எனவே, இம் முறையில் மாற்றம் தேவைப் பட்டது. பகுத்து ஆராயும் முறைகளை யாவரும் விரும்பும் நிலை ஏற்பட்டபோது பழைய முறைகளுக்கு எதிர்ப்பும் ஏற்பட்டது.

புதிய கல்வி முறையில் மாணவன் கற்க வேண்டிய பல கருத்துகளும், அவை மாணவன் மனத்தில் எவ்விதமான தொடர்புகளை ஏற்படுத்தவேண்டும் என்பதும் கூர்ந்து ஆராயப் பட்டன. விதிவருமுறை (inductivc method), வளர்ச்சியுறும் போதனை முறை (developmental teaching), சோதனைச்சாலை முறை முதலியவை மிகவும் உயர்வாகப் புகழப்பட்டன. ஒவ்வொரு படி முறையும் (steps) காரணத்தோடு விளக்கப்பட்டது. செயல் முறைகள் ஒவ்வொன்றும் பகுத்தறிவுக்குப் பொருத்தமாய் அமைக்கப்பட்டன. பல கருத்துகளின் உட் தொடர்புகள் கண்டு பிடிக்கப்பட்டன.

இவ்விதமான கல்வி மாணவனுடைய பட்டறிவை வளர்க்கப் பயன்படுவதுமட்டுமன்றி, பல கருத்துகளைப்பற்றிக் கோவையாக வும் பகுத்தறிவுக்குப் பொருந்துமாறும் சிந்திக்கக் கூடிய ஆற்றலை வளர்க்கின்றது. உயர்ந்த நுண்ணறிவைப் பயன்படுத்திக் காரண விளக்கம் காட்டக்கூடிய முறையில் கணிதப் பாடம் அமையுமானால், அது மாணவனின் நேரத்தையும், சக்தியையும் சிக்கனப்படுத்த உதவுவதன்றிக் கணிதப் பாடம் படிப்பதனால் ஏற்படவேண்டிய தளரா மனவலிமையையும் (mental vigour) கொடுக்கின்றது.

ஆயினும், முந்தைய இயந்திரத் தன்மையான முறைகளுக்கும், ஆய்வறிவைப் பயன்படுத்தும் பிந்தைய முறைகளுக்கும் குறிப் பிட்ட வரம்புகள் உண்டு என்று உணரப்படுகின்றது.

ஆய்வறிவைப் பயன்படுத்தும் வழிமுறைகள்

1. எண்கணிதச் செயல் முறை யொன்றைப் பலவிதமான கணக்குகளில் பயன்படுத்தப்படும்போது அதற்கு ஆய்வுமுறை விளக்கம் (rationalise) தரவேண்டும்.

2. இந்தக் காரண விளக்கங்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ளும் ஆற்றல் உடையவர்களாக இருக்கிறார்களா என்ற ஐயப்பாடு எழுமாயின், ஆய்வறிமுறையை விட்டுவிடுவதே சிறப்பாகும். தொடக்கப் பள்ளி வகுப்புகளில் எளிதில் விளக்கிக் கூற முடியாத, ஆனால், அடிக்கடி பயன்படுத்துவதாலும், அறிவு வளர்வதாலும் எளிதிலேயே புரிந்துகொள்ளக்கூடிய செயல் முறைகள் பலவற்றின் ஆய்வுமுறை விளக்கங்களைத் தள்ளிப் போட வேண்டும்.

3. ஒரே மாதிரியான ஆய்வுமுறை விளக்கங்களை எல்லா மாணவருக்கும் பயன்படுத்துதல் முறையன்று; சில மாணவர்கள் இந்த விளக்கங்களைப் புரிந்து இவற்றில் ஆர்வம் காட்டுவதன்றி இவற்றோடு தொடர்புள்ள மற்றக் கருத்துகளையும் நன்றாக அறிந்து கொள்வர். ஆனால், சில மாணவர்கள் இவற்றால் மனக்குழப்பம் அடைவதற்கும் வாய்ப்பிருக்கின்றது. ஆகவே, மாணவர்களின் அறிவு வளர்ச்சிக்கு ஏற்ப மாறுதல்கள் செய்யப்பட வேண்டும்.

எந்த முறையையும் காரண விளக்கத்துடன் அறிந்த பின்னரே அதை இயந்திரத் தன்மையாகப் (mechanise) பயன்படுத்துவது இன்றையப் போதனை முறையின் போக்காக இருக்கின்றது. ஆய்ந்தறிந்து செய்யும் பழக்கம், எச் செயல் முறையையும் நுண்ணறிவுடன் செய்யவும், புதிய சூழ்நிலைகளைத் திட மனத்துடன் எதிர்த்து வெற்றி காணவும் உதவுகின்றது.

புலனீடான உருக் கொடுத்தல் (concretisation) அல்லது காட்சிக் கருவிகளைப் பயன்படுத்துதல்

பொதுவாக வார்த்தைகள், எண்கள், குறியீடுகள், அல்லது கருத்தியலான தொடர்புகள், கருத்துகள் முதலியவற்றைப் பற்றிக் கூறும்போது, இவை உண்மையாகத் தொடர்புகொண்டுள்ள பொருள்கள், நிகழ்ச்சிகள், முதலியவற்றைப் புலனீடாய் அறியும் முறையில் எடுத்துக்காட்டுவதே இம் முறையின் நோக்கமாகும். பொது விதிகளின் கருத்தை விளக்குவதற்குக் காட்சிக் கருவிகள் பெரிதும் பயன்படுவதோடு, குறியீட்டின் தத்துவம் மாணவர்கள் மனத்தில் நன்றாகப் பதியவும் பயன்படுகின்றது.

உதாரணமாக,

(1) சாதாரண முழுஎண்கள் (positive integers) பொருள்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றன என்று உணருமட்டும் அவை அருத்த்மற்றுத் தோன்றுகின்றன. ஆனால், இந்த உண்மை தெரிந்தவுடன், முழு எண்களைப்பற்றி மாணவர்கள் மனத்தில் காட்சிநிலை வளர்கின்றது. இக் காட்சி நிலையைப் பயன்படுத்தி அதற்கு மேம்பட்ட கருத்து நிலைகளை விளக்கமுடியும்.

(2) பல கோணங்களின் பொதுப் பண்புகளைப்பற்றிப் படிக்கும் போது (n—பக்கப் பலகோணம்), ஐங்கோணம், அறுகோணம் முதலியவற்றைக் காட்சிப் பொருள்களாகப் பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பிட்ட ஒரு பொருளைப்பற்றி 'ஆய்வுச் சோதனை செய்யும் போதோ அல்லது அறிவியல் முறைகளின் சில வளர்ச்சிப் படிகளிலோ (Phases) கணித முறைகள் இயற்கையாகவே அமைந்து வரலாம். இவை மாணவர்களின் கவனத்தைக் கவரும்; ஆர்வத்தையும் வளர்க்கும். ஆனால், இப்படி அமையாத நிலைகளில், நினைவாற்றலையோ, இதற்குமுன் அறிந்த கருத்துகளையோ காட்சிப் பொருளாகப் பயன்படுத்த முயலவேண்டும்.

காட்சிப் பொருள்மூலம் கற்பிக்கும் முறை, ஆரம்பப் பள்ளி வகுப்புகளுக்கு மட்டுமே ஏற்றது என்று கூறமுடியாது. புதுமையான உண்மைகள், தொடர்புகள், செயல் முறைகள் எவ்வெப்போது கற்பிக்கப்படுகின்றனவோ அப்போதெல்லாம் இம் முறையைப் பின்பற்றிப் பயனடையலாம். எவ்வளவு காட்சிப் பொருள்களைப் பயன்படுத்தலாம் என்பது கற்பிக்கப்படும் கருத்தையோ கருத்துகளின் தொடர்பையோ செயல் முறையையோ மட்டுமன்றி இவையெல்லாவற்றிற்கும் மேலாக, மாணவர்களின் பட்டறிவையும் திறனையும் பொறுத்ததாகும்.

பொதுவாக, தேவைப்பட்டால் மட்டுமே, காட்சிப் பொருள்களை மென்மேலும் காட்டி மாணவர்களின் அறிவை வளரச் செய்வது முறையாகும். முடிந்தவரையில் மாணவர்களை, கருத்தியலாகச் சிந்திக்கவும், பொது விதி முறைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும் எவ்வளவு வேகமாகத் திருப்ப முடியுமோ அவ்வளவு வேகமாகத் திருப்பவேண்டும். ஏனெனில், உயர் கணித முறைகளில் (கல்லூரிகளில்) அமைந்துள்ள பற்பல கருத்துகளுக்கும், கோட்பாடுகளுக்கும், புலனீடான காட்சிப் பொருள்களை ஏற்படுத்திக் காட்டுவது இயலாத காரியமாகும்.

புதிர்க் கணக்குகளும் புதிர்க் கணக்குகளைத் தீர்க்கும் முறைகளும்

சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்க்கும் அனுபவம் கணிதக் கல்விக்கு உயிரூட்டுவதாகும்; பற்பல கணிப்பு முறைகளின் பயனை இவற்றால் மட்டிலுமே அறியமுடியும். மேலும், சமுதாய, பொருளாதார அனுபவங்களின் அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்ட சிந்தனைக் கணக்குகள், வாழ்க்கையின் பயனுறு நோக்கங்களையும் (social aim) கட்டுப்பாட்டு நோக்கங்களையும் (disciplinary aim) நிறைவேற்ற வாய்ப்பளிக்கின்றன. சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்க்கும்பொழுது மாணவர்கள், எதிர்த்துப் போராடும் மனவலிமை பெறுகின்றனர்.

சிந்தனைக் கணக்கு என்பது, பயிற்சிக் கணக்கு (exercise), மாதிரிக் கணக்கு (example) இவற்றிலிருந்து எங்ஙனம் வேறுபட்டது என்று பார்க்கலாம்.

பயிற்சிக் கணக்கு: பயிற்சிக் கணக்கு என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட கணிப்பு முறையை நேரடியாகப் பயன்படுத்தத் தரப்படுவது.

உதாரணம்: 586×7-ன் விடையென்ன?

மாதிரிக் கணக்கு: இக் கணக்குகளில் மாணவர்கள் தாங்களாகவே செயல் முறைகளைத் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும்.

உதாரணம்: ஒரு வகுப்பில் 36 மாணவர்கள் உள்ளனர். அவர்களுள் $\frac{2}{3}$ பகுதியினர் நடுத்தர வகுப்பைச் சேர்ந்தவர்கள் என்றால், இவ் வகுப்பு மாணவர்களுள் நடுத்தர வகுப்பைச் சேர்ந்தவர்கள் எத்தனை பேர்? இந்தக் கணக்கில் நேரடியாகப் பெருக்க வேண்டும் என்று கூறப்படாவிட்டாலும், கணக்கை ஒரு முறை வாசித்தவுடன், தீர்க்கும் முறையை மாணவர்களால் புரிந்துகொள்ள முடியும்.

சிந்தனைக் கணக்கு: இந்தக் கணக்குகள் மற்ற இரண்டிலிருந்தும் வேறுபட்டவையாகும். இவை மாணவர்களைத் தீர்வுகாணும் போராட்டத்திற்கு அழைப்பதாகும். சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்க்கத் திட்டமிடுதலும், ஆய்வும் அவசியம்.

உதாரணம்: 5-6-1972-ல் 5 மாதத் தவணைக்குத் தயார் செய்யப்பட்ட ரூ. 9,000 உண்டியலை 27-8-1972-ல் ஒரு வங்கியில் மாற்றியதில் கிடைத்த தொகை ரூ. 8,892 என்றால், தள்ளுபடியின் சதவீதம் என்ன?

குறிப்பு: ஒரு மாணவனுக்குச் சிந்தனைக் கணக்காக அமைவது மற்றொரு மாணவனுக்கு மாதிரிக் கணக்காக அமையக்கூடும். புதிய செயல் முறைகளில் மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெறுவதற்கு, இம் மூன்று விதங்களிலும், இவை கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் வளர்ச்சிப்படியிலேயே கணக்குகள் கொடுக்கவேண்டும்.

சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்க்கும் ஆற்றல்

1. புத்திக்கூர்மை (அல்லது நுண்ணறிவு)–கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளின் தொடர்பை அறிதல்.
2. கணிதக் கலைச்சொற்களைப் புரிந்துகொள்ளும் திறமை.
3. சிந்தனைக் கணக்குகளை அமைத்துத்தரும் சூழ்நிலைகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
4. அடிப்படைக் கணிப்பு முறைகளில் ஆற்றல்.
5. திட்பமாகச் செய்யும் மனநிலை, விடைகளைச் சரிபார்க்கும் பழக்கம்.

சிந்தனைக் கணக்குகளைச் செய்வதில் தவறுகள் வரக் காரணங்கள்

1. சிந்தனைக் கணக்குகளைச் சரியாகப் புரிந்துகொள்ளாமை.
2. தவறான வழிகளைக் கையாளுதல்; முக்கியமான தகவல்கள் சிலவற்றை விட்டுவிடுதல்.
3. அடிப்படை அளவுத் தொடர்புகளை அறியாமை.
4. அடிப்படைச் செயல் முறைகளில் நுட்பமின்மை.
5. சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பொருத்தமான முறைகளைக் கையாளாமை.
6. உடற்குறைகள்.

குறைகளைத் தீர்க்கும் முறைகள்

காலம் செல்லச்செல்ல மாணவர்கள் வளர்ச்சி அடைவதால் புத்திக்கூர்மை வளர்ச்சியடைகிறது. கற்பிக்கும் முறையைத் திருத்திக் கொள்வதால், வாசித்தல், புரிந்துகொள்ளுதல் இவற்றிலுள்ள குறைகளைத் தீர்க்கமுடியும். அனுபவக்குறைவினால், அடிப்படைச் செயல் முறைகளில் தவறுகள் ஏற்படலாம். குறையறி சோதனைகள் மூலமாகவும், மாணவர்களைப் பிரித்துத் தனிப் பயிற்சிகள் அளிப்பதன்மூலமாகவும் இக் குறைகளைத் தீர்க்க முடியும்.

ஒரு நல்ல சிந்தனைக் கணக்கின் பண்புகள்

1. சிந்தனைக் கணக்குகள் உண்மைக் கருத்துகளைக்கொண்டதாய், அதாவது, வாழ்க்கை நடைமுறைகளுக்கு ஏற்றதாய் இருக்கவேண்டும். கணக்குகளில் தரப்படும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக இருக்கவேண்டும்.

2. தெளிவான எளிய நடையில் கணக்குகளை அமைக்க வேண்டும்.

மாணவர்களின் வீட்டுச் செயல்கள், தனிப்பட்ட செயல்கள், பள்ளிச் செயல்கள் ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தும் சிந்தனைக் கணக்குகளை ஆசிரியர்கள் அமைக்கவேண்டும். கணிதப் புத்தகங்களில் அநேக விதமான கணக்குகள் தரப்பட்டிருந்தால் ஆசிரியர்கள் தங்கள் மாணவர்களுக்குத் தேவையான கணக்குகளை இவற்றிலிருந்து தேர்ந்து எடுத்துக்கொள்ளமுடியும்.

சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கான படிகள்

மாணவர்களின் அறிவாற்றல், பொருளுணர்வாற்றல், செயலாற்றல், திறன் முதலியவற்றை முறையே :வளர்க்கும் விதத்தில் சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதன் படிகள் அமையவேண்டும்.

அதாவது,

1. விவரங்களைப்புரிந்துகொள்ளுதல் (Grasping the situation).
2. உறுதிப்படுத்துதல் (ascertaining).
   (அ) கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை—தெரிந்தவை;
   (ஆ) கேட்கப்பட்டுள்ளவை —தெரியாதவை.
3. தீர்க்கும் முறையைத் திட்டமிடுதல்.
4. திட்டத்தைச் செயலாற்றுதல்.
5. விடையைச் சரிபார்த்தல்.

விவரங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல்

கணித மொழியைப் புரிந்துகொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக, பட்டியல் விலை, நிகரவிலை, தள்ளுபடி, நிகழ்மதிப்பு, சார்பு வேகம், சார்பலன், விகிதசமம், நேர்விகிதம், எதிர்விகிதம், மாறிலி முதலிய பல வார்த்தைகளின் பொருளைத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

உறுதிப்படுத்துதல்

முதற்படியாக, கேட்கப்பட்டவை, கொடுக்கப்பட்டவை ஆகிய இவற்றைத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். இவற்றைத் தெரிந்து கொள்ளுவதால் திட்டமிட்டு வேலை செய்யவும், வெற்றியடைய வும், வழிஅமைக்க முடியும். மாணவர்கள் ஆய்வின்றிச் சிக்கல் களைத் தீர்ப்பதில் முற்படும் பழக்கத்தைத் தடுக்கவேண்டும். அவர் களுக்கு எவற்றைப்பற்றிச் சிந்திக்க வேண்டும், எவ்வாறு சிந்திக்க வேண்டும் என்பதைக் கற்பிக்கவேண்டும். மாணவர்கள் இந்த ஆரம்பப் படியைச் சரிவரக் கடந்த பின்னர்த்தான் பிற படிகளைச் செய்ய இயலும்.

திட்டமிடல்

சிக்கலை நன்ருகப் புரிந்துகொண்ட பின்னரே, தீர்க்கும் முறை களைத் திட்டமிட வேண்டும். படிகளைத் தெளிவாக எழுதிக் கொண்டபின் கணிப்புகளைச் செய்யவேண்டும்.

உதாரணம்: A-ன் சம்பளம் ஆண்டிற்கு ரூ. 8,000. அவருக்கு ஒரு வங்கியில் ரூ. 4,500-க்கு குறித்தகால இட்டுவைப்பிலிருந்து 8% வட்டி வீதம், 6 மாதத்திற்கொருமுறை பணம் கிடைக்கிறது. ஆண்டின் முடிவில் அவருடைய வருமானம் என்ன?

கேட்கப்பட்டுள்ளது: மொத்த வருமானம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: (1) ஆண்டு வருமானம்.
(2) முதலீடு.
(3) வட்டிவீதம்.
(4) காலம்.

திட்டம்

1. முதல் 6 மாத வட்டி கணக்கிடல்.
2. அடுத்த 6 மாத வட்டி கணக்கிடல்.
3. மொத்த வருமானம் கணக்கிடல்.

கணக்குகளைத் தீர்க்கும் முறையில் நன்ருகத் தேர்ச்சியடைந்த பின், இம் மாதிரி எழுத்து வேலைகளை நீக்கிவிடலாம். மனத்திலேயே கொடுக்கப்பட்டவை, கேட்கப்பட்டவை என்று கற்பனை செய்து பழகிக்கொள்ளலாம்.

சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்க்கும் முறைகள்

1. உதவிப் படத்துடன் செய்தல் (graphic method).
2. பகுப்பு முறை (method of analysis).
   (அ) ஒன்றூடான முறை (unitary analysis)
   (ஆ) விகிதப்பகுப்பு முறை (ratio analysis)
   (இ) இயற் கணிதப் பகுப்பு முறை (algebraic analysis)
   (ஈ) விகிதசம மூலம் ஆராய்தல் (analysis through ratio and proportion)
3. சூத்திரங்களையும், விதிகளையும் உபயோகித்தல்.

(1) உதவிப் படத்துடன் செய்தல்: கணக்கு, புதியமாதிரி யாக இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளைப் பார்த்தவுடன் காணமுடிவதில்லை. இச் சந்தர்ப் பங்களில் உதவிப்படம் வரைந்துகொள்வது நல்லது. [பாதைகளின் பரப்பு (செவ்வகத்தின் வெளியே அமைத்தல், உள்ளே அமைத்தல், பக்கங்களுக்கு இணையாக நடுவில் அமைத்தல்), வட்ட வளையத்தின் பரப்பு, உள்ளீடற்ற உருளை, பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தித் தீர்க்கும் கணக்குகள், காலமும் தூரமும் ஆகிய இத் தலைப்புகளில் வரும் கணக்குகளை இம் முறைக்கு எடுத்துக்காட்டாகக் கூறலாம்] படம் வரைந்து, கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிப்ப தால், கணக்கின் நிபந்தனைகள் நன்கு விளங்கும்.

(2) பகுப்பு முறை: ஒரு கணக்கைத் தீர்க்கும்பொழுது கீழ்க் கண்ட எந்த முறையில் எளிதில் தீர்க்கலாமோ, அதைக் கையாள லாம்.

(அ) ஒன்றூடான பகுப்பு முறை: நொடித்துப்போன ஒரு மனிதன் (bankrupt) ரூபாய்க்கு 15பை வீதம் திருப்பிக்கொடுக் கிறான். கடன் கொடுத்தவர் ரூ 5,100 திரும்பப் பெற்றால் கடன் வாங்கிய தொகை என்ன?

$$\text{தொகையில் } 15\% = \text{ரூ. } 5,100$$

$$\text{தொகையில் } 1\% = \frac{5100}{15}$$

$$\text{முழுவதும் அல்லது } 100\% = \frac{5100}{15} \times 100 = \text{ரூ. } 3,40,000$$

விடை: ரூ. 3,40,000

(ஆ) விகிதப் பகுப்புமுறை: A என்பவர் 10 புடவைகளை ரூ. 462-க்கு வாங்கினார். அதே மாதிரியான 40 புடவைகளுக்கு எவ்வளவு கொடுக்கவேண்டும்?

10 புடவைகளின் விலை ரூ 462/-

40 புடவைகளின் அதாவது,

(4×10) புடவைகளின் விலை $4\times 462=$ ரூ. 1848

$\therefore$ 40 புடவைகளின் விலை = ரூ. 1848 விடை.

புடவைகளின் எண்ணிக்கை 4 மடங்கானால், விலையும் 4 மடங்கு ஆகும்.

(இ) இயற்கணிதப் பகுப்பு முறை: ஒரு வியாபாரி 5% தள்ளுபடி செய்து ஒரு பொருளை ரூ. 57-க்கு விற்கிறார். அப் பொருளின் குறித்த விலையென்ன?

குறித்த விலை ரூ. x எனக்கொள்க.

$$\text{விற்றவிலை} = \text{ரூ.}\left(x - \frac{x}{20}\right) = \text{ரூ.}\frac{19}{20}x$$

ஆனால் விற்றவிலை = ரூ. 57.

$$\therefore \frac{19x}{20} = 57$$

$$x = \frac{\overset{3}{\cancel{57}} \times 20}{\cancel{19}} = 60.$$

$\therefore$ குறித்த விலை = ரூ. 60 விடை.

சரிபார்த்தல்

$$\text{குறித்த விலையில் } 15\% \text{ தள்ளுபடி} = \frac{\cancel{5}}{\underset{2}{\cancel{100}}} \times \overset{3}{\cancel{60}} = \text{ரூ. } 3$$

ஆதலால் விற்ற விலை (ரூ. 60 — ரூ. 3) = ரூ. 57.

(ஈ) விகித சம மூலம் ஆராய்தல்: ஓர் உந்து வண்டி மணிக்கு 25 கி. மீ. வேகத்தில் சென்றால் 4 மணி நேரத்தில் ஓர் ஊரை அடைகிறது. 50 கி.மீ. வேகத்தில் அதே ஊரை எவ்வளவு நேரத்தில் சென்றடைய முடியும்?

விகிதசம மூலம் ஆராய்தல்	விகிதப் பகுப்பு முறை
தூரம் மாறுதிருக்கும் பொழுது காலமும் வேகமும் எதிர் விகிதத்தில் இருக்கும். ஆதலால், $25 : 50 = x : 4$ $\therefore\ x = \frac{25 \times 4}{50} = 2$ மணி நேரம் விடை — 2 மணி நேரம்	50 கி. மீ. வேகம் = 25 கி. மீ. வேகத்தைப் போல் 2 மடங்கு. ஆதலால், எடுத்துக்கொள்ளும் காலம் 4 மணி நேரத்தில் பாதி, அதாவது 2 மணி நேரம்.

(3) சூத்திரங்கள் அல்லது விதிகளைப் பயன்படுத்திச் சிந்தனைக் கணக்குகளைத் தீர்த்தல்.

மேற்கூறியவற்றோடு கணக்குகளில் தரப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளை உருவகப்படுத்தத் துணைக்கருவிகளையும் பயன்படுத்தலாம்.

விடையைச் சரிபார்த்தல்: விடைகள் சரியாக இருக்கவேண்டியதன் அவசியத்தை மாணவர்களுக்குத் தெளிவாக்குவது மிகவும் முக்கியமாகும். அவர்கள் விடையைச் சரிபார்க்கக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றை உபயோகிக்கலாம்.

(அ) கணக்குகளைப் பின்னோக்கிச் செய்தல்.

(ஆ) கணக்குகளை வேறொரு முறையை உபயோகித்துச் செய்தல்.

(இ) ஒவ்வொரு படியையும் திரும்பச் செய்தல்.

(ஈ) கிடைத்த விடையை, தோராயமாக மதிப்பிட்ட விடையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தல். இம் முறையினால், விடை, அறிவுக்குப் பொருத்தமில்லாமல் இருக்கிறதா என்பதைக் கண்டறியலாம்.

வேகத்தையும் பிழையின்மையையும் வளர்த்தல்

திட்பத்திற்கும் வேகத்திற்குமுள்ள தொடர்பு

கணிதத்தின் இயல்பான தன்மையையொட்டியே கணிப்பு முறைகளில் மிகத் திட்டமாகப் பிழையின்றிச் செயற்பட வேண்டும். ஆனால், செயல்முறையின் வேகத்தையும் கவனிக்க

வேண்டும். ஏனெனில், மற்ற எல்லாச் சூழ்நிலைகளும் யாவருக்கும் ஒரே தன்மையானதால் வேகமாகக் கணிப்பவன் மெதுவாகக் கணிப்பவனைவிட அதிகப் பயனை அடைகிறான். ஆகையால், திட்பம் தவறாத முறையில் எவ்வளவு வேகமாகக் கணக்குகளைச் செய்ய முடியுமோ அவ்வளவு வேகமாகச் செய்யப் பழகவேண்டும். வேகமும், திட்பமும் நெருங்கிய தொடர்புடையவையாகும்.

திட்பமுடன் கணிப்பதில் முன்னேற்றம் அடைவதை எவ்வாறு அதிகப்படுத்துவது?

சில எளிய கணிதச் செயல் முறைகளைத் தொடர்ந்து பயில்விப்பதன் மூலம் பிழையின்றிச் செய்யப் பழக்கலாம். உடனடியான பலனளிக்காவிடினும், நாளடைவில் இம் முறை நல்ல பலனைத்தரும்.

1. அடிப்படைச் செயல்முறைகளிலும், அவற்றின் தொடர்புச் செயல்முறைகளிலும் பழக்கம் ஏற்படுத்துதல்: *பழக்கமில்லாத காரணத்தால் மெதுவாகச் சிந்தித்துச் செயற்படுபவனைக் காட்டிலும், பழக்கமுள்ளவனால் திருத்தமாகக் கணக்கைச் செய்ய முடியும்.*

2. தெளிவும், எண்களின் இடமதிப்பும்: *எண்களைத் தெளிவாக எழுதாமையாலும் அவற்றை இடமதிப்புப்படி கவனத்துடன் எழுதாமையாலும் பெரும்பாலும் கணிப்புகளில் பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.*

தெளிவின்றி எழுதுவதால் ஏற்படும் பிழைகளுக்கு உதாரணங்கள்	இடமதிப்பில் தவறு செய்வதற்கு உதாரணங்கள்
0-ம், 6-ம்	கூட்டுக 1. 408, 24, 312, 48
3-ம், 8-ம்	2. ·008 + 4·22 + ·528
7-ம், 9-ம்	
1-ம், 9-ம்	1. 408 2. ·008
1-ம், 7-ம்	24 4·22
5-ம், 6-ம்	312 ·528
மேலே குறிப்பிட்ட இரண்டிரண்டு எண்களை விரைவு காரணமாக வேறுபாடின்றி எழுதுதல்	48

எழுத்துப் பயிற்சிகளில், எண்களைத் தெளிவாகவும், வரிசைப் படியாகவும் எழுதப் பழக்கவேண்டும்.

3. எண்களைப் பார்த்து எழுதுவதில் திறமை : எண்களைப் பார்த்து எழுதுவதில் தவறிடுவது, எண் கணிதத்தில் ஏற்படும் பிழைகளுக்கு முக்கியமான காரணம் எனப் பல ஆசிரியர்கள் கருதுகின்றனர்.

உதாரணமாக,

(அ) எண்களில் 'புதிய' இலக்கங்களைக் கவனக்குறைவாகச் சேர்ப்பதால் ஏற்படும் தவறு. 247 என்பதற்குப் பதில் 2467 என்று எழுதுவது.

(ஆ) எண்களில் இலக்கங்களை மாற்றி எழுதும் தவறு. 2452-க்குப் பதில் 2542 என்று எழுதுவது.

(இ) எண்களில் இலக்கங்களை விட்டுவிடும் தவறு. 702-க்குப் பதில் 72 என்று எழுதுதல்.

வேகமாகப் பார்த்து எழுதமுடியாத மாணவர்களே பெரும் பாலும் மேற்கண்ட பிழைகளைச் செய்கின்றனர். அடிக்கடி ஒழுங் காக இதற்கென்று திட்டமிட்ட சிறு பயிற்சிகளைத் தருவதால் இப் பிழைகள் ஏற்படுவதைக் குறைக்க இயலும். இது மாணவர்களுக்கு நல்ல திறமையை ஏற்படுத்தும்,

4. பூச்சியத்தைப் பயன்படுத்துவதில் திறமை : எண்களில் பூச்சியங்கள் இருக்கும்போது சாதாரணமாக ஏற்படும் பிழைகள்.

உதாரணம்:

கழித்தல்	பெருக்கல்	வகுத்தல்
1) 8000	2) $4 \times 0 = 4$	4) 4 | 52088
2982		1322
6982	3) 627	
	×208	
	5016	
	1254	
	17556	

5. முடிவுகளைப்பற்றிய திறனாய்வு:

(அ) மாணவர்கள் கணக்குகளின் விடைகளைச் சரிபார்க்கும் பழக்கத்தை வளர்க்கவேண்டும்.

(ஆ) விடைகளைத் தோராயமாகக் கணக்கிடவும் பழக்க வேண்டும்.

(இ) முடிவான விடைகளை மட்டும் சரிபார்த்தல் போதாது. கணக்கின் ஒவ்வொரு படியிலும் சரிபார்த்த பின்னரே, அடுத்த படிக்குச் செல்லவேண்டும்.

6. கணக்கை நன்கு புரிந்துகொண்டபின் அதைத் தீர்க்கும் வழியைப்பற்றி ஆராயும் திறனை வளர்த்தல்: பயிற்சியில்லாத மாணவன் கணக்கை நன்கு வாசித்துப் புரிந்துகொள்ளாமல், என்ன கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, என்ன கேட்கப்பட்டுள்ளது என்பவற்றை ஆராயாது ஒருவித அவசரத்துடன் செய்யமுற்படுகின்றான். எனவே, எவ்வாறு செய்யவேண்டும் என்பதைத் திட்டமிட மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியளிக்கவேண்டும்.

7. வழிவகைகளைத் தவறின்றி எழுதுதல்: வழிவகைகளைச் சரியாய் எழுதுவதே கணக்கைச் சரிவரப் புரிந்துகொண்டதன் அடையாளமாகும்.

வேகத்தை அதிகப்படுத்துதல்

1. திட்பத்தை வளர்த்தல்

2. எண்கணிதத்திற்குத் தேவையான பழக்கங்களை வளர்த்தல்: நன்கு பழக்கிய செயல்களையே விரைவாகச் செய்ய முடியும். எனவே, எண்களின் சேர்க்கை, வாய்பாடுகள், சூத்திரங்கள், பின்னத்தைத் தசமபின்னமாக மாற்றுதல், தசமபின்னத்தைச் சதவீதமாக மாற்றுதல் முதலியவற்றில் பழக்கப்படுத்துதல் வேண்டும். 10, 100, 25, 50, 125, 625 போன்ற எண்களால் பெருக்குவதற்கும், வகுப்பதற்கும் பயிற்சியளிக்கப்பட வேண்டும். 101, 98, 302 போன்ற எண்களால் சுருக்க முறையில் பெருக்கவும் கற்பிக்கவேண்டும். 1 முதல் 25 முடிய உள்ள எண்களின் வருக்கங்களையும், 625 வரை உள்ள முழு வருக்க எண்களின் வருக்க மூலங்களையும் மாணவர்கள் நினைவில் வைத்துக்கொள்ளும்படி பழக்க வேண்டும்.

3. குறிப்பிட்ட வேலைக்குரிய காலத்தை வரையறை செய்தல்: எண்கணிதத்தில் கொடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு வேலைக்கும் காலத்தை வரையறுப்பதுதான் நல்லது. மாணவர்களுக்கு

வேலையைக் கொடுத்துக் குறிப்பிட்ட நேரத்திற்குள் செய்தே ஆக வேண்டும் என்று சொன்னால் அவர்கள் மிகக் கவனத்துடனும் தகுந்த வேகத்துடனும் வேலையைக் குறித்த காலத்தில் செய்வார்கள்.

4. சுருக்க முறைகளைப் (short cut) பயன்படுத்துதல்: சுருக்க முறைகளில் கணக்குச் செய்வதால் நேரம் வீணுவதைத் தடுக்கலாம்.

5. குறைந்த படிகளைப் பயன்படுத்துதல்: தேவையற்ற படிகளை எழுதாமல் குறைந்த படிகளின் மூலம் கணக்குகளைச் செய்வது வேகத்தை அதிகரிக்கப் பயன்படும்.

உதாரணம்: ஒரு நகரத்தின் மக்கள்தொகை 2,90,000. அதில் இந்துக்கள் 35%. இவர்களில் படித்தவர்கள் 40%. படித்த இந்துக்கள் எத்தனை பேர்?

மொத்த மக்கள்தொகை 100 எனக் கொள்க.

மக்கள்தொகை 100 என்றால் இந்துக்கள் 35.

∴ மக்கள்தொகை 2,90,000 என்றால்

$$\text{இந்துக்கள்} = \frac{2900\not{0}\not{0}\times 35}{1\not{0}\not{0}}$$

$$= 101500$$

இந்துக்கள் 100 என்றால் படித்தவர்கள் $= 40$

$$\text{இந்துக்கள் 101500 என்றால் படித்தவர்கள்} = \frac{101500\times 40}{100}$$

$= 40,600$ பேர்

விடை.

அல்லது, கீழ்க்கண்டவாறும் செய்யலாம்.

நகரத்தின் மக்கள்தொகை $= 2,90,000$,

$$\text{இந்துக்கள் 2,90,000-ல் 35\%} = \frac{2,90,0\not{0}\not{0}\times 35}{1\not{0}\not{0}}$$

படித்த இந்துக்கள் $= 2900\times 35$-ல் 40%

$$= \frac{29\not{0}\not{0}\times 40\times 35}{1\not{0}\not{0}}$$

$= 40,600$ பேர் விடை.

6. மாணவர்களின் திறமைக்கேற்பப் பயிற்சிக் கணக்குகள் கொடுத்தல்: மீத்திற மாணவர்களுக்கு மற்றவர்களைக் காட்டிலும்

கடினமான கணக்குகளைக் கொடுப்பதால் அவர்களுடைய திறமை வளர்வதற்கு வாய்ப்பளிக்கலாம்.

எண்கணிதத்தில் திட்பமாகவும், வேகமாகவும் கணக்குகளைச் செய்யும் ஆற்றலைப் பழக்கத்தினுல்தான் வளர்க்கமுடியும். இத் திறன்களைத் தொடர்ந்த பயிற்சியின்மூலம் அடையமுடியும். தன்னுல் இயன்ற அளவு விரைவாக வேலை செய்ய வேண்டும் என்பதை மாணவர்கள் உணரச் செய்யவேண்டும். ஒவ்வொரு மாணவனின் ஆற்றலுக்கும் தனித்தனிப் பதிவுத்தாள் (Progress card) வைத்திருப்பது மாணவர்கள் உற்சாகத்துடன் வேலையில் ஈடுபடத் தூண்டும். திட்பமில்லாமல் வேகமாகச் செய்வதில் அருத்தமில்லை.

வேகமின்மையும் திட்பமின்மையும் கீழ்க்கண்ட குறைகளால் ஏற்படுகின்றன:

(அ) கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்ளாமை.

(ஆ) அடிப்படை விதிகளில் தேர்ச்சியில்லாமை.

(இ) கணக்கைத் தீர்க்கும் சரியான வழி தெரியாமல் இருத்தல்.

(ஈ) பயிற்சியில்லாமை.

(உ) தன்னம்பிக்கை இல்லாமை.

(ஊ) படிக்கும் பழக்கங்களில் பின்தங்கி இருத்தல்.

ஒப்படைகளும் அவற்றைத் திருத்துதலும்

ஒப்படைகள் (Assignments)

ஒப்படைகள் தயாரித்தல் கற்பித்தலின் ஒரு முக்கியப் பகுதியாகும். ஒப்படைகள் சிறந்த கற்கும் முறையினைத் தருவதோடு, கற்கும் நோக்கத்தையும் நிறைவேற்றுகின்றன. ஆசிரியர்கள் தங்களுடைய வேலை நேரத்தில் ஒரு பகுதியைச் சிறந்த முறையில் பயன்படுத்த ஒப்படைகள் வாய்ப்பளிக்கின்றன. வகுப்பறை வேலையில் ஒரு முக்கியப் பாகமாக இது கருதப்பட வேண்டும். மாணவர்கள் சுதந்திரமாகச் செய்யும்வகையில் இவ் வேலைகள் கொடுக்கப்படுவது சிறந்தது.

வகுப்பு முழுவதற்கும் கற்பித்தபின், மாணவர்களுக்குச் சந்தேகங்கள் ஏற்படும்போது தனிப்பட்ட முறையில் குறிப்புரை

(hints) வழங்குவதற்கு, ஒப்படைகள் ஆசிரியருக்கு வாய்ப்பளிக்கின்றன. அவ்வாறு வழங்கப்பட்ட குறிப்புரைகளை ஆசிரியர் நினைவில் வைத்துக்கொண்டு கற்பிக்கும் முறையை மாற்றி அமைக்கலாம். ஒப்படைகள், ஆசிரியரின் கற்பிக்கும் முறையையும், மாணவர்கள் கற்றுக்கொண்ட அளவையும் வெளிப்படுத்துகின்றன.

ஒப்படைகள்

- வகுப்பில் கொடுக்கும் வேலை (ஆசிரியரின் மேற்பார்வையில் செய்யப்படும் வேலை)
- வீட்டு வேலை (மேற்பார்வையின்றிச் செய்யும் வேலை)

ஒப்படைகள் பொதுவாகக் கீழ்க்கண்ட செயல்முறைகளில் கொடுக்கப்படலாம்.

1. சிந்தனைக் கணக்குகள்,
2. வடிவியலில் அமைப்புகள் (Constructions),
3. வரைபடம் வரைதல்,
4. வகுப்பில் செய்யும் வேலைகள் (Practical activities),
5. வகுப்பிற்கு வெளியே செய்யும் வேலைகள்.

ஒப்படைகள் (வகுப்பில் கொடுப்பது) தருவதன் அடிப்படை நோக்கங்கள்:

1. குறிப்பிட்ட ஒரு பாடத்தைப் படிப்பதன் நோக்கத்தை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள ஆசிரியர் உதவ வேண்டும். இதற்கு ஒப்படைகள் எவ்விதம் உதவுகின்றன என்பதை ஆசிரியர் அறிந்திருக்க வேண்டும்.

2. ஒப்படைகள் மாணவரின் திறமைக்கு அறைகூவலாகவும், கருத்துள்ளவைகளாகவும் அமையவேண்டும்.

3. பாகுபடுத்தப்பட்ட (differentiated) ஒப்படைகள் மாணவர்களுக்குக் கொடுக்கப்படலாம்.

4. ஆசிரியர் ஒரு வழிகாட்டியாக இருந்து, திறமையுள்ள மாணவர்களை உற்சாகப்படுத்தவேண்டும்; பின்தங்கிய மாணவர்களுக்கு உதவியாக இருக்கவேண்டும்; ஒப்படைகள் கொடுத்த

பின் வகுப்பறையில் சுற்றிவந்து மேற்பார்வையிடவேண்டும்; ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் தனிக் கவனம் செலுத்தவேண்டும்; கொடுக்கப்பட்ட செயல்முறைகளின் திட்டவட்டமான குறிக்கோளைத் தெளிவாக எடுத்துக்காட்டவேண்டும்; ஒப்படைகள் தயாரிக்கும்பொழுது அவை மாணவர்களின் உற்சாகத்தைத் தூண்டுவனவாகவும், சிறந்த அனுபவங்களைக் கொடுக்கக்கூடியதாகவும் இருக்குமாறு பார்த்துக்கொள்ளவேண்டும்.

வீட்டு வேலைக்கான ஒப்படைகள்

மாணவர்கள் பள்ளிக்கு வெளியே செய்யும் பாட சம்பந்தமான வேலைகளை, வீட்டு வேலைகள் எனலாம். பொதுவாகப் பாடத்தின் வளர்ச்சியைப் பொறுத்தே வீட்டு வேலைகள் கொடுக்க வேண்டும். வகுப்பறையில் கற்ற பாடங்களை மீட்டாய்வு செய்வதே இதன் நோக்கமாகும். மறுநாளில் நடக்கப் போகும் பாடங்களுக்கு இவை அடிப்படையாக அமையும்படியும் கொடுக்கலாம்.

நிறைகள்

1. மாணவர்களின் பெற்றோர்களைப் பள்ளியுடன் தொடர்பு கொள்ளச் செய்கிறது.

2. மாணவர்கள் தாங்களாகவே படிக்கக் கற்றுக்கொள்கின்றனர். இது மாணவர்களிடத்தில் பொறுப்புணர்ச்சியை வளர்க்கிறது.

3. பொதுவாகப் பாடப்பகுதிகள் அதிகமாக இருப்பதால், சிந்தனைக் கணக்குகள் எல்லாவற்றையும் ஆசிரியர் வகுப்பிலேயே செய்வது என்பது முடியாத காரியம்.

4. மாணவர்கள் ஒழுங்காக வேலை செய்வதற்கான பழக்கத்தை வளர்க்கிறது. இது மாணவர்களிடம் வளரவேண்டிய ஒரு நல்ல பழக்கம்.

5. ஆசிரியரின் நேர்பார்வையில்லாமல், மாணவர்கள் தாங்களாகவே செய்வதால், அன்றன்று கற்ற பாடத்தில் எந்த வழிமுறைகள், கோட்பாடுகள் நன்றாகப் புரிந்திருக்கின்றன; எதில் சந்தேகம் இருக்கிறது என்று கண்டுகொள்வார்கள்.

6. வீட்டில் இருக்கும்போது நேரத்தை வீணாகப்போக்காமல் தங்கள் நன்மைக்காகப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறைபாடுகள்

(1) அதிகப் படியான வீட்டுவேலைகள் மாணவர்களிடத்தில் ஒருவித வெறுப்புணர்ச்சியைத் தோற்றுவிக்கக்கூடும்,

(2) அநேக மாணவர்கள் வீட்டு வேலையைத் தங்கள் பெற்றோர்களின் மூலமாகவோ அல்லது பிறரின் மூலமாகவோ அல்லது நன்ருகப் படிக்கும் மாணவனின் குறிப்பேட்டைப் (Note-book) பார்த்தோ செய்கின்றனர்.

வீட்டுவேலையை எங்ஙனம் பயனுடையதாகச் செய்யமுடியும்

(1) வீட்டு வேலை, தேவைக்கு அதிகமானதாகக் கொடுக்கக் கூடாது. ஆரம்பப் பள்ளி மாணவர்களுக்கு வீட்டு வேலை கொடுக்கக்கூடாது. அவர்கள் பள்ளியில் நான்கு மணி நேரம் வேலைகளை ஒழுங்காகச் செய்யும்படி பார்த்துக்கொண்டாலே போதுமானது. நடுநிலைப்பள்ளி மாணவர்களுக்குத் தினசரி மூன்று கணக்குகளும், உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களுக்கு ஐந்து கணக்குகளும் கொடுக்கலாம்.

2. வீட்டுவேலைகள் திருத்தப்படவேண்டும்; இல்லாவிடில் மாணவர்கள் வீட்டுவேலைகளைப் புறக்கணிக்க நேரிடும்.

3. வகுப்பிலுள்ள பின்தங்கிய மாணவர்களும்கூட நன்ருகப் புரிந்துகொள்ளும் முறையில் பாடம் விரிவாக நடத்தப்படும் வரையில், இப்பாடங்களில் வீட்டு வேலைகள் கொடுப்பது விரும்பத்தக்கதன்று.

4. வீட்டு வேலைகள் மிகவும் கடினமானவைகளாக இருக்கக் கூடாது. மாணவர்கள் தாங்களாகச் செய்யக்கூடிய கணக்குகளையே வீட்டு வேலையாகக் கொடுக்க வேண்டும்.

வகுப்பிலும், வீட்டிலும் செய்யப்பட்ட பயிற்சிகளைத் திருத்துதல்

சிறந்த கல்விக்கு எழுத்துவேலை இன்றியமையாததாகும். மாணவர்கள் ஒழுங்காக எழுதுகிருர்களா என்றும் எழுத்து வேலைகளைக் கவனமாகத் தகுந்த குறிப்பேடுகளில் எழுதுகிருர்களா என்றும் ஆசிரியர் கவனிக்க வேண்டும். முக்கியமாக, எழுத்துப் பயிற்சிகளை ஆசிரியர்கள் கவனமாகவும், முறையாகவும் திருத்துவது மிகவும் முக்கியம். ஒழுங்காகத் திருத்தப்பட்ட எழுத்து வேலையின் உதவியால் மாணவர்கள் தங்களுடைய தேர்ச்சியைப் பற்றி அறிந்துகொள்ள முடியும். முடிந்தவரையில் தவறுகளை மாணவர்களிடம் நேர்முகமாகவே சுட்டிக்காட்டி அவ்வப்போது திருத்தும்படி செய்யவேண்டும்.

மாணவர்களின் தனிப்பிழைகளை அந்தந்த மாணவருக்கும், பொதுப் பிழைகளைப்பற்றி வகுப்பு முழுவதற்கும் எடுத்துக் கூறித் திருத்த வேண்டும். முக்கியமாக, வலுவற்ற கருத்துகள் (weak

points), தவமுன செயல் முறைகள், தவமுன கணிப்பு முறைகள், சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதிலும் தெரிந்த கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவதிலும் திறமையின்மை முதலிய குறைகளை ஆசிரியர் கவனிக்க வேண்டும். ஒழுங்காகவும், தெளிவாகவும் எழுதும்படி வலியுறுத்த வேண்டும். குறிப்பாக, எண்கணித முறைகளிலும் வடிவியல் அமைப்புமுறைகளிலும் இவை இன்றியமையாதனவாகும்.

வடிவியல் அமைப்புகளைத் திருத்துதல்

ஒளி ஊடுருவக்கூடிய (transparent) காகிதத்தில், கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்குத் தகுந்தாற்போல் உருவங்களை வரைந்து, மாணவர்கள் வரைந்த படத்தின்மீது படியவைத்துச் சரிபார்க்க வேண்டும். இதனால் திட்பமில்லாத அளவுகளை எளிதில் கண்டு கொள்ளலாம்.

6. கற்பித்தல் சாதனங்கள்

காட்சித் துணைக்கருவிகள்

(Objective Aids)

அடிப்படைக் கருத்துகளையும், புதிய கருத்துகளையும் மாண வரின் புலனீடான அனுபவத்தைக்கொண்டும், தசை உணர்வு அனுபவ அறிவைக்கொண்டும் வளர்க்கவேண்டு மென்பதை ஆசிரியர் உணரவேண்டும். மேலும், கற்பிக்கும் நோக்கத்தின் தரம் மாணவர்களின் வயதையன்றி, அவர்கள் பட்டறிவின் திறனையே பொறுத்திருக்க வேண்டும். கணிதத்தில் உருவமற்ற தத்துவங்கள், கருத்துகள் செறிந்துள்ளன. ஆகவே, அவற்றைச் சரியான முறையில் புரிந்துகொள்வது மிகக் கடினமாகப்படுகிறது. கணிதக் கோட்பாடுகள் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படும் புல னீடான எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலமாக இக் குறையை ஓரளவு போக்கலாம். இதனால் ஆர்வமும், உளநிறைவும், ஓரளவுக்கு உண்மையை உணரும் நிலையும் ஏற்படும். ஆகவே, கணித ஆசிரியரும் அன்றாட வாழ்வில் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தும் செயல்முறைகளைச் சிந்தித்து உணர்ந்து அவற்றிலுள்ள கணிதக் கருத்துகளையும் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக, சில சமயங்களில் கருத்தியலான முற்றொருமையை வடிவியல் படத்தால் விளக்கலாம்.

படிப்பதனால் மட்டுமே கற்றல் நிகழவேண்டும் என்று எண்ணும் ஆசிரியர்கள், மாணவர்கள் அனுபவ அறிவைக் கொண்டும் பொதுமைக் கருத்துகளைப் பெறமுடியும் என்பதை மறந்துவிடுகிறார்கள். ஒலி, ஒளிக் கருவிகள் உண்மையான பொதுமைக் கருத்துகளைப் பெற உதவுகின்றன.

படிப்பதனாலும், விவாதிப்பதனாலும் ஏற்படும் விளைவைவிட மேலான பலனைத் துணைக் கருவிகள் விளைவிக்கின்றன. நேரடியான அனுபவங்கள் என்பவை பொதுவாகப் புலன் நுகர்வுகளே ஆகும். திருத்தமான, தெளிவான கற்பனையோடு கற்கும்போதுதான்

கருத்துகளும், குறியீடுகளும் பொருளுள்ளவையாகின்றன. எனவே, கற்பித்தலில் காட்சிக் கருவிகளின் இடத்தையும், தேவையையும்பற்றி ஆசிரியர் உணர வேண்டும். முதலாவதாகக் காட்சி, செவி உணர்வு, சுவை, தொடு உணர்வு, உடல் உறுப்புகளின் இயக்கங்கள் ஆகியவற்றால் பெறப்படும் புலன் நுகர்வு அனுபவங்களை முடிந்தவரை ஏற்படுத்திக் கொடுக்கவேண்டும். காட்சியால் ஏற்படக் கூடிய கற்பனையே நம்பகமானது. அத்தகைய கல்வி முறைக்குப் போதுமான உருவப் பொருள்களைத் தோற்றுவிக்கப் படங்கள், கருத்து வரைபடங்கள், விளக்க வரைபடங்கள், நழுவங்கள் (slides), மாதிரி உருவங்கள், திரைப் படங்கள், படச்சுருள்கள் போன்ற காட்சிக் கருவிகளிலிருந்து ஆசிரியர் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். புலனீடான காட்சிப் பொருள்கள் கருத்தியல் தொடர்புகளைக் காண்பதற்கும், சிந்திப்பதற்கும் பேருதவிபுரிகின்றன. மேலும், தானே கையாளுதல், பயன்படுத்துதல் அல்லது ஒரு வேலையைச் செய்தல் போன்ற பிற அனுபவங்களையும் நேரடி அனுபவங்கள் எனலாம். மேலே குறிப்பிட்ட அனுபவங்களின் வாயிலாக மாணவர்கள் பொருள் காணும் விதத்தைப் பொறுத்தே அடிப்படைக் கருத்துகளை அவர்கள் புரிந்துகொள்ளும் திறன் அமைந்துள்ளது. ஆகவே, தேவையான பகுதிகளுக்கெல்லாம் வகுப்பறையில் துணைக் கருவிகள் வைப்பது அவசியம்.

மேலும், துணைக்கருவிகள் வகுப்பின் ஆரம்பத்தில் புதிய பாடங்களை ஆரம்பிக்கவும், மாணவர்களுக்குப் பாடம் கற்பதில் ஊக்கத்தை அளிக்கவும் உதவுகின்றன. இதனால் பாடநேரம் வீணாவது இல்லை. குறைந்த நேரத்திலேயே அதிகமான பாடப் பகுதிகளுக்கு விளக்கங்கள் தரமுடியும். மாணவர்களுடைய ஆர்வமும், உற்றுநோக்கும் திறனும் வளர்ச்சி அடைகின்றன.

ஒலி-ஒளிக் கருவிகளின் பயன் முறைகள் : இக் கருவிகளை ஆசிரியர் கவனமாக ஆய்ந்து அறிந்து எப்போது பயன்படுத்தலாம் என்றும், அவற்றின் எல்லை, வரையறை, குறைபாடுகள் என்ன என்றும் மனத்திற்கொண்டு பயன்படுத்தவேண்டும். இக் கருவிகள் எல்லாம் கற்பிக்கும் குறிக்கோள்களுக்கு வழிகாட்டிகளாக அமைகின்றன.

புலனால் அறியக்கூடிய கருவிகள்

வகைகள்	விவரங்கள்
1. காட்சிக் குறிகள் (Visual symbols)	விளக்கப்படங்கள், வரைபடங்கள், கருத்து வரைபடங்கள், செய்தித் துணுக்குகள்.
2. அசையாப் படங்கள் (Still pictures)	எடுத்துக்காட்டுகள், கண்ணாடி வில்லைகள், திரைப்படத் துண்டுகள்.
3. காட்சிப் பொருள்கள்	காட்சிச்சாலையில் வைக்கும் பொருள்கள், தொழில் சம்பந்தமான காட்சிப் பொருள்கள், மாதிரிகள்.
4. பாவனை அனுபவங்கள் (Simulative experiences)	மாதிரி உருவங்கள்
5. இயங்கும் படங்கள்	ஒலியற்ற, ஒலியுள்ள கல்வித் திரைப்படங்கள்.
6. செய்துகாட்டி விளக்குதல் (Demonstration)	வகுப்பறையில், சோதனைச் சாலையில், வகுப்பறைக்கு வெளியே செய்து காட்டல், [உதாரணம்: கிளினோ மீட்டர், கிராஸ்-ஸ்டாப் (cross-staff) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறையைச் செய்முறையில் விளக்குதல்.]
7. சிறுதொலைவுப் பயணங்கள் (Filed trips)	தொழில்கள், வேளாண்மை, வியாபார நிறுவனங்கள், வங்கிகள், காப்புறுதி அலுவலகங்கள், புள்ளியியல் அலுவலகம், சரக்கு, பங்கு மாற்றும் இடம் முதலியவற்றிற்குச் செல்லுதல்.
8. நேரடியான பயனுள்ள சுற்றுப்புறத் தொடர்பு	பொருள்கள், மக்கள், பிரச்சினைகள், சூழ்நிலைகள், செயல்கள் போன்றவை.

கருத்து வரைபடங்கள் (Charts): இவற்றைத் தயாரிப்பதோடு மட்டுமன்றிப் பொருத்தமான இடங்களில் பயன்படுத்துவதும் சிறப்புடையதாகும். கரும்பலகையில் வரைந்துகாட்ட இயலாதவற்றையும், மிகப் பெரிய படங்களையும், சிக்கலானவற்றையும், நீண்ட நேரம் தேவைப்படக் கூடியவற்றையும் முன்கூட்டியே வரைந்து வைக்கலாம்.

வெட்டியெடுத்த உருவங்கள் (Cut-outs): விளக்கப்படங்கள், கருத்து வரைபடங்களைவிட வெட்டியெடுத்த உருவங்களைக் கொண்டு விளக்கலாம். வெட்டியெடுத்த உருவங்கள் மாணவருடைய கவனத்தைக் கவருவதுடன் அல்லாமல் கருத்துகள் நன்ருக மனத்தில் பதியும். உதாரணம்: பிதாகரஸ் தேற்றத்தை 'பெரிகாலின் கூறுகளை'க் (Perigal's dissection) கரும்பலகையில் வரைய அதிக நேரம் செலவிட வேண்டியிருக்கும்.

திரைப்படத் துண்டுகள் (Film-strips): பாட வளர்ச்சியினை இவற்றின் உதவியால் நல்ல முறையில் கொண்டுசெல்ல முடியும். உதாரணமாகக் 'காலமும் தூரமும்' என்ற தலைப்பில் பாட வளர்ச்சிக்கு இப் படங்கள் மிகவும் பயன்படுகின்றன. படிப்படியாகத் திரைப்படத் துண்டுகளைக் காட்டி இருவர் எதிர்த் திசையில் அல்லது ஒரே திசையில் ஒருவரை ஒருவர் நெருங்கும்போதோ அல்லது விலகும்போதோ 'சார்பு வேகம்' என்ன என்று மாணவர்களுக்கு விளக்குதல் இம் முறையில் எளிதாக இருக்கும்.

குறைபாடுகள் : காட்சிக் கருவிகளைப் பயன்படுத்துவதனுல் படிப்பில் முன்னேற்றம் ஏற்படும் என்பதற்கு உத்தரவாதம் இல்லை. மேலும், பயிலும்போது எல்லாவிதமான காட்சிக் கருவிகளும் ஒரே மாதிரியான பயனை ஏற்படுத்துவதும் இல்லை. காட்சிப் பொருள்களின் முக்கியத்துவமானது பெரும்பாலும் அவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறைகளைச் சார்ந்தே உள்ளது. ஆயினும்,

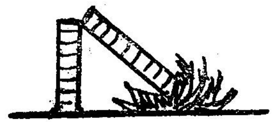
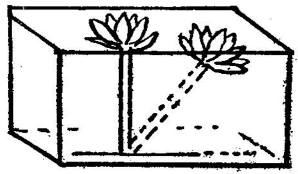
1. காட்சிப் பொருள்கள் சிந்தனையில் பதிலீடாகாது;

2. காட்சிப் பொருள்கள், கவனத்தோடு பாடத்திட்டமிடுதலுக்கு ஈடாகாது.

சில தலைப்புகளுக்குப் பயன்படுத்தப்படக் கூடிய காட்சிக் கருவிகள்

வகுப்பு XI:

பாடப்பகுதி	கருவிகள்	செயல்கள்
குறித்தகால வைப்பும், தொடர் வைப்பும்	குறித்தகால வைப்புச் சீட்டு, தொடர் வைப்புப் புத்தகம், வட்டி வீதங்கள்.	1. வங்கிக்குச் செல்லுதல், 2. மாதிரி வங்கியைப் பள்ளியில் நடத்துதல்.
பங்குகளும், சரக்கு முதல்களும்	பங்குப் பத்திரங்கள் (அரசாங்கத் துறை அல்லது தனியார் துறை); பங்கினுடைய விலை, பங்குகள் பெறுவதற்கான விதிகள்.	1. சரக்கும், பங்கும் வாங்கும், விற்கும் நிறுவனங்களுக்குச் (Stock exchange) செல்லுதல், 2. கூட்டுறவு நிலையம் நிறுவுதல், 3. வானொலியில் பங்குகள், சரக்கு முதல்கள் தொடர்பான அறிக்கைகளைக் கேட்டல்.
பிதாகரஸ் தேற்றம்	சமதூரங்களில் போடப்பட்ட 12 முடிச்சுகள் உள்ள கயிறு.	விளையாட்டு மைதானம் அமைத்தல் (மூலைகளைச் செங்கோணங்களாக உருவாக்குதல்).

	மாதிரிகள் 1.  படம் 14 2.  சிறு கண்ணாடித் தொட்டி படம் 15	
வட்டங்கள்	வட்ட வளையம் (Annular ring) வட்டக் கோணப் பகுதிகள்.	1. வட்ட வளையத் தோட்டம் அமைத்தல், 2. உள் வட்டத்தைக் கோணப் பகுதி களாகப் பிரித்துப் பயிரிடுதல்.
பட்டகங்கள்	பட்டகங்களின் மாதிரிகள்	அட்டையில் மாதிரிப் பட்டகங்கள் செய்தல், விரித்துக்காட்டிப் பட்ட கத்தின் பக்கப் பரப்பளவுக்குச் சூத்திரம் கண்டுபிடித்தல்.

பாடப்பகுதி	கருவிகள்	செயல்கள்
உருளை	உருளையின் மாதிரி	அட்டையில் செய்து பக்கப் பரப்பளவைக் கண்டுபிடித்தல்.
கூம்பு	கூம்பின் மாதிரி—கூம்பும், உருளையும் ஒரே ஆரமும் உயரமும் உள்ளனவாக எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் கன அளவுகளை ஒப்பிடுதல்.	அட்டையில் செய்து பக்கப் பரப்பைக் கண்டுபிடித்தல்.
கோளம்	உருளையும், கோளமும். இரண்டு உருளைகளின் நிறையையும் மூன்று கோளங்களின் நிறையையும் ஒப்பிட்டுக் கன அளவுக்குச் சூத்திரம் கண்டுபிடித்தல்.	
உயரங்களும், தொலைவுகளும்	1. கிளினோ மீட்டர் 2. ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் விளக்க மாதிரிகள்.	பள்ளிக் கட்டடத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடித்தல்.

வகுப்பு X

பாடப்பகுதி	கருவிகள்	செயல்கள்
தொடர் வட்டி	பல்வேறு வங்கிகளின் வட்டியைப்பற்றிய செய்தித்தாள் விளம்பரங்கள்.	வங்கிகளுக்குச் செல்லுதல்.
காப்புறுதி	காப்புறுதிப் பத்திரம், கட்டணத் தொகை.	காப்புறுதி அலுவலகங்களுக்குச் செல்லுதல்.
வரிகள்	வருமானவரி விதிகள், தொழில் வரி, கேளிக்கை வரி, மறைமுக வரிகள், நாட்டின் வரவுசெலவுத் திட்டம்.	1. வரிகொடுப்போரிடமிருந்து செய்திகளைச் சேகரித்தல். 2. வரி கொடுக்காமல் தட்டிக்கழிப்பவர்களைப்பற்றி அலுவலகத்தில் கேட்டு அறிதல்.
பிதாகரஸ் தேற்றம்	பெரிகாலின் கூருக்குதல்; 3 : 4 : 5; 8 : 15 : 17; 9 : 40 : 41; 20 : 21 : 29 என்ற விகிதங்களில் பக்கங்கள் அமையுமாறு வரைபடக் காகிதத்தில் வெட்டிப்பார்த்தல்.	
விலைப் பட்டியல்	எல்லாவித விலைப் பட்டியல்களையும் சேகரித்தல்.	விலைப்பட்டியல் தயாரிக்கக் கற்றுக் கொள்ளுதல்.
கன அளவுகள்	ஓரலகு கனச்சதுரக் கட்டைகள், கனச்சதுரம், கனச்செவ்வகம்.	கனச் சென்டிமீட்டருக்கும், லிட்டருக்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டு பிடித்தல்.

கரும்பலகையின் பயன்கள்

கணிதம் கற்பித்தலுக்குச் சிறந்த கருவி கரும்பலகை. கரும் பலகைக் குறிப்பு, ஒரு தனிப்பட்ட முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. ஆசிரியரின் தொகுத்து எழுதும் முறை, படிப்பதற்கும், புரிந்து கொள்வதற்கும் எளிதாகவும், பிறர் குறைகாண இயலாதவாறும் இருக்கவேண்டும். தமது மாணவர்கள் எவற்றைச் செய்யக் கூடாது என நினைக்கின்றனரோ அவற்றை ஆசிரியர் தாமும் கரும்பலகையில் செய்யும் வழக்கத்தைத் தவிர்த்தல் வேண்டும். உதாரணமாக, வழிமுறைகளைச் சிறுசிறு துண்டுத் தாள்களில் மாணவர்கள் செய்யக்கூடாது என்று நினைக்கும் ஆசிரியர், கரும் பலகையில் கண்ட கண்ட மூலைகளில் எழுதுவதைத் தவிர்க்கவேண் டும். தாமும் புரிந்துகொண்டு பிறருக்கும் புரியவைக்கும் வகையில் எழுதுகிற:சுருக்குமுறைகளையும் குறிகளையும் அடிக்கடி உபயோகிக்க லாம். ஆசிரியர் கரும்பலகையைப் பயன்படுத்தும் விதத்தைப் பொறுத்தே மாணவர்கள் அவரைப் பின்பற்றுவர். ஒரு கணக்கைக் கரும்பலகையிற் செய்யும்போது செய்முறையின் ஒவ்வொரு படி யும் தெளிவாகத் தனித்தனி வரிகளில் இருத்தல் நன்று. எனவே, கணித வகுப்பில் பெரிய கரும்பலகை தேவை. ஒரு கணக்கின் எல்லாப் படிகளையும் ஒரே சமயத்தில் பார்க்கும்படியாக இருத்தல் நல்லது.

கரும்பலகையின் ஒரு பகுதி சிறுசிறு கட்டங்களாகப் பிரிக்கப் பட்டிருத்தல், வரைபடக் கணக்குகளுக்குப் பயனுள்ளதாக இருக் கும். வரைபடத்தின்மூலம் விடைகளைப் பெறவேண்டுமானல் தோராயமாக வரைந்த வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தாது, தெளி வான அளவுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியது அவசியமாகும். குறிப்பாக வடிவியலிலும், வரைபடங்களிலும் ஆசிரியர் வண்ணச் சாக்குக் கட்டிகளை உபயோகிப்பது பயனுள்ளதாக இருக்கும். (மாணவர் வண்ணப் பென்சில்களைப் பயன்படுத்துவர்.)

கீழே கொடுக்கப்பட்ட உதாரணங்களைக் கவனிக்க

1. வடிவியலில் குறிப்பிட வேண்டிய முக்கியப் பகுதிகளை வண்ணச் சாக்குக்கட்டிகளால் வரையலாம். சம கோணங்களை ஒரே வண்ண வில் வளைவுகளால் குறிப்பிடலாம்.

2. $y = 4 - 3x - 2x^2$ என்ற கோவையில் வரைபடத்தில் '+' பகுதிகளை ஒருவண்ணத்திலும், '−' பகுதிகளை வேறு வண்ணத் திலும் குறிப்பிடலாம்.

3. கன வடிவியலில் நான்முகத் திண்மம், கனச் சதுரம், கன உருவங்களின் புறவரிகளை வெள்ளை நிறத்திலும், மறைந்த பக்கங்

களின் கோடுகளைப் பல வண்ணங்களிலும் குறிப்பிடலாம். சாதாரணமாக ஆசிரியர் கரும்பலகைக் கருவிகளின்றி வரைவதில் கைதேர்ந்திருத்தல் வேண்டும்.

ஆனால், கரும்பலகைக் கருவிகளைப் பயன்படுத்தி வரைய வேண்டிய சந்தர்ப்பங்களும் உண்டு. வடிவியற் கருவிகள் எப்படி உபயோகிக்கப்படுகின்றன என்பதை விளக்கக் கீழ்வகுப்புகளில் இவை தேவை. புத்தகங்களில் கொடுக்கப்படும் விரிவுரைகளைவிட இது மிகவும் நல்லது.

மாணவர்களைக்கொண்டு கரும்பலகையில் வரையச் செய்தல் பொதுவாக நல்லதன்று. கரும்பலகையில் எழுதும் திறனும், வரையும் திறனும் குறிப்பேட்டில் எழுதுவதைவிடத் தரம் குறைவாக இருக்கும். மேலும், இது மற்ற மாணவர்களுக்கு விரும்பத்தகாத ஓர் எடுத்துக்காட்டாக அமையலாம். கரும்பலகைப் பயன்பற்றிய நுணுக்கங்கள், ஆசிரியராகப் பணிசெய்ய விழையும் மாணவர்க்கு மட்டிலுமே பயன்தரும். இவ்வித விருப்பம் உள்ள மாணவர்கள் வகுப்பில் மிகச் சிலரே இருப்பார்கள்.

பாடப் புத்தகம்

அறிவு பெறுவதற்குப் பாடப் புத்தகங்களின் அவசியம்

மாணவர் பல்வேறு வழிகளில் அறிவைப் பெறுகின்றனர். அதில் பெரும்பாலும் ஆசிரியருடைய விரிவுரைகளையும், பேச்சுகளையும் கேட்பதனால் கிடைப்பதாகும். விவரங்களை ஆசிரியர் அளிக்கும் திறமையையும், மாணவரின் ஈர்க்கும் திறனையும், வாதங்களைப் புரிந்துகொள்ளும் திறனையும், உரையாடலிலும் தருக்க வாதங்களிலும் ஆர்வத்தோடு கலந்துகொள்ளுவதையும் பொறுத்து, நினைவில் வைத்துக்கொள்ளும் செய்திகளின் அளவு அமைந்துள்ளது. கருத்து உரையாடல்களைக் கேட்கும் பழக்கமும், அவற்றில் பங்குகொள்ளும் பழக்கமும் பள்ளியில் அளிக்கப்பட வேண்டும். ஏனெனில், பிற்கால வாழ்வில் பெரும்பாலான செய்திகள் இந்த வழியிலேயே பரப்பப்படுகின்றன.

மாணவர், தாமே வேலைசெய்து அனுபவம் பெறச் செய்யும் முயற்சிகள் மூலமாகச் சோதனை முறையும், மேற்பார்வைப் படிப்பு முறையும் தோன்றின. அளத்தல், எண்ணுதல், ஒப்பிடுதல், தோராய மதிப்பிடல், பொதுமைக் கருத்தைக் காணல் போன்ற கணிதச் செயல் முறைகளைத் தானே செய்வதன்மூலம் சில கணித உண்மைகளை மாணவன் கண்டுபிடிக்கிறான். நூல்களைப் படிப்பதன் மூலமாக அறிவைப் பெறுவது மற்றொரு முறையாகும். புத்தகங்

களைப் படித்து அறிவைப்பெறும் வழியை மாணவர்க்குக் கற்பிக்க வேண்டும். ஏனெனில், இந்த முறையை மாணவர்கள் பள்ளிப் படிப்பில் பயன்படுத்துவதோடன்றித் தங்களுடைய பிற்கால வாழ் விலும் பின்பற்றுவார்கள். புத்தகத்தில் கொடுக்கப்பட்ட பொருளை அறிந்து, புரிந்துகொள்ளக் கூடிய திறனை அவர்கள் பெற வேண் டும். பாடப்புத்தகம் மாணவர்களுக்கு வகுப்பில் கற்பித்த பாடப் பொருளைப் பெரிதும் பாதிக்கின்றது. புத்தகங்களுக்கும், ஆசிரியர் களுக்கும் வேற்றுமையில்லாத அளவுக்கு அநேக ஆசிரியர்கள் புத்தகங்களை முழுவதுமாகப் பின்பற்றுகிறார்கள். புத்தகத்தை ஓர் எல்லைக்கு மேல் சார்ந்துநின்றால் பாடம் கற்பித்தல் நிறைவு பெறாது.

பாடப்புத்தகம் ஒரு திறமையுள்ள ஆசிரியருக்கு மாற்றீடாக முடியாது. ஆனால், அதே புத்தகம் நல்ல ஆசிரியர் ஒருவரிடம் சக்தி வாய்ந்த கற்பிக்கும் கருவியாகிறது. ஆசிரியர் கற்பிக்க வேண்டிய பொருளை ஒழுங்குற அமைத்து, ஆர்வமூட்டும் விவாதப் பொருள் களைத் தேர்ந்தெடுத்து, மாணவர்களின் கவனத்தைக் கவரும் வகையில் இவற்றை அளித்தல் வேண்டும்.

மாணவர்க்கும் பாடப்புத்தகம் ஒரு பயனுள்ள கருவியாகும். புத்தகம் இல்லாமல் இருந்தால் ஆசிரியரின் வாய்மொழிப் போதனையை மட்டுமே கேட்க வேண்டியதாக இருக்கும். பாடப் புத்தகம் ஆசிரியர் தொடர்ந்து நடத்தும் பாடத்தை எளிதாகப் புரிந்துகொள்ள மாணவனுக்கு உதவுகிறது. முக்கியமாக, மெது வாகப் புரிந்துகொள்ளும் மாணவர்களும், ஒழுங்காக வகுப்புக்கு வராதவர்களும் பாடப்புத்தகத்தின் உதவியைப் பெறுவதோடு, அவர்கள் வேலையை முடிக்கத் தேவையான விவரங்களையும் பெறு கிறார்கள்.

பாடத்திட்டத்தின் கண்ணோட்டத்தில் பார்க்கும்போது, தற் காலத்தியக் கல்விப் போக்கு, புதுமையான கருத்துகள், கல்வியின் தரம் ஆகியவற்றைப்பற்றி அறிந்துகொள்ள நல்ல புத்தகங்கள் ஆசிரியருக்குப் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. இருபது அல்லது முப்பது ஆண்டுகளுக்கு முன்வந்த பாடப்புத்தகங்களையும், அண் மையில் வெளிவந்த பாடப்புத்தகங்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் கணிதம் கற்பித்தலில் உள்ள முன்னேற்றத்தையும், வளர்ச்சியை யும் நன்கு அறியலாம்.

புதிய கருத்துகளின் முன்னேற்றத்திற்கும், வளர்ச்சிக்கும் பாடப்புத்தகங்கள் உறுதுணையாயிருக்கின்றன. புதிய ஆசிரி யருக்குப் பாடப்புத்தகம், பாடப்பகுதிகளின் அமைப்பைப்பற்றி

அறிவிக்கின்றது. மேலும், ஆசிரியர் மனத்தில் வைத்துக்கொள்ள இயலாத பலதரப்பட்ட மாதிரிகளையும், புதிர்க் கணக்குகளையும் தருகின்றது. எனவே, நல்லதொரு பாடப்புத்தகம் ஆசிரியரின் நேரம் வீணுவதைத் தவிர்க்கும். மேலும், ஆசிரியர் கணக்குகளை வகுப்பில் சொல்லி, மாணவர்கள் அவற்றை எழுதிக்கொள்வதில் மாணவர்களின் நேரம் வீணுவதையும் தடுக்கலாம். திறமையுள்ள மாணவர்கள் அதிகக் கணக்குகள் வீட்டில் செய்யவும் பாடப் புத்தகம் பேருதவிபுரிகின்றது.

பாடப் பொருள்களின் ஒழுங்கமைப்பு

பாட அமைப்பு, பயிற்சி முறைக்குத் தெளிவையும் முழுமையையும் அளிக்க வேண்டும். ஒவ்வோர் அத்தியாயமும் மொத்தப் பயிற்சி முறையோடு தொடர்புடையதாக இருக்கவேண்டும். அவ்வாறே ஒவ்வோர் அத்தியாயத்திலும் அமைந்துள்ள கருத்துகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புள்ளதாக இருக்கவேண்டும். பாடச் செய்திகள், முக்கியக் கோட்பாடுகள் முதலியவற்றை மாணவர்கள் எளிதில் புரிந்துகொள்ளும்படியாகவும், நினைவில் வைத்துக் கொள்ளும் வகையிலேயும், அத்தியாயங்கள் அவற்றின் அடிப்படையில் அமைக்கப்படல் வேண்டும். பாடப்புத்தகம், ஆசிரியருக்கு ஏற்றவாறும் அமைக்கப்படல் வேண்டும். பாடப்பொருள் 'உளவியலை' அடிப்படையாகக்கொண்டு அமைக்கப்படல் வேண்டும். அதாவது, எளிய கருத்துகள் முதலில் கற்றுத்தரப்படல் வேண்டும். கருத்தியலான உண்மைகள் புலனீடான எடுத்துக்காட்டுகளினுல் விளக்கப்படல் வேண்டும். கற்றுக்கொண்ட ஆற்றல்கள், செயல் முறையிலேயே தொடர்ந்து பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும். ஆகவே, பயிற்சிகள், கணிப்புகள், வடிவ அமைப்புகள் முதலியவை பயிற்சி முறையோடு முழுவதும் பரந்து கலந்திருக்கச் செய்வதோடு, நினைவில் இருத்திக்கொள்ளும் வகையில் திரும்பிப் பார்க்கவும், அதிகப்படியான பயிற்சி அளிக்கவும் ஏற்பாடு செய்யப்பட வேண்டும். வரைபட முறைகள், சமன்பாடுகள் விடுவித்தல், சூத்திரங்கள், சார்புகள், கணிதத்தின் முக்கியச் செயல்முறைகள், சிக்கல்கள் விடுவிக்கும் முறைகள் பயன்படுத்தப்படும் முக்கியமான கணிதக் கோட்பாடுகளைத் தொடர்ந்து செயற்படுதல் வேண்டும். இவை அத்தியாயங்களின்படி முடிவைடவதில்லை. இவற்றைக் குறிப்பிட்ட அத்தியாயங்களில் கூறுவதோடு விட்டுவிடாமல் நடைமுறையிலும் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். அவசியம் ஏற்படும் போது புதுமையான கருத்துகளையும், வரைமுறைகளையும் அறிமுகப்படுத்தவேண்டும். கணிதக் கோட்பாடுகள் பயன்படுத்தப் படும் பல்வேறு சூழ்நிலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட கணக்குகள் புத்தகத்தில் இடம் பெற்றிருத்தல் வேண்டும். ஒரே மாதிரி

யான (stereotyped) கணக்குகள் இடம்பெற்றிருத்தல் தவிர்க்கப் படவேண்டும்.

பாடப் புத்தகத்தில் கற்பிக்கும் முறைகளும், தருக்க வாதங்களும், கற்பிக்கப்படும் இயல்பும்

மாணவர்களின் ஆர்வத்தை வளர்க்கும் வகையிலும் செயற் படத் தூண்டும் விதத்திலும், பாடப்பொருளை எடுத்துக்கூற வேண்டும். ஆசிரியரின் உதவியின்றி மாணவர்களாகவே புரிந்து கொள்ளக் கூடிய வகையில், பாடங்களை எடுத்துக்கூறும் விதம் அமையவேண்டும். மாணவர்க்குரிய விளக்கப்படங்கள், புத்தகங்கள் முழுதும் காணப்பட வேண்டும்; வெவ்வேறு பாடப் பகுதிகளுக்கும் முன்னுரை அமையவேண்டும். இவை மாணவர்களைக் கவரும் வண்ணம் அமைதல் நல்லது. முன்னுரைப் பகுதியில் புதிய பாடத் துடன் தொடர்புடைய வாழ்க்கைச் சம்பவங்களைக் கூறி ஆரம் பிக்கலாம். (உதாரணமாக, தனிவட்டி, காலமும் தூரமும் ஆகியவைபற்றின கணிதக் கோட்பாடுகள்.) சில நேரங்களில் கணிதக் கோட்பாடுகளைக் கண்டறிந்த கணித மேதைகளின் வாழ்க்கைச் சம்பவங்களையும், கணித வரலாற்றினையும் கூறியும் ஆரம்பிக்கலாம். வாழ்க்கையுடன் தொடர்புடையதாக இருக்கும் போது மாணவர்கள் இயல்பாகவே ஆர்வம் காட்டுவர். மேலும், பாடப் பகுதியைப் படிப்படியாக அறிமுகம் செய்து வளர்ச்சியுறச் செய்தல் வேண்டும். கடினமான கணக்குகளை மாணவர்கள் செய்தற்கு வேண்டிய உதவிக் குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும். இயற்கணிதத்தில் எடுத்துக்காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள், தீர்வுகாணும் முறையையும், கணக்குகள் அமைக்கப்பட்ட விதத்தையும் காட்டவேண்டும். வடிவியல், தேற்றங்கள், பிரச்சினைகள் முதலியவற்றின் நிரூபணங்கள் எவ் வாறு அமையவேண்டும் என்பதற்கு மாதிரிகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

பாடப்புத்தகத்திலே தனியாள் வேற்றுமைகளுக்கும் தகுந்த ஏற்பாடு செய்யப்பட வேண்டும். எல்லாவிதமான மாணவர் களுக்கும் ஏற்றவாறு பயிற்சிக் கணக்குகளை அவற்றின் கடினத் தன்மையைப் பொறுத்துத் தரம்வாரியாகப் பிரித்துக் கொடுக்க வேண்டும்.

ஆர்வம் வளர்ச்சியுறுமாறு விளக்கப்படங்கள், வரலாற்றுச் சான்றுகள் முதலியவற்றின் மூலமாயும், தொழில் துறையில் கணிதம் பயன்படுத்தப்படும் கட்டடக்கலை, நில அளவை, கலை, வானியல், அறிவியல் ஆகியவற்றில் இருந்து உதாரணங்கள்

கூறியும், கணிதத்தை அறிந்துகொள்ள வழிசெய்யவேண்டும். இவற்ருல் கணிதம் கற்குமாறு மாணவர்கள் ஊக்குவிக்கப்படுவார்கள். மனனம் செய்தல், இயந்திரமாகத் செயலாற்றுதல் போன்றவற்றைக்காட்டிலும், புரிந்துகொள்ளுதலுக்கும் காரணம் காட்டுதலுக்கும் முக்கியத்துவம் அளிக்கவேண்டும். சரியான முறையில் சிந்திக்கப் பழகவும், முறையாகப் படிக்கும் பழக்கங்களை ஏற்படுத்திக்கொள்ளவும், தன்னம்பிக்கையுடன் கூரிய அறிவையும் பெறச் செய்யவேண்டும். ஒரு வகுப்புக்குரிய பாடப்புத்தகம் அவ் வகுப்பின் பாடத்திட்டம் முழுவதையும் உள்ளடக்கியதாக இருப்பதே சிறப்புடையது.

மாணவர்கள், முதியோர்கள் அனுபவங்களோடு பாடப்பொருளுடைய தொடர்பு

பாடப் புத்தகத்தின் பாடப்பொருளானது பள்ளிக்கு உள்ளேயும், வெளியேயும் மாணவர்களும், பெரியோர்களும் பெறும் வாழ்க்கை அனுபவங்களோடு தொடர்புகொண்டிருக்கக்கூடிய வகையிலே அமையவேண்டும்.

மாணவர்கள் பெறக்கூடிய நடைமுறைச் சமூக முக்கியத்துவங்கள்பால் அவர்கள் கவனம் திருப்பப்பட்டு, பாடம் பயிலுதல் ஊக்குவிக்கப்பட வேண்டும். புதிய பாடப்பகுதிகள் உண்மைப் பயன் முறைகளோடு (வாழ்க்கையின் அன்ருடப் பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கும் வகையில்) தொடங்கப்பட்டு மாணவர்கள் அவற்றைத் தீர்ப்பதற்கு ஆர்வம்கொள்ளுமாறு அமைத்தல் வேண்டும்.

முடிந்தவரை சூத்திரங்களும், வரைபடங்களும் மற்றப் பாடங்களில், முக்கியமாக அறிவியலில் அறிந்த கருத்துகளோடும், கோட்பாடுகளுடனும் தொடர்புடையதாக இருக்கவேண்டும்.

தொழில்துறையிலிருந்தும், மற்றப் புள்ளிவிவரத்துறைகளில் இருந்தும் தேர்ந்தெடுத்த வரைபடங்களும், சூத்திரங்களும், புதிர்க் கணக்குகளும், இத் துறைகளில் கணிதம் பயன்படுத்தப்படுவதை மாணவர் மனத்தில் பதியவைக்கும் வகையில் அமைதல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டுகள் மாணவர் கவனத்தைக் கவரும் வகையிலும், பாடத்தைப் புரியவைக்கும்படியாகவும், பாடப்பொருளை உண்மையானதாகக் காட்டும்வகையிலும், மாணவர்களின் பட்டறிவுக்கு உட்பட்டதாகவும் அமையவேண்டும். வடிவியலில்

கணித வடிவங்கள், கோட்பாடுகள் ஆகியவற்றின் பயன்களைக் காட்டக்கூடிய எடுத்துக்காட்டுகளைக் கையாளலாம். முப்பரிமாண உருவங்களைப்பற்றிய கற்பனுசக்தியை வளர்ப்பதாக உதாரணங்கள் கொடுக்கவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக மாதிரிகள், உருவங்கள், உயரம் காணவேண்டிய செங்குத்தான மலைப்பாறைகள், கணித முறைகளில் அகலம் காணவேண்டிய ஆறுகள் ஆகியவற்றினுடைய நிழற்பட மறுபதிப்புகள் போன்றவை புதிர்க் கணக்குகளின் தீர்வைக் காண்பதில் பெரிதும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகும்.

அறிமுறை அல்லது தருக்கமுறை வடிவியலில் படங்களெல்லாம், தேற்றங்களிலும் பயிற்சிக் கணக்குகளிலும் கூறப்பட்ட உண்மைகளைத் தெளிவும் திருத்தமுமாகக் காட்டும்படி வரையப்படவேண்டும்.

பயன்படுத்தும் சொற்களும், நடையும்

புதுச் சொற்களை, முக்கியமாகக் கலைச்சொற்களைப் பயன்படுத்துவதற்கு முன் அவற்றை நன்ருக விளக்கவேண்டும். மாணவர்கள் கவனத்தை ஈர்க்கும்வகையிலும், அதே சமயத்தில் தெளிவாகவும், தலைப்புகளைக் கவனத்துடன் தேர்ந்தெடுத்த சொற்களால் அமைக்கவேண்டும். மாணவர்களின் மொழி அறிவுக்கு அப்பாற்பட்டதாக இல்லாமல் எளிய நடையில் எல்லா மாணவர்களும் புரிந்துகொள்ளும் வண்ணம் அமைத்தல் வேண்டும்.

பாடப் புத்தகங்களைத் தவருன முறையில் கையாளுதல்

பாடப்புத்தகங்களை ஆசிரியர்கள் தவருன முறையில் கையாள வழியுண்டு. சிற்சில ஆசிரியர்கள் பாடப்புத்தகத்தைத் தவிர வேறு எந்த நூலையும் துணையாகக் கொள்வதில்லை. புதிய சூழ்நிலைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு கணக்குகள் உருவாக்க முயல்வதில்லை. சில சமயங்களில் பாடப்புத்தகங்களில் விரித்துத் தரப்பட்டுள்ள மாதிரிக் கணக்குகளை (worked examples) அவ்வாறே கரும் பலகையில் போட்டுக் காட்டுகின்றனர். கற்பித்த விதிகளை மாணவர்கள் எவ்வாறு பயன்படுத்துகின்றனர் என்று சோதித்துப் பார்க்கப் புதிய சூழ்நிலைக்குத் தகுந்த கணக்குகளை அமைக்க முயல்வதில்லை.

மாணவர்களும் பாடப்புத்தகங்களைத் தவருன முறையில் பயன்படுத்துவதை நாம் காண்கிருேம்; கணக்குகளைச் சரியான வழியினைப் பின்பற்றிச் செய்யாமல் இறுதிப் பக்கங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விடைகளைப் பார்த்து எழுதுவது, அல்லது,

அவற்றிற்கேற்ப எண்களை மாற்றுவது போன்ற தவறுகள் செய்வதை நாம் பார்த்திருக்கிறோம்.

முடிவாக, பாடப் புத்தகங்கள் பாடத்திட்டத்தை அடிப்படையாகக்கொண்டு அமைந்திருத்தல் அவசியம். ஆனால், பாடப் பொருளை வரிசைப்படுத்தும்போது மாணவர்களின் அறிவு வளர்ச்சி, மனவளர்ச்சி, பட்டறிவு ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக்கொண்டு, தொடர்பு அறுபடா வண்ணம் வரிசைப் படுத்துதல் அவசியம். பாடப் புத்தகங்கள் ஆசிரியருக்குக் கற்பித்தலுக்கு ஓர் உப கருவியாகவும், மாணவர்களுக்குக் கற்றலுக்கு ஓர் உப கருவியாகவும் இருத்தல் வேண்டும். அப்படியின்றி இருவரும் புத்தகத்தை மட்டுமே சார்ந்திருத்தல் கூடாது.

ஆசிரியரின் கையேடு

ஆசிரியரின் கையேட்டின் அவசியம்—கற்பித்தற் சாதனங்களின் தேவை (Need for instructional materials)

கற்பித்தல் முழுப் பயனையும் அளிக்கவேண்டுமானால் கற்பித்தற்குரிய பாடப் பொருளை விவரமாகத் தயாரித்தல் முக்கியமானதொரு முன் தேவையாகும். அறிவு வியக்கத்தக்க அளவிலே பரந்து விரிவடைவதாகும். பல்வேறு பாடங்களும், பாடக் கருத்துகளும், புதுமையான அளவுகளையும், கண்ணோட்டங்களையும் கொண்டிருக்கின்றன. பொதுவாக, நம் நாட்டில் வகுப்பறையில் கற்பிக்கும்போது நேரடியாகப் பயன்படுத்தக்கூடிய தகுந்த காட்சிக் கருவிகள் போதுமான அளவு இல்லை. வெவ்வேறு பாடங்களுக்கான பாடத்திட்டங்கள், சுருக்கமாகவும், பொதுப்படையாகவும் அமைந்திருக்கின்றன. மேலும், பாடத்திட்டங்கள் பாடப் பொருளின் நோக்கத்தைச் சரிவரக் :குறிப்பதில்லை. பாட நூல்கள் தரத்தில் முன்னேற்றம் அடைந்திருப்பினும், அவற்றில் சில குறைபாடுகளும் காணப்படுகின்றன.

ஆசிரியர்கள், தங்கள் சிறப்புப் பாடப் பகுதிகளில் மிகுந்த கவனத்தோடு செயற்படுவார்களானால், கற்பித்தலுக்குரிய வெவ்வேறு பாடப்பகுதிகளையும் முறைப்படுத்தி அமைக்கும்விதத்தில், எந்தப் பாடப் பகுதியையும் கற்பிக்க இயலும். பொருத்தமான கற்பித்தற் சாதனங்களின்றித் தரமுள்ள அல்லது சிறந்த கல்வி அமைய முடியாது.

பாடப்பொருளை உறுதியாக அமைத்துக்கொள்ளாமல் இருக்கும்போது, நன்கமைக்கப்பட்ட எந்தப் போதனை முறையும் பயனற்றுப் போகும். இவ்விதமன்றிப் பாடக் குறிக்கோள்களோ,

முக்கியமான கருத்துகளோ, திறமைகளோ மனப்பான்மைகளோ திட்டமான பாட அடிப்படையில் அமையாவிடில் மதிப்பீட்டு முறைகளும், குறிக்கோள்களின் அடிப்படையில் அமையாது போய்விடும். செயல்கள் பயனுள்ளவையாக இருக்கவேண்டு மென்ருல், கற்பிக்கும் கருத்தைச் சார்ந்தே அவை அமைய வேண்டும். ஆசிரியர்கள் பாடப் பொருள்களின் முழுக் கருத்தை யும் அறிந்திராவிடில், மேற்கூறிய செயல்கள் பயனற்றுப் போக வாய்ப்புண்டு.

ஆசிரியரின் கையேடு என்ருல் என்ன?

ஆசிரியரின் கையேடு, ஆசிரியருக்கு வகுப்பறையில் கற்பித் தலுக்கு உதவக்கூடிய வகையில் அதிகப்படியான கருத்துகளைக் கொண்டதாகும். 'எதைக் கற்பிப்பது' என்பதற்கும், 'எவ்வாறு கற்பிப்பது' என்பதற்கும் ஆசிரியருக்கு வழிகாட்டியாக அது அமைந்துள்ளது எனலாம். பொதுவாக, ஆசிரியருக்கான கையேடு கள், ஆதாரப் பகுதிகள் (resource units), கற்பித்தல் அலகுகள் (teaching units), துணை நூல்கள் முதலியவைகளாகும்.

கற்பித்தல் அலகுகள்

கற்பிக்கும் பகுதிகள், நிருணயிக்கப்பட்ட பாடத்திட்டத் தோடு நேரடித் தொடர்புடையவையாகும். ஆனுல், கற்பித்தல் அலகுகள், கற்பிக்க வேண்டிய ஒவ்வொரு படிநிலைக்கும் ஏற்ற வாறு, கற்பிக்க வேண்டிய கால அளவுகளையும் குறிக்கின்றது.

கற்பித்தல் அலகுகளைத் தயாரித்தல், மிக முக்கியமான ஒரு வேலையாதலால், இதை அமைப்பதற்குப் பாடப் பொருளில் நல்ல தேர்ச்சியும், கற்பிக்கும் முறைகளில் திறமையும் தேவைப்படு கின்றன. இவை, பாடப்புத்தகங்களின் மறு பிரதிகளோ அல்லது, உயர்ந்தநிலைப் பாடப் புத்தகங்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பாடப் பகுதிகளின் தொகுப்போ இல்லை. இவை, ஆசிரியருக்காக, நிறைந்த பாடப்பொருள்களைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

கற்பித்தல் அலகுகளின் வடிவமும் அளவும் (The format of a teaching unit)

வெவ்வேறு பாடப்பகுதிகளுக்கு வெவ்வேறு விதமாக அமையலாம்.

1. முன்னுரை : கற்பித்தல் அலகுகளின் முன்னுரை, தலைப் பின் முக்கியத்துவத்தையும், பண்புகளையும், புதுமைகளையும், உட் பொருளையும் எடுத்துரைக்கவேண்டும். மேலும், மாணவர்கள்

முன்பு படித்திருப்பவற்றைக் காட்டுவதோடு, தற்போதைய அலகின் எல்லைகளையும் வரையறை செய்வது நல்லது.

2. சிறப்பு நோக்கங்கள் (Specific objectives): கற்பித்தல் அலகுகள், பாடத்தின் சிறப்பு நோக்கங்களைக் குறிப்பிட்டுக் காட்ட வேண்டும். முக்கியக் கருத்துகளை அறிதல், அவற்றைச் செயற் படுத்துதல், ஆர்வம், திறமை, பாடப்பொருளை விரும்பிக் கற்கும் மனப்பான்மை முதலியவற்றை வளர்த்தல் ஆகியவற்றை உள் ளடக்கியதே சிறப்பு நோக்கமாகும். சிறப்பு நோக்கங்கள், பாடப்பொருளின் ஆழத்தையும், அதைப் படிப்பதன் பொது நோக்கங்களையும் பொறுத்து அமைந்திருக்கின்றன. நோக்கங்கள், சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும், பண்புகளைக் குறிப்பிடுவனவாக வும் அமையவேண்டும். மேலும், அவை, புரிந்துகொள்ளக் கூடியதாயும், முக்கியமான பகுதிகளை விட்டுவிடாமலும் இருக்க வேண்டும்.

3. உட்பொருள் (Content): கற்பித்தல் அலகின் உட்பொரு ளானது, பாடப் புத்தகத்தின் மறுபிரதியாக அமையக்கூடாது, நம்பகமாகவும், புத்தம் புதிய கருத்துகளை உள்ளடக்கியதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

4. கற்பித்தல் குறிப்புகள் அல்லது செயல்கள் (Teaching hints or activities): கற்பித்தல் பயனுடையதாக இருக்கவேண்டு மென்றால், குறிக்கோளை அடிப்படையாகவும், செயல்களை மைய மாகவும் கொண்டிருத்தல் வேண்டும். செயல்கள் நோக்கத்தோடு செய்யப்பட்டதாக இருக்கவேண்டுமேயன்றித் தொடர்பற்ற விளைவுகளை ஏற்படுத்தக்கூடாது. மேலும், செயல்களின் செய் முறைகளைப்பற்றியும் அதில் ஆசிரியரின் பங்கையும், மாணவரின் பங்கையும் கோடிட்டுக் காட்டவேண்டும். ஊக்குவித்தலுக்காகவும் அல்லது பாடப்பொருள் வளர்ச்சிக்காகவும் எடுத்துக்கொள்ளப் படும் ஆசிரியர் குறிப்புகள் திட்டவட்டமாக இருத்தல் வேண்டும். ஒப்படைகளைக் கொடுக்கும்போது அவை விவரமாக இருக்க வேண்டும்.

5. மதிப்பீடு: கற்பித்தலில் மதிப்பீடானது முக்கியமான தொரு பகுதியாகும். அது ஒரு தொடர்ச்சியான செயல்முறை யாகும். மதிப்பீடு குறிக்கோளைக் கொண்டதாக விளங்க வேண்டும். மதிப்பீடானது நம்பகமாக இருக்கவேண்டுமென்றால் திருத்தமாகவும் முறைப்படியும் அமையவேண்டும். வினாக்கள் நினைவாற்றலை மட்டும் சோதிப்பவையாக அமையக்கூடாது. பல்வேறு மதிப்பீட்டுச் செயல்முறைகளை, மதிப்பீட்டில் காட்ட வேண்டும்.

6. குறிப்புரை நூல்கள்: பாடத்திற்காக ஆசிரியர் கலந்தாலோசிக்கக்கூடிய புத்தகங்களை இது குறிக்கிறது. இத்தகைய நூல்களின் நிரல் ஆசிரியர் கையேட்டில் இருப்பது மிக்க பயனுடையதாகும்.

முடிவாக, அன்றாடப் போதனை உயிர்த்துடிப்புடன் விளங்கும் வகையில், நம் ஆசிரியர்கள் பாடத்தில் நல்ல தேர்ச்சியும், தகுதியும், கற்பிக்கும் சாதனங்களைப் பயன்படுத்துவதில் நல்ல திறமையும் இல்லாதவரையில், வகுப்பறைக் கற்பித்தலில் முன்னேற்றம் என்பது வெறும் வாய்வார்த்தையாகவே அமைந்துவிடலாம். எனவே, திறமையுடன் தயாரிக்கப்பட்ட பாடப் பகுதிகளை உபயோகிப்பது மிகவும் இன்றியமையாததாகும். குறிக்கோளை அடிப்படையாகக் கொண்ட மதிப்பீடும், குறிக்கோளை அடிப்படையாகக் கொண்ட போதனை முறையும் ஒரு நாணயத்தின் இரு பக்கங்களைப் போன்றதாகும்.

ஆசிரியரின் கையேடு (எடுத்துக்காட்டு)

வகுப்பு : XI

கற்பிக்கும் பாடப்பகுதி : உயரங்களும் தொலைவுகளும்.

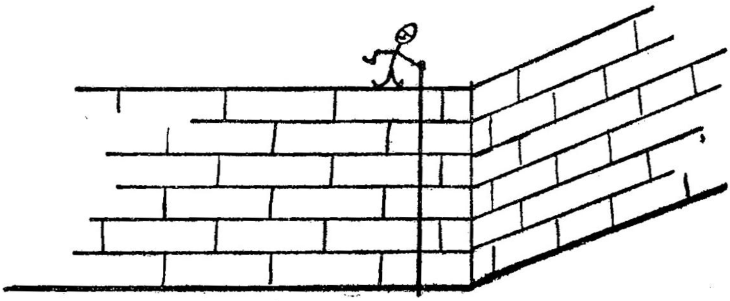
கால அளவு : 45மணித்துளிகள் கொண்ட 10 பிரிவேளைகள்

முகவுரை

வரலாற்றின் ஆரம்பக் காலத்திலேயே மனிதன் சில அளவீட்டு முறைகளை உருவாக்கியிருந்தான் என்பது பண்டைக்கால வரலாற்றுச் சான்றுகளிலிருந்து புலனாகிறது. பழங்கால எகிப்தியர் கட்டிய பிரமிடுகளைக்கொண்டு அவர்கள் மிகச் சரியான அளவீட்டு முறைகளை உபயோகித்தனர் என அறிகிறோம். அக் காலத்திலுள்ள கிரேக்கர்களும், ரோமானியர்களும் உயர்ந்த அளவீட்டு முறைகளைப் பயன்படுத்திச் சாலைகள், பாலங்கள், கட்டடங்கள், வளைவுகள் (Arches), நினைவுச்சின்னங்கள் முதலியவற்றை அமைத்தனர்.

நாம் பயணம் செய்யும் பொழுது, தூரங்களை மீட்டர், கிலோ மீட்டர் போன்ற அளவைகளாகக் குறிக்கிறோம். இதைப் போல் ஓர் அறையின் நீளம், அகலம், மேசையின் உயரம், ஒரு பையனின் உயரம் இவற்றை மீட்டர்களாகச் சொல்லுகிறோம். இந்த அளவுகளைக் கணக்கிட அளவு நாடாவை உபயோகிக்கிறோம். இவ்விதம் அளவீட்டுக் கருவிகளைக்கொண்டு அளக்கும் முறைக்கு நேர் அளவீட்டு முறை (direct measurement) எனப் பெயர்.

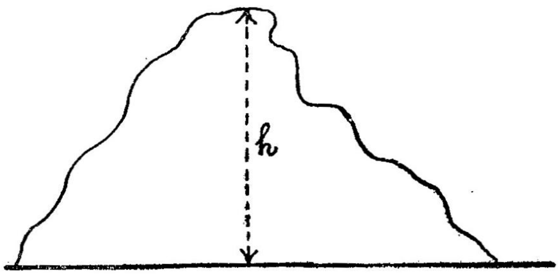
அன்றுட வாழ்வில் பல சந்தர்ப்பங்களில் நாம் அளவீட்டுக் கருவிகளைக்கொண்டு அளக்கமுடியாத உயரங்களையும், தூரங் களையும் தெரிந்துகொள்ள வேண்டியிருக்கிறது. உதாரணம்: உயரமான ஒரு கட்டடத்தின் உயரத்தை நீளமான கயிற்றின் உதவியுடன் அளக்கமுடியும். ஒருவன் கட்டடத்தின் உச்சியில் நின்றுகொண்டு கயிற்றின் ஒரு முனை கட்டடத்தின் அடியைத் தொடுமாறு தொங்கவிட்டு, கையில் பிடித்துக்கொண்டிருக்கும் பாகத்தில் அடையாளமிட்டு, இந்த அடையாளத்திற்கும், கயிற்றின் முனைக்கும் இடையில் உள்ள தூரத்தை அளந்து, கட்ட டத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடலாம். ஆனால், ஒரு மரத்தின் உயரத்தையோ, மலையின் உயரத்தையோ, ஆற்றின் அகலத் தையோ, கரையிலிருந்து கடலில் நிற்கிற கப்பலின் தூரத்தையோ, ஆகாயவிமானம் பறக்கும் உயரத்தையோ மேற்குறிப்பிட்ட முறையாலோ, அளவீட்டுக் கருவிகளாலோ கணக்கிட முடியாது.



படம் 16

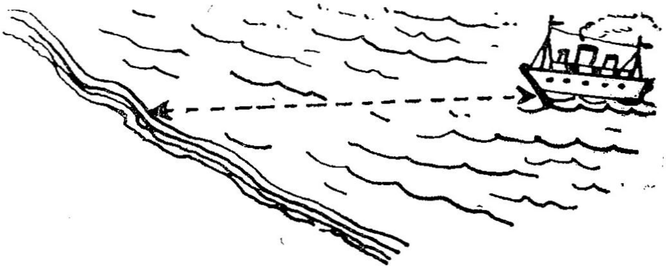
கட்டடத்தின் உயரத்தைக் கயிற்றினால் அளத்தல்

நேரடியாக அளக்க முடியாத சில உயரங்களும், தூரங்களும்

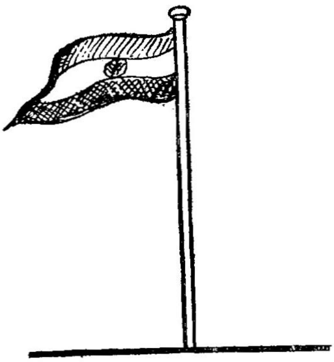


படம் 17

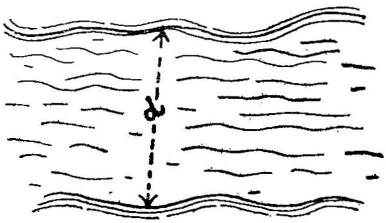
மலையின் உயரம்



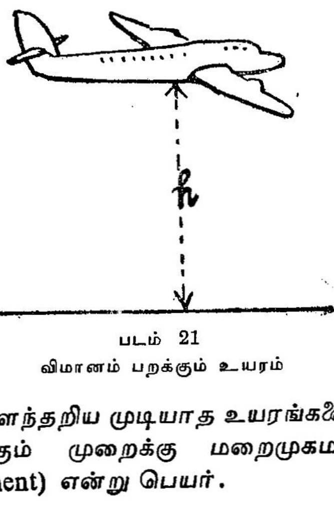
படம் 18
கரையிலிருந்து கப்பலின் தூரம்



படம் 19
கொடிக்கம்பத்தின் உயரம்



படம் 20
ஆற்றின் அகலம்



படம் 21
விமானம் பறக்கும் உயரம்

நேரடியாக அளந்தறிய முடியாத உயரங்களையும், தூரங்களை யும் கண்டுபிடிக்கும் முறைக்கு மறைமுகமான அளவுமுறை (indirect measurement) என்று பெயர்.

I. முன்னறிவு

(1) முக்கோணங்கள் வரைதல்: (a) இரண்டு பக்கங்களும், இடைக் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல்; (b) ஒரு பக்கமும், இரண்டுகோணங்களும் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல்.

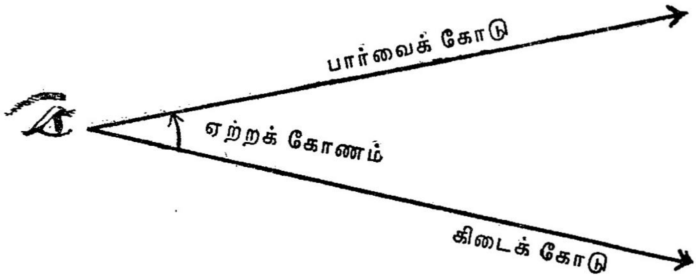
(2) அளவுத் திட்டம்: அளவுத்திட்டப்படி படம் வரைதல் (Scale drawing).

(3) செங்கோண முக்கோணத்தின் தன்மைகள்.

II. பொருள் விளக்கம் (Content analysis)

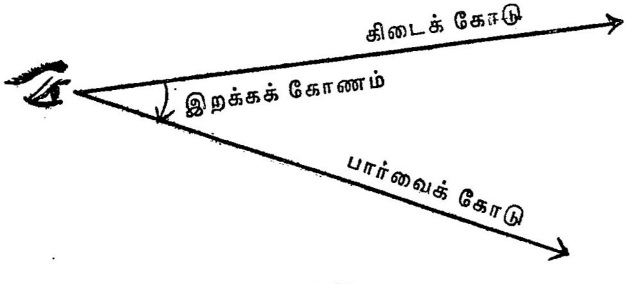
கருத்துகள் (Concepts)

1. ஏற்றக்கோணம்: கண்மட்டத்திற்கு மேல் ஏதாவது ஒரு பொருளைப் பார்க்கும்பொழுது கண்மட்டக்கோட்டிற்கும் அல்லது கிடைகோட்டிற்கும் பார்வைக்கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ஏற்றக்கோணம்



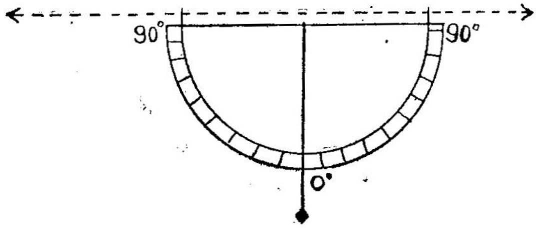
படம் 22

2. இறக்கக் கோணம்: கண்மட்டத்திற்குக்கீழே ஒரு பொருளைப் பார்க்கும்பொழுது கண்மட்டக் கோட்டிற்கும் அல்லது கிடைகோட்டிற்கும் பார்வைக்கோட்டிற்கும் இடையே யுள்ள கோணம் இறக்கக் கோணம்.

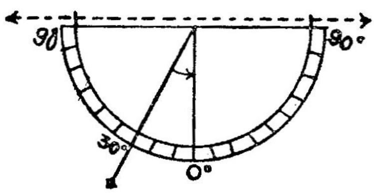


படம் 23

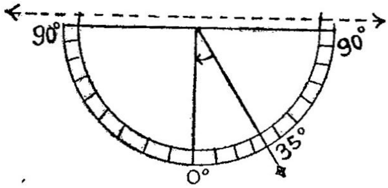
3. கிளினோமீட்டர் (Clinometer) : ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் ஆகியவற்றை அளக்க உபயோகப்படும் கருவி கிளினோ மீட்டர்



படம் 24



படம் 25



படம் 26

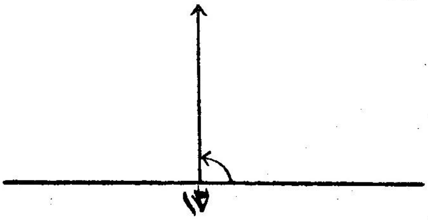
இக் கருவியில் படத்தில் காட்டப்பட்டிருப்பது போல் அரை வட்ட வடிவமான பகுதியில் கோண அலகுகள் (degrees) 90°—0—90° என்ற முறையில் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. வட்ட மையத்தில் இருந்து ஒரு கயிற்றில் கனமான கோளம் ஒன்று தூக்கு நூல்போல் கட்டப்பட்டுத் தொங்குகிறது. விட்டத்தின் வழியாக ஒரு சிறிய குழாய் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இக் குழாயின் ஒரு முனை வழி யாக ஒரு பொருளை நோக்கினால் தூக்குநூல் காட்டும் கோணம் 30° ஏற்றக் கோணம் (படம் 25), அல்லது இறக்கக் கோணம் 25° (படம் 26) ஆகும்.

4. மறைமுக அளவீட்டு முறைகளில் ஏற்றக்கோணம், இறக்கக் கோணம் இவற்றின் உபயோகங்கள்

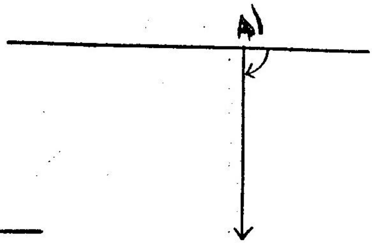
மலைகள், உயர்ந்த கட்டடங்கள், கோபுரங்கள், கொடிக் கம்பங்கள் இவற்றின் உயரங்களும், ஆற்றின் அகலங்களும், நேர் முகமாக அளக்கமுடியாத சில தூரங்களும் கணித்தல்.

தன்மைகள்

1. மிகப் பெரிய ஏற்றக்கோணம் 90°, மிகப் பெரிய இறக்கக் கோணம் 90°

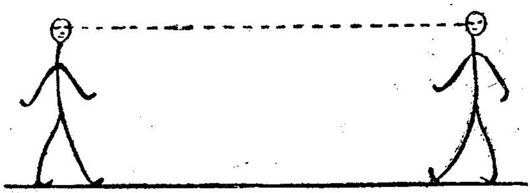


படம் 27 (i)



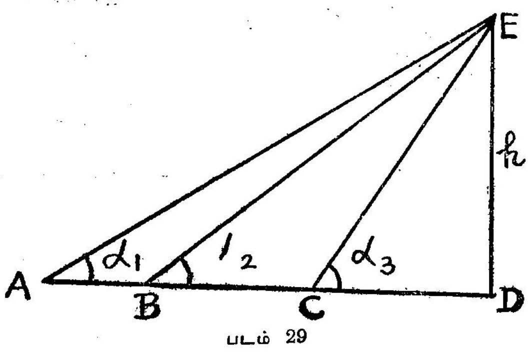
படம் 27 (ii)

2. மிகக் குறைந்த ஏற்றக் கோணம் 0°, மிகக் குறைந்த இறக்கக் கோணம் 0°



படம் 28

3. ஏற்றக்கோணமும் பார்வைத் தூரமும் எதிர்விகிதச் சமமுடையவை.



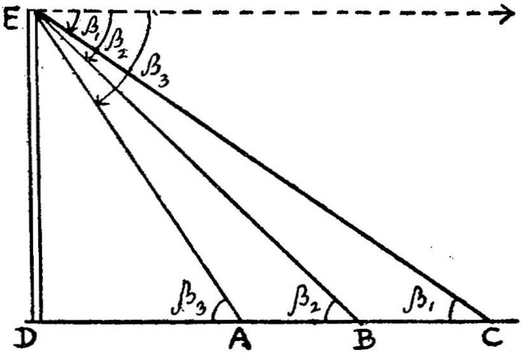
படம் 29

$AD = d_1 \quad BD = d_2 \quad CD = d_3$

$d_1 > d_2 > d_3$-யானல்,

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$-யாகும்.

4. இறக்கக்கோணமும் பார்வைத் தூரமும் எதிர்விகிதச் சமமுடையவை.



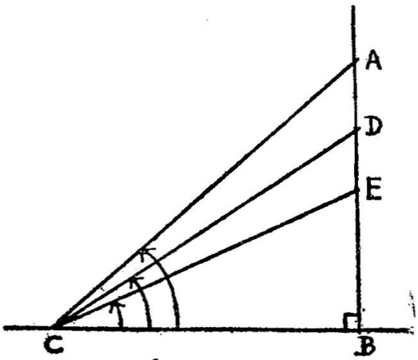
படம் 30

$CD = d_1 \quad BD = d_2 \quad AD = d_3$

$d_1 > d_2 > d_3$-யானல்,

$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$-யாகும்.

5. ஏற்றக்கோணமும் உயரமும் நேர்விகிதச் சமமுடையவை.



படம் 31

$AB = h_1 \quad DB = h_2 \quad EB = h_3$

$\angle ACB = \theta_1$

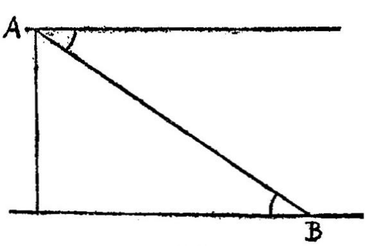
$\angle DCB = \theta_2$

$\angle ECB = \theta_3$

$h_1 > h_2 > h_3$-யானல்,

$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$-யாகும்.

A-லிருந்து B-ன் இறக்கக் கோணமும் B-லிருந்து A-ன் ஏற்றக்கோணமும் சமம்.



படம் 32

III. சிறப்பு நோக்கங்கள்

1. மாணவன் கீழ்க்கண்ட விவரங்களை அறிந்துகொள்கிறன்.

(i) மறைமுக அளவு முறைகள்,

(ii) ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்கள்,

(iii) உயரங்களையும், தூரங்களையும் மறைமுகமாகக் கணித்தல்.

a. மாணவன் மேற்கண்டவற்றை நினைவுகூர்கிறன்.

b. அவற்றைத் தக்க சூழ்நிலைகளில் மீட்டறிகிறன்.

2. மாணவன் ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்களின் கோட்பாடு களையும் தன்மைகளையும் நன்றாகப் புரிந்துகொள்கிறன்.

(i) ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் தருகிறன்;

(ii) கோட்பாடுகள், விளக்கங்கள் இவற்றிலுள்ள தவறு களைக் கண்டறிகிறன்;

(iii) கணிதத் தொடர்புகளைக் கண்டுபிடிக்கிறன்;

(iv) தலைப்பிற்குரிய கருத்துகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும், பிரித்தறியவும் புரிந்துகொள்கிறன்;

(v) முடிவுகளைச் சரிபார்க்கிறன்.

3. மாணவன் வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில் தன் அறிவைச் செயற்படுத்திச் சிக்கல்களை ஆராய்கிறன்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட சிந்தனைக் கணக்குகளை ஆராய் கிறன்;

(ii) கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளையும், என்ன கேட்கப் பட்டுள்ளது என்பதையும் ஆராய்கிறன்;

(iii) தரப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகள் போதுமானவையா அல்லது தேவையில்லையா என்பதை ஆராய்கிறன்;

(iv) கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளுக்குள்ள தொடர்பு களை நிலைநாட்டுகிறன்;

(v) பொதுமைக் கருத்துகளைக் காண்கிறன்;

(vi) தேவையான முறையைத் தேர்ந்தெடுக்கிறன்.

4. மாணவன் திறமைகளைப் பெறுகிறன்.

(i) உரிய கருவியைத் தேர்ந்தெடுக்கிறன்;

(ii) சரியாக அளக்கக் கற்றுக்கொள்கிறன்;

(iii) பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கிருன்;

(iv) தெளிவாகவும், நுட்பமாகவும் படம் வரையக் கற்றுக்கொள்கிருன்.

IV. ஆசிரியருக்குக் குறிப்புகள்

1. ஆசிரியர் முதலில் நேர் அளவீட்டு முறைகளை அறிமுகப் படுத்தவேண்டும். அளவு நாடா உபயோகிக்கும் சில சந்தர்ப்பங்களை மாணவர்கள் கூறுமாறு கேள்விகள் கேட்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) இந்த அறையின் நீளத்தை எவ்வாறு கண்டறிவாய்?

(ii) உன் உயரத்தை எவ்வாறு தெரிந்துகொள்வாய்?

2. அதன் பிறகு ஆசிரியர் மறைமுக அளவீட்டு முறைகளை அறிமுகப்படுத்த வேண்டும். வாழ்க்கையில் அவற்றின் தேவைகளை விளக்கவேண்டும்.

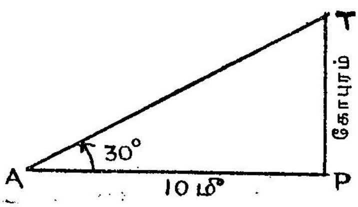
3. ஏற்றக்கோணம், இறக்கக்கோணம் இவற்றை விளக்க வேண்டும்.

4. கிளினேமீட்டரைப்பற்றியும் அதன் பயன்களைப்பற்றியும் விளக்கவேண்டும்.

5. படங்கள் வரைந்து ஏற்றக் கோணம் இறக்கக் கோணம் இவற்றைப் பயன்படுத்தி (மறை முகமாக) உயரங்கள், தூரங்கள் முதலியவற்றைக் கண்டறிவதை விளக்கவேண்டும்.

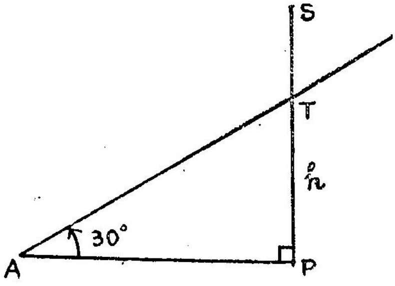
மாதிரி 1: ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 10 மீட்டர் தூரத்தில் அதன் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° என்ருல் கோபுரத்தின் உயரமென்ன?

உதவிப் படம்



படம் 33 (i)

அளவுத் திட்டம் 1 செ.மீ. = 2 மீ.

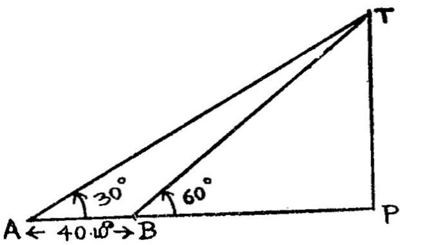


படம் 33 (ii)

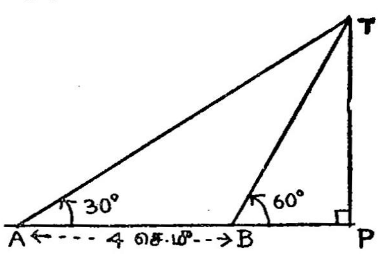
வரைமுறை: ஒரு கிடை மட்டக் கோடு வரை. அதில் 5 செ.மீ. நீளமுள்ள A P வெட்டியெடு. A P-க்குச் செங்குத்தாக P S வரை. A வழியாக A P-க்கு 30° சாய்வில் நேர்கோடு வரை. அந்த நேர் கோடு P Sஐ T-ல் வெட்டினால், P T கோபுரத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 2 : கோபுரத்தின் அடியுடன் ஒரே நேர்கோட்டி லுள்ள இரு இடங்களிலிருந்து கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணங்கள் 60°, 30°. இரு இடங்களுக்கு மிடையேயுள்ள தூரம் 40மீ. அவை கோபுரத்தின் ஒரே பக்கத்திலுள்ளன. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

உதவிப் படம் அளவுத் திட்டம் 10 மீ. = 1 செ.மீ.



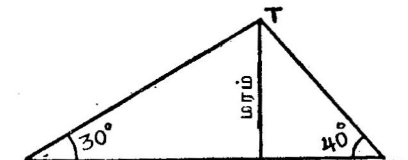
படம் 34 (i)



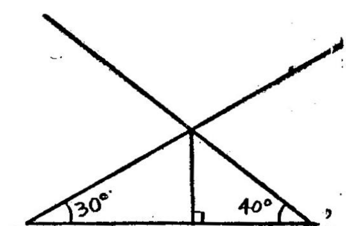
படம் 34 (ii)

மாதிரி 3 : ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ள இரு இடங்கள் A,B. அவற்றிலிருந்து அதே நேர்கோட்டில் அவ் விரு இடங்களுக்கிடை யேயுள்ள மரத்தின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30°. 40°, A.B-க் கிடையேயுள்ள தூரம் 50 மீட்டர்கள் என்றால் மரத்தின் உயரத் தைக் கண்டுபிடி.

உதவிப் படம் அளவுத் திட்டம் 10 மீ. = 1 செ.மீ.



படம் 35 (i)



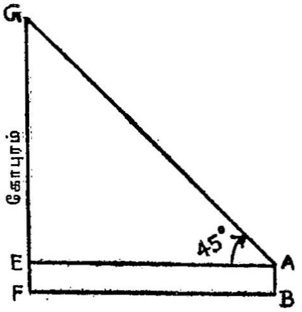
படம் 35 (ii)

மாதிரி 4: A என்ற இடத்திலிருந்து 1·5மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு மனிதன், 25 மீட்டருக்கு அப்பாலுள்ள ஒரு கோபுரத்தின்

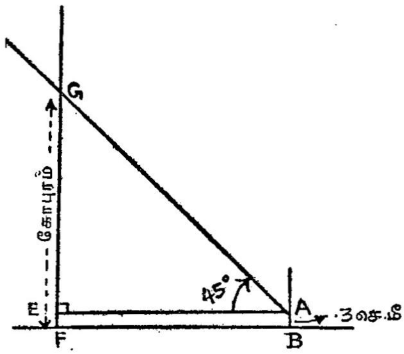
உச்சியை நோக்குகிறுன். கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 45° என்று காண்கிறுன், அதன் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

உதவிப் படம்

அளவுத் திட்டம் 5 மீ. = 1 செ.மீ.



படம் 36 (i)

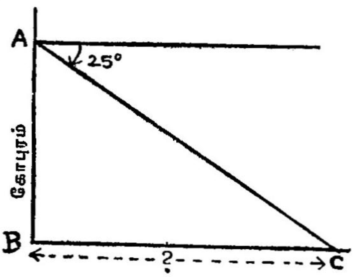


படம் 36 (ii)

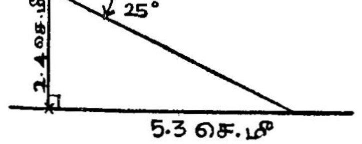
மாதிரி 5: ஒரு கோபுரத்தின் உயரம் 120 மீ. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து C என்ற இடத்தின் இறக்கக்கோணம் 25°. C-லிருந்து கோபுரத்திற்குள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

உதவிப் படம்

அளவுத் திட்டம் 50 மீ. = 1 செ.மீ.



படம் 37 (i)

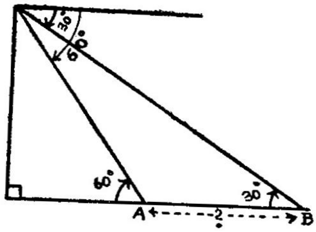


படம் 37 (ii)

மாதிரி 6: 50 மீ. உயரமுள்ள ஒரு கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள இடங்கள் A, B என்பவை. அவை கட்டடத்தின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளவை, கட்டடத்தின்

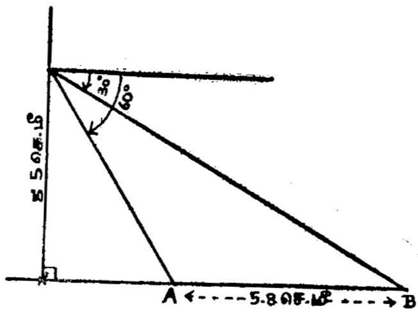
உச்சியிலிருந்து A, B-ன் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே 60° 30°. A, B-ன் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

உதவிப் படம்



படம் 38 (i)

அளவுத் திட்டம் 10 மீ. = 1 செ.மீ.



படம் 38 (ii)

குறிப்பு: 1. மாணவர்கள் உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவேண்டும்.

2. உண்மைப்படம் வரையுமுன் அளவுத் திட்டம் தீர்மானிக்கப்படவேண்டும்.

3. உண்மைப்படம் வரையும்பொழுது எல்லா அளவுகளையும் நுட்பமாக வரையவேண்டும்.

4. விடை காணும்பொழுது நீளத்தை உண்மை அளவுக்கு மாற்றவேண்டும்.

5. விடைகளைச் சரிபார்க்கவேண்டும்.

6. மேற்கண்ட மாதிரிகளில் வகுப்பு, வீட்டுக் கணக்குகள் கொடுத்து மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியளிக்கவேண்டும்.

பயன் முறைச் செயல்கள்

1. மாணவர்கள் தாங்களாகவே கிளினோமீட்டரைத் தயாரித்தல்.

2. பள்ளிக் கட்டடத்தின் உயரம், கொடிக் கம்பத்தின் உயரம், சிலையின் உயரம் இவற்றைக் கண்டுபிடித்தல்.

3. பள்ளிக் கட்டடத்திற்கும், பள்ளிச் சுற்றுச் சுவருக்குமிடையேயுள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடித்தல்,

மாணவர்களைப் பல குழுக்களாகப் பிரித்து மேற்கூறியவற்றைக் குழு வேலைகளாகச் செய்யப் பயிற்சியளிக்கவேண்டும்.

மதிப்பிடுதல்: மதிப்பிடுதல், பாடம் கற்பித்தலின் இன்றியமையாத பகுதியாகும். மதிப்பிடுதல் பலன் தரவேண்டுமானால் கற்பித்தல், கற்றல் இவற்றுடன் தொடர்ந்து வரவேண்டும். வீட்டு வேலைகளைக்கூட ஆசிரியர் மதிப்பிடலாம். ஒவ்வொரு சிறிய பகுதியும் முடிந்தவுடன் ஒரு சிறிய தேர்வு நடத்த வேண்டும். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்குகள் பாடம் கற்பித்தல், வீட்டு வேலைகள், பகுதித் தேர்வுகள் இவற்றிற்கு உபயோகமாகும். கேள்விகளின்கீழே குறிக்கோள்களும், சிறப்பு நோக்கங்களும் தரப்பட்டுள்ளன.

1. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 60 மீட்டர் தூரத்தில் அக் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 40°, கோபுரத்தின் உயரமென்ன?

(அறிவாற்றல்—நினைவுகூர்தல்.)

2. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 200 மீ. அதன் உச்சியிலிருந்து ஒரு படகின் இறக்கக்கோணம் 30°. கலங்கரை விளக்கத்தின் அடியிலிருந்து படகின் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

(அறிவாற்றல்—நினைவுகூர்தல்.)

3. ஒரு மரத்தின் உயரம் 8மீ. அதன் அடியிலிருந்து 6மீ. தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் மரத்தின் உச்சியிலிருந்து இறக்கக் கோணம் என்ன?

(பொருளுணர்வாற்றல்—நிபந்தனைகளுக்குள்ள தொடர்புகளைக் கண்டறிகிறான்.)

4. ஒரு மரத்தின் நிழலின் நீளம் 70 மீட்டர், அதே நேரத்தில் சூரியனின் ஏற்றக்கோணம் 25° என்றால் மரத்தின் உயரமென்ன?

(செயலாற்றல்—நிபந்தனைகளுக்குள்ள தொடர்புகளை நிலைநாட்டுதல்.)

5. ஒரு மரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பொருளின் இறக்கக் கோணம் 40°. மரத்தின் அடியிலிருந்து அப் பொருளின் தூரம் 15மீ. மரத்தின் உயரமென்ன?

(பொருளுணர்வாற்றல்—தொடர்புகளைக் கண்டறிகிறான்.)

6. ஒரு கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு கொடிக் கம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் 15°. கொடிக் கம்பத்தின் உயரம் 10 மீ.

கட்டடத்திற்கும், கொடிக் கம்பத்திற்கு மிடையேயுள்ள தூரம் 25மீ. கட்டடத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

(பொருளுணர்வாற்றல்—தொடர்புகளைக் கண்டறிகிறான்.)

7. ஓரிடத்திலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணம் 35°. அந்த இடத்திலிருந்து அதே நேர்கோட்டில் கோபுரத்தை நோக்கி 40மீ. வந்தபின் ஏற்றக்கோணம் 55°. கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(செயலாற்றல்—ஆராய்கிறான்.)

8. இரு வீடுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 160மீ. இவற்றிற் கிடையேயுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் இவற்றிலிருந்து முறையே 40°, 60°. கோபுரத்தின் அடி, வீடுகள் இவை ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளன. கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(செயலாற்றல்—ஆராய்கிறான்.)

9. ஒரு குன்றிற்கும் கட்டடத்திற்குமிடையேயுள்ள தூரம் 300மீ. கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து குன்றின் உச்சி, அடி இவற்றின் ஏற்றக்கோணம், இறக்கக் கோணம் முறையே 60°, 25°. கட்டடம், குன்று இவற்றின் உயரங்களைக் கண்டுபிடி.

(செயலாற்றல்—கணிதத் தொடர்புகளை நிலைநாட்டுகிறான்.)

வேலைக் குறிப்பேடு (work book)

வேலைக் குறிப்பேட்டில் மாணவர்கள் செய்யவேண்டிய பயிற்சிகளையும், செயல்களையும்பற்றிய குறிப்புரை கொடுக்கப்பட்டிருக்கவேண்டும். இதைப் பாடப் புத்தகத்திற்கு உதவியாகக் கையாளலாம். அனுபவமும் ஆழ்ந்த யோசனையும் உள்ளவர்களால் இது பாடப் புத்தகத்தை ஒட்டித் தயாரிக்கப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் தேவையான முன்னுரை இருத்தல் வேண்டும். சில சரித்திர சம்பந்தமான குறிப்புகள் இருப்பது நலம். கடினமான புதிர்க் கணக்குகளுக்கு வழிகாட்டும் குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் மாணவர்கள் எல்லாக் கணக்குகளையும் வெற்றிகரமாகச் செய்து கணிதப் பாடத்தில் அதிக ஆர்வமுள்ளவர்களாகத் திகழ்வார்கள். ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும் எத்தனை கணக்குகள் செய்தார்கள் என்பதற்கு ஓர் அட்டவணை, குறிப்பேட்டின் முதல் பக்கத்தில் எழுதிவைத்தால் மாணவர்களின் திறனை அறிந்துகொள்ளலாம். கற்றலில் பின்தங்கி இருப்பவர்களுக்கு ஆசிரியர் உதவிபுரியலாம். கணக்குகளைச் செய்வதற்கும் இடம் ஒதுக்கப்பட வேண்டும் (மன வேலையும், எழுத்து வேலையும்); அமைப்பு வேலைகளுக்கும் இடம் ஒதுக்கப்படல் வேண்டும். வரை

படம் வரைவதற்கு, வரைபடத்தாள் கொடுக்கப்பட வேண்டும். இவ்வகையில் பார்த்தால் தனியாகத் தயாரிக்கப்பட்ட வேலைக் குறிப்பேட்டினால் மாணவர்களுக்கு ஒழுங்குமுறையில் கணக்குகளையும், பயிற்சிகளையும் செய்வதில் சிறந்த தேர்ச்சி ஏற்படுகிறது. ஆனால், அத்துடன் சாதாரண நோட்டுப் புத்தக வேலையிலும் அவர்களுக்குப் பயிற்சி அளித்தால் கற்றதைத் தன்வயப்படுத்த உதவும்.

தொடக்க நிலைப் பள்ளி (I — V வகுப்பு) மாணவர்க்குக் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகளைக் கற்பிக்கும்போது இவ் வேலைக் குறிப்பேடுகள் மிகுந்த பயன்தரத் தக்கவையாகும். இடைநிலைப் பள்ளி மாணவர்க்கு (IV—VIII) பாடப் பகுதியில் அதிகப்படியான பயிற்சி பெற இவை பயன்படுத்தப்படலாம். உயர்நிலைப் பள்ளி மாணவர்க்கான வேலைக் குறிப்பேட்டில் பாடப்பகுதி மட்டும் அல்லாமல் பொது அறிவை வளர்ப்பதற்கு ஏற்ற கணக்குகள் இடம் பெற்றிருத்தல் அவசியம். வேலைக் குறிப்பேட்டின் தரம் ஆசிரியரின் திறமையைச் சார்ந்ததாகும்.

கணிதக் கழகம்

வகுப்பறைக்கு வெளியே மாணவர்களுடைய ஆர்வத்தை வளர்ப்பதற்காகக் எடுத்துக்கொள்ளக்கூடிய தனிக் கழகங்கள் பாடம் கற்பித்தலுக்குப் பெரிதும் துணைபுரிபவையாகும். அவற்றுள் கணிதக் கழகமும் ஒன்று. அது மாணவர்களுக்குக் கணிதத்தில் ஆர்வம் வளர்வதற்கும், பெற்ற அறிவைக் காப்பதற்கும் சிறந்ததொரு வழிவகுக்கின்றது. மேலும், மாணவர்கள் அவர்களுடைய கருத்துகளைக் கூறி விவாதிக்கவும் விமர்சிக்கவும் வாய்ப்பளிக்கிறது. இக் கழகங்களில் 'கணித ஆசிரியர்' 'பள்ளி அறிவியலும் கணிதமும்' போன்ற பத்திரிகைகளிலுள்ள செய்திகளைப்பற்றியும் விவாதிக்கலாம். கணிதக் கழகங்களை ஆசிரியர்கள் மாணவர்கள் இருபாலார்க்கும் பயன்படும்படி அமைக்கலாம். கழகத்தில் மாணவர்களால் படிக்கப் பெறும் செய்திகளைப் பல்வேறு துறைகளைச் சார்ந்த ஆசிரியர்கள் நிகழ்த்தும் உரைகளால் நிறைவுசெய்யலாம். இவற்றால் பிற பாடங்களோடு கணிதம் கொண்டுள்ள தொடர்புகள் எடுத்துக்காட்டப்படும். பின்வரும் தலைப்புகளில் விரிவுரை நிகழ்த்துமாறு ஆசிரியர்களைக் கேட்டுக் கொள்ளலாம்.

1. கணிதமும் மின்னியலும்

2. இரண்டன் மான முறை. இலக்க கம்ப்யூட்டர்கள் (Binary numbers & digital computers)

3. கணித விளையாட்டுகள்

4. மாயச் சதுரங்கள்

5. புதிர்க் கணக்குகள்

6. எண்களின் அமைப்பு முறைகள்

7. நாட்காட்டியின் (calendar) வரலாறு

8. வளைவரைகள் தைத்தல் (curve stitching)

மாணவர்களுக்குக் கொடுக்கப்படும் தலைப்புகள் தெளிவாக இருப்பதோடு, எதிர்பார்க்கும் தகவல்பற்றிய விரிவான குறிப்புகளையும் கொண்டிருத்தல் வேண்டும். பொதுவாக, மாணவர்க்கு அளிக்கப்படும் வேலை கணித வரலாற்றைக் கூறும் புத்தகங்களிலிருந்து சேகரிக்கப்படுதல் நல்லது. இவ்வாறு கண்டறிந்த கருத்துகள் மாணவரின் விரிவுரைக்கு அடிப்படையாகும். இவ் விரிவுரைகள் அனைத்தும் மாணவர்களின் ஆர்வத்திற்கும், திறமைக்கும் ஏற்றவாறு அமையவேண்டும்.

வரலாற்றுத் தலைப்புகள்

எண்கணிதத்தின் வரலாறும் வளர்ச்சியும்

a. எண் முறை;

b. எடை நீளம், நேரம், கோணம்;

c. பகா எண்.

வடிவியல்

a. வடிவ கணிதத்தின் தோற்றம்;

b. π-ன் வரலாறு.

இயற்கணிதம்

a. 'அல்ஜீப்ரா' என்ற பெயர் வரக் காரணம்;

b. இயற்கணிதத்தின் குறியீடுகள்;

c. பூச்சியமும், முடிவிலியும்;

d. திசை எண்கள்;

e. விகிதமுரு எண்கள்;

f. கற்பனை எண்கள்.

பல்வேறு நாடுகளில், வெவ்வேறு காலங்களில் கணிதம் வளர்ந்த வரலாற்றைக் கூறும் தலைப்புகளை மாணவர்களுக்குக் கொடுத்துக் குறிப்புரை தயாரிக்கச் சொல்லலாம். உதாரணமாக, இந்துக்கள், எகிப்தியர்கள், ரோமானியர்கள், அராபியர்கள் ஆகியோர் கணித வளர்ச்சிக்காற்றிய பணியை மாணவர்கள் எடுத்துக் கூறலாம். மாணவர்க்கு ஆர்வமூட்டும் சிறப்பான தலைப்புகளையும், வகுப்பு வேலைக்கு உற்சாகமூட்டும் குறிப்பிட்ட கணக்குப் பிரச்சினைகளையும் கணிதக் கழகத்திற்கான பொருளாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

பொருட்காட்சி அமைத்தல், அதில் வைக்கப்படும் மாதிரிகளை விளக்கிக் காட்டுதல் ஆகியவை கணிதக்கழகத்தின் ஊக்கமூட்டுகிற செயல்களாகும். தியோடிலைட் (Theodolite), தளமட்ட அளவைக் கருவி, நழுவு சட்டம் (slide rule) நிலைக்கோணமானி (sextant) போன்ற கருவிகள் கிடைக்குமானால், கழகத்தின் உறுப்பினரொருவர் அவற்றின் அமைப்பையும், பயன்படுத்தும் விதத்தையும் எடுத்துரைக்கலாம்.

கணித மேதைகளின் வாழ்க்கை வரலாற்றையும், அவர்கள் கணிதத்திற்கு ஆற்றிய பணியையும்பற்றிச் சுருக்கமாக எடுத்துக் கூறுவதற்குக் கணிதக் கழகத்தில் வாய்ப்பளிக்க வேண்டும். உதாரணமாக, பிதாகரஸ், யூக்ளிட், ஆர்க்கிமிடீஸ், அப்போலோனியஸ், லிபினிட்ஸ், நியூட்டன், இராமானுஜம் ஆகியோரின் வாழ்க்கைச் சரிதத்தையும், கணிதத்திற்கு அவர்கள் ஆற்றிய பணியையும் எடுத்துக்கூறலாம். கீழ்க்கண்ட புகழ்பெற்ற மூன்று புதிர்க் கணக்குகளைப் பற்றிக் கழகத்தில் விவாதிக்கலாம்.

1. வட்டத்தின் பரப்பிற்குச் சமமான சதுரம் கண்டுபிடித்தல். (squaring the circle)

2. கனச் சதுரத்தைப் போல் இரண்டு மடங்கு கன அளவுள்ள மற்ரெரு கனச் சதுரம் (dublicating a cube) அமைத்தல்.

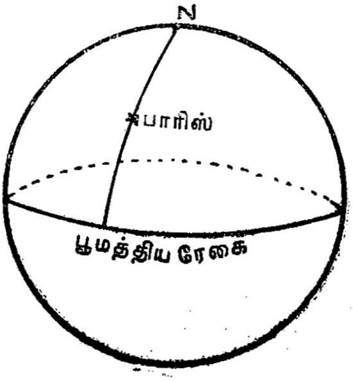
3. கோணத்தை முச்சமக் கூறிடல்.

மெட்ரிக் முறையின் தோற்றமும், வளர்ச்சியும்பற்றிக் கழகத்தில் கூறலாம்.

மெட்ரிக் முறை

1789-ல் ஃபிரெஞ்சுப் புரட்சிக்குப்பின் ஃபிரான்சில் நிறுத்தல், நீட்டல் அளவைகள் மெட்ரிக் முறையில் உருவாக்கப்பட்டன. இந்தக் காலத்துக்கு முன்புவரை பொதுவாக ஒவ்வொரு துறை முகமும், நகரமும், உள்நாட்டு அரசாங்கங்களும் தனித்தனி முறையைக் கையாண்டன. இதனால் வியாபாரம், பயணம், செய்தித் தொடர்பு முதலியவற்றைத் தொடர்ந்துசெய்தல் சிக்க லாக இருந்தது.

1791-ல் ஃபிரெஞ்சு அறிவியல் கலைக்கழகத்தின் சிபாரிசின் பேரில் ஒரு புதிய முறை ஏற்படுத்தப்பட்டது. அதாவது, பாரிஸ் வழியாகச் செல்லும் பூமியின் வடதுருவக் கால் பகுதியின் (SN) 10 மில்லியனில் ஒரு பாகமே $\left(\frac{1}{10,000,000}\right)$ 1 மீட்டர் என்று வழங் கப்பட்டது. இதன் தசம அடுக்குத் தொகுதிகள் கிரேக்கச் சொற்றொடர்களின் முற்பகுதியினைப் பயன் படுத்திக் குறிக்கப்பட்டன.



படம் 39

10 மீட்டர் = 1 டெகா மீட்டர்
100 மீட்டர் = 1 ஹெக்டா மீட்டர்
1000 மீட்டர் = 1 கிலோ மீட்டர்

இலத்தீன் மொழியின் சொற்றொடர்களின் முற்பகுதியினைப் பயன்படுத்திக் தசமக் கீழ்மடங் காகக் குறிக்கப்பட்டன.

$\frac{1}{10}$ மீட்டர் = 1 டெசி மீட்டர்

$\frac{1}{100}$ மீட்டர் = 1 சென்டி மீட்டர்

$\frac{1}{1000}$ மீட்டர் = 1 மில்லி மீட்டர்

நிறையின் புதிய அளவாக, 4° சென்டிகிரேட் நிலையிலுள்ள 1 கன செ. மீ. நீரின் எடை ஒரு கிராம் என்று குறிக்கப்பட்டது. ஒரு லிட்டர் என்பது 1 கன டெசி மீட்டரின் கொள்ளளவாகும். 1795ஆம் ஆண்டில் இம் முறையினைக் கையாளும் வகையில் ஃபிரான்சில் சட்டம் ஏற்படுத்தப்பட்டது. 1799ஆம் ஆண்டு

டிசம்பர் 2ஆம் நாள், மீட்டர், கிலோகிராம் இவற்றின் அளவுகள் ஃபிரான்ஸ் பாராளுமன்றச் சட்டசபையில் சமர்ப்பிக்கப்பட்டு, பிறகு அது குடியரசின் பத்திரங்களைப் பாதுகாக்குமிடத்தில் வைக்கப்பட்டது.

19-ஆம் நூற்றுண்டில் பெரும்பாலான ஐரோப்பிய நாடுகளில் இம் முறை கையாளப்பட்டது. 1875-ல் நடந்த சர்வதேச மாநாட்டில் (Bureau International des poids et measures) என்ற சர்வதேச அலுவலகம் நிறுவப்பட்டது. சர்வதேச மெட்ரிக் முறைக்கு ஒரு தரத்தினை ஏற்படுத்துதல், இதன் முக்கிய வேலைகளில் ஒன்ருகும்.

ஒரு கிலோகிராம் எடையாகப் பிளாட்டினம்-இரிடியம் கலப்பு உலோகத்தாலான கன உருளை ஒன்று 1889ஆம் ஆண்டில் ஏற்படுத்தப்பட்டது. இந்த எடையானது 4°c-ல் உள்ள 1க. செ. மீ. தூய நீரின் நிறையை ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ளது.

மெட்ரிக் முறையில் அலகுகள் 10-ன் மடங்குகளை ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ளன. ஆகவே, இம் முறையில் ஓர் இனத்திலிருந்து மற்றோர் இனத்திற்கு மாற்றுவது எளிது.

கணிதக் கழகத்தில் நாட்காட்டியின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும் பற்றி மாணவர்களுக்கு எடுத்துரைக்கலாம்.

நாட்காட்டி (Calendar) — முதன்முதலில் ஓர் ஆண்டு பத்து மாதங்களைக் கொண்டதாக இருந்தது. பாம்பிலியஸ் (716-673 B.C.) ஜனவரி, ஃபிப்ரவரி என்ற இரண்டு மாதங்கள் சேர்த்தார். நாட்காட்டி பின்வருமாறு இருந்தது:

மார்ச்சு	31	நாள்கள்		
ஏப்ரல்	29			
மே	31			
ஜூன்	29			
க்வின்டிலியஸ்	31	(க்வின்ட்	5	இலத்தீன் மொழி)
ஸெக்ஸ்டிலியஸ்	29	(ஸெக்ஸ்	6	,,)
செப்டம்பர்	29	(செப்ட்	7	,,)
அக்டோபர்	31	(அக்டோ	8	,,)
நவம்பர்	29	(நவம்	9	,,)
டிசம்பர்	29	(டிசம்	10	,,)
ஜனவரி	29			
ஃபிப்ரவரி	28			

ஆக மொத்தம் 355 நாள்கள் அல்லது 12 மதி நிலை மாதங்கள் (lunar months) $12 \times 29\frac{1}{2} = 354$ நாள்கள். ஆண்டுக் குறிப்பு மதியின் போக்கை அடிப்படையாகக்கொண்டு கணக்கிடப் பட்டது. ரோமானியர்கள் இரட்டைப்படை எண்களை ஆகாதவை என வெறுக்கும் இயல்புடையவர்களாயிருந்தனர். எனவே, ஃபிப்ர வரியைத் தவிர மற்ற மாதங்கள் ஒவ்வொன்றினுக்கும் 29 அல்லது 31 நாள்களை ஒதுக்கினர். ஃபிப்ரவரி மாதத்தை அவர்கள் கீழான தெய்வங்களுக்கும், இறந்தவர்களுக்கும் உரியது என ஒதுக்கி அதற்கு 28 நாள்கள் வைத்திருந்தனர்.

அதன்பின் ஆண்டுக்குறிப்பானது சூரியனுடைய போக்கிற் கேற்ப இருக்கவேண்டும் என்பதற்காக ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் 21 அல்லது 22 நாள்களை அதிகப்படியாகப் புகுத்தினர்.

ஜூலியஸ் சீசர் காலத்தில் நாட்காட்டியில் குளிர் பருவ மாதங்கள் அனைத்தும் கூதிர்ப் பருவத்தில் (autumn) வருவதாகக் காணப்பட்டது. நாட்காட்டியின்படி குளிர்காலக் காற்றுகள் பலமாக வீசவேண்டிய நாள்களில் அறுவடை நடைபெற்றுக் கொண்டு இருந்தது. எனவே, நாட்காட்டியை மாற்றியமைக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்பட்டது.

கி.மு. 46ஆம் ஆண்டு 445 நாள்களைக் கொண்டதாக இருந்தது. அதற்குப்பின் மாதங்கள் பருவங்களுக்கு ஒத்துவருமாறு ஒழுங்கு படுத்தப்பட்டன. அப்போது ஜனவரி, ஆண்டின் முதல் மாத மாக ஆக்கப்பட்டு மற்ற மாதங்கள் பின்வருமாறு அமைக்கப் பட்டன:

ஜனவரி	31 நாள்கள்	க்வின்டிலியஸ்	31
ஃபிப்ரவரி	28	ஸெக்ஸ்டிலியஸ்	31
மார்ச்சு	31	செப்டம்பர்	30
ஏப்ரல்	30	அக்டோபர்	31
மே	31	நவம்பர்	30
ஜூன்	30	டிசம்பர்	31

கி.மு. 44-ல் க்வின்டிலியஸ் என்ற மாதத்தின் பெயர் ஜூலியஸ் மன்னனின் பெயருக்கு மாற்றியமைக்கப்பட்டது. கி.மு. 8ஆம் ஆண்டில் ஸெக்ஸ்டிலியஸ் என்னும் மாதத்தை அகஸ்டஸ் (ஜூலியஸின் மருமகன்) மன்னன் தம் பெயருக்கு மாற்றியமைக்க

முடிவு செய்தார். அகஸ்டஸ் தம் பெயரைக் கொண்ட மாதத்தையும் தம் மாமன் பெயரால் வழங்கும் ஜூலை மாதத்தைப் போலவே, 31 நாள்கள் கொண்டிருக்க வேண்டும் என்று விருப்பப் பட்டார். அதன் பிறகு லீப் வருடம் (leap year) நிறுவப்பட்டது. உண்மையான ஓர் ஆண்டின் காலம் சுமார் 365.24 நாள்கள் (அதாவது $365\frac{1}{4}$ நாள்கள் — 11.25 நிமிடங்கள்)

ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் $11\frac{1}{4}$ நிமிடங்கள் தவறு ஏற்படவே அவை சேர்ந்துகொண்டே வந்தன. எனவே, போப் கிரிகேரிக்கு (Pope Gregory XIII) -1582-ல் ஈஸ்டர் ஞாயிறு குறிப்பது இயலாத தாயிற்று. (சூரியன் மேட முதற் புள்ளியில் - first Point of Aries-வரும் நாளான மார்ச்சு 21-க்குப் பிறகு வரும் பௌர்ணமியை அடுத்து வரும் ஞாயிறு, ஈஸ்டர் ஞாயிறு ஆகும்) இதைச் சரிசெய் வதற்காகக் கத்தோலிக்க மதத் தலைவர் போப் கூறிய சில ஆலோ சனைகள் ப்ராடஸ்டன்டுகளின் (Protestants) கடும் எதிர்ப்புகளுக் குள்ளாயின.

போப் கிரிகேரியின் கருத்தையொட்டி 1752-ல் இங்கிலாந்தில் 11 நாள்கள் கணக்கில் சேர்க்காது விடப்பட்டன. செப்டம்பர் 2-க்கு பிறகு செப்டம்பர் 14 என ஆக்கப்பட்டு நாட்காட்டி வகுக்கப்பட்டது. (இது மக்களைப் பெருங்கோபத்திற்குள்ளாக் கியது. தங்கள் வாழ்நாள்களில் 11 நாள்கள் குறைந்துவிட்டன எனக் கருதி 'பதினோரு நாள்களை எங்களுக்குத் திருப்பிக் கொடுங் கள்' எனக் கூக்குரலிட்டனர்.) அதுவே, கிரிகேரியன் காலண்டர் எனப்பட்டது.

நாட்காட்டியில் ஆண்டிற்கு $365\frac{1}{4}$ நாள்கள் என்று எடுத்துக் கொண்டதால் ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் $11\frac{1}{4}$ நிமிடங்கள் பின் தங்கும். அதாவது 150 ஆண்டுகளில் நாட்காட்டி $18\frac{3}{4}$ மணி நேரம் அதிகமாகக் காட்டும். எனவே, 100ஆவது ஆண்டு லீப் ஆண்டாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுவதில்லை. இந்த ஏற்பாட்டினால் நாட் காட்டி 100 ஆண்டுகளில் $5\frac{1}{4}$ மணி நேரம் ($24-18\frac{3}{4}$) பின்தங்கும். ஆகவே, 400 ஆண்டுகட்குப்பின், நாட்காட்டி $5\frac{1}{4}\times 4=21$ மணி நேரம் (ஏறத்தாழ ஒரு நாள்) பின்தங்கும். இதை ஈடு செய்வதற் காக 400ஆம் ஆண்டு லீப் ஆண்டாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட வேண்டும். இதனால் நாட்காட்டி 400 ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை 3 மணிநேரம் அதிகமாகக்காட்டும். இதைக் கணக்கிட்ட சர் ஜான் ஹர்சல் (Sir John Herschel) என்பவர் 4000ஆவது ஆண்டு—4000 கி.பி. (பத்து 400 ஆண்டுகள்) 400ஆல் வகுக்கப்பட்டாலும் லீப் ஆண்டாகக் கணக்கிட முடியாது (நாட்காட்டி 4000 ஆண்டு களில் 30 மணி நேரம் அதிகமாகக் காட்டும்) என்றார்.

மாதங்கள் பெயரிடுதல்

பொதுவாக, அக் காலத்தில் இயற்கையை ஒட்டியே மாதங்களுக்குப் பெயரிட்டனர்.

டச்சுப் பெயர்கள் (Dutch Names)

குளிர் (chilly), தாவர வளர்ச்சி (vegetation), வசந்தம் (spring), புல் (grass), மலர் (flower), கோடை (summer), உலர்தல் (hay), அறுவடை (harvest), கூதிர் (autumn), மது (wine), குளிர்காலத்துக்காக விலங்குகளைக் கொன்று பதப்படுத்துதல் (slaughter-of animal for winter food), குளிர்காலம் (winter).

ஆங்கிலப் பெயர்கள்

வெண்பனி (snowny), நீரோட்டம் (flowy), காற்று (blowy), மழை (showery), மலர் (flowery), நிழல் (bowery), அழகு (beauty), பழங்கள் (fruity), துளிர்த்தல் (shooty), தென்றல் (breezy), தும்மல் (sneezy), பனிக்கட்டி (freezy).

ரோமானியப் பெயர்கள்

ஜனவரி: 2 முகங்களைக் கொண்ட ஜேனஸ் என்னும் கடவுளின் பெயரை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இக் கடவுள் ஒரு முகத்தால் சென்ற ஆண்டையும், இன்னொரு முகத்தால் புது ஆண்டையும் நோக்குமாம்.

ஃபிப்ரவரி : ஃபிப்ரவரி 15ஆம் நாள் கொண்டாடப்படும் ஃபெப்ருவா (Februa) என்னும் விழா ரோமானிய மத சம்பந்தமான விழாவையொட்டியது. இது ஃபிப்ரவரியில் தொடங்கும் கிறித்தவர்களுடைய நோன்பு போல், இவர்களுக்கு இது புனிதப்படுத்தும் இறை யர்ப்பணமான மாதமாகும்.

மார்ச்சு : இளமைக்கும், வசந்தத்திற்கு முரிய கடவுளாகிய செவ்வாயின் (Mars-god of youth and spring time) பெயரால் அமைக்கப்பட்டது.

ஏப்ரல் : இலத்தீன் மொழியில் (aperio) திறத்தல் எனப் பொருள்படும். மலர்களெல்லாம் இதழ்களைத் திறக்கும் பருவம் எனப் பொருள்.

மே : மேயா (Maia-Goddess of grouth and increase) என்ற வளர்ச்சிக்கும், விருத்திக்கும் காரணமான தெய்வத்தின் பெயரைக் கொண்டது.

ஜூன் : ஜீனியஸ் என்னும் ரோமானியப் பெயரைத் தழுவியது.

ஜூலை ; ஜூலியஸ் சீசரால் பெயர்பெற்றது.

ஆகஸ்டு : அகஸ்டஸ் சீசரால் பெயர்பெற்றது.

ஒவ்வொரு நாட்டின் நாட்காட்டியும் ஒரு தனிச் சிறப்போடு தொடங்கியது. ரோமானிய நாட்காட்டி அவர்கள் ரோம் நகரத்தைப் புதியதாக நிர்மாணித்ததிலிருந்து தொடங்கியது (கி.மு. 753). முகம்மதிய நாட்காட்டி முகம்மது மெக்காவிலிருந்து மெதினாவுக்கு ஓடிய (கி.பி. 622) ஆண்டிலிருந்து தொடங்கியது. இத்தாலிய நாட்காட்டி முசோலினி (Mussolini) ஆட்சிக்கு வந்த 1922ஆம் ஆண்டிலிருந்து தொடங்கியது.

அகில உலகப் பழக்கத்திலிருப்பது கிறித்தவ நாட்காட்டி (Christian Calendar). இது கிறித்துவின் பிறப்பையொட்டித் தொடங்கியது.

இந்தியா, ஜப்பான், சீனா, ரஷ்யா, துருக்கி ஆகிய நாடுகள் கிறித்தவ நாட்காட்டியைப் பின்பற்றுகின்றன.

இந்தியாவில் கிறித்தவ நாட்காட்டியுடன் 14 வகை பிற நாட்காட்டிகளும் பழக்கத்தில் இருக்கின்றன.

கணித விளையாட்டுகள்

கணிதத்தின் தனிச்சிறப்புகளில் கணித விளையாட்டும் ஒன்று. பொதுவாக, மற்றப் பாடங்களில் இதற்கொப்பான ஒரு பகுதியைக் காணுவது அரிது. மாணவர்களை மேன்மேலும் கணித விளையாட்டுகளில் ஊக்கமாக ஈடுபடச்செய்வதால் அவர்களுடைய கணித ஆர்வம் பெருகுவதற்கு வாய்ப்புண்டு. இவ் விளையாட்டுகள் மாணவர்களின் கணித அறிவை முக்கியமான அடிப்படையாகக் கொண்டவையாதலால் உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களின் தரத்திற்கேற்ப, கீழ்க்கண்ட விளையாட்டுகளைப் பள்ளி மாணவர்களுக்குக் கொடுக்கலாம்:

1. எண்ணியல் விளையாட்டுகள்.
2. வடிவியல் உருவங்கள் அமைத்தல்.
3. மாயச் சதுரங்கள்.

எண்ணியல் விளையாட்டுகள் :

(i) 99-ம் அதைச் சார்ந்த எண்களும்,
கீழே கொடுக்கப்பட்ட பெருக்கல் தொகைகளை உற்றுக் கவனிக்க :

$35 \times 99 = 3465 =$ | 35 – 1 | | 99 – 34 |

$57 \times 99 = 5643 =$ | 57 – 1 | | 99 – 56 |

$88 \times 99 = 8712 =$ | 88 – 1 | | 99 – 87 |

$99 \times 99 = 9801 =$ | 99 – 1 | | 99 – 98 |

அதாவது, பெருக்கல் தொகையில் முதல் இரண்டு இலக்கங்களும், முதல் காரணியைவிட ஒன்று குறைவு. இதை 99-லிருந்து கழித்து வருவது மூன்றும், நான்காம் இலக்கங்கள். இம் முறையை மற்ற எண்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம். உதாரணமாக,

$2 \times 99 =$ | 1 | | 98 |

$3 \times 99 =$ | 2 | | 97 |

$8 \times 99 =$ | 7 | | 92 |

$6 \times 999 =$ | 5 | | 994 |

$7 \times 99999 =$ | 6 | | 99993 |

$9 \times 999999 =$ | 8 | | 999991 |

$354 \times 999 =$ | 353 | | 646 |

(ii) பின்வரும் பெருக்கல்களைக் கவனிக்க:

$99999 \times 1 =$ | 0 | 99999

$99999 \times 2 = 199998$

$99999 \times 3 = 299997$

$99999 \times 4 = 399996$

$99999 \times 5 = 499995$

$99999 \times 6 = 599994$

$99999 \times 7 = 699993$

$99999 \times 8 = 799992$

$99999 \times 9 = 899991$

(iii)

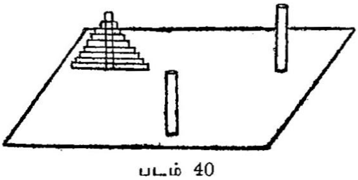
$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

(iv)

$$11 \times 11 = 1\underline{2}1$$
$$111 \times 111 = 12\underline{3}21$$
$$1111 \times 1111 = 123\underline{4}321$$
$$11111 \times 11111 = 1234\underline{5}4321$$
$$111111 \times 111111 = 12345\underline{6}54321$$
$$1111111 \times 1111111 = 123456\underline{7}654321$$
$$11111111 \times 11111111 = 1234567\underline{8}7654321$$
$$111111111 \times 111111111 = 12345678\underline{9}87654321$$

(v) பிரம்மாவின் கோபுரம் : [அல்லது கனூய் (Hanoi) கோபுரம்] இப் புதிரைக் கண்டுபிடித்தவர் 19ஆம் நூற்றுண்டில் வாழ்ந்த கிளாஸ் (Claus) என்பவராவர்.

இதில், படத்தில் காட்டப்பட்டதுபோல், ஒரு பலகையில் மூன்று முளைகள் அடிக்கப்பட்டிருக்கும். இதில் ஏதாவது ஒரு முளையில் எட்டு வளையங்கள் அடுக்கி வைக்கப்பட்டிருக்கும். படத்தில் இருப்பதுபோல், இவற்றில் மிகப் பெரிய வளையம் எல்லாவற்றிற்கும் கீழேயும், மிகச் சிறியது எல்லாவற்றிற்கும் மேலேயும் வரும்படி வரிசையாக அடைக்கப்பட்டிருக்கும். இந்த அமைப்பிற்குக் கோபுரம் என்று பெயர். இந்த வளையங்களைக் கீழ்வரும் நிபந்தனைப்படி மற்றொரு முளைக்கு மாற்றவேண்டும்.



படம் 40

நிபந்தனைகள்

1. ஒரு சமயத்தில் ஒரு வளையத்தை மட்டுமே நகர்த்தலாம்.

2. சிறிய வளையம் ஒன்று பெரிய வளையத்தின்கீழ் வரக் கூடாது.

3. மூன்று முளைகளையும் பயன்படுத்தலாம்.

தவறு செய்யாமல் மாற்றினல் இதற்குத் தேவைப்படும் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ($2^8 - 1$) அல்லது 255. இதற்குப் பிரம்மாவின் கோபுரம் என்று பெயர் வழங்குவதற்குப் பின்வரும் கதை காரணமாக இருக்கலாம். வாரணசிக் கோவிலின்கீழே பூமியின் மையத்தில் பெரியதோர் அறையில் ஒரு பித்தளைத் தகட்டில் மூன்று வைர முளைகளும் அவற்றின் ஒரு முளையில் 64 தங்க வளையங்களும் உள்ளனவாம். இவற்றை அங்குள்ள கோவில் குருக்கள், மேலே புதிரில் கூறியபடி மற்றொரு முளைக்கு மாற்றும் படி பணிக்கப்பட்டுள்ளனராம். இதற்குத் தேவைப்படும் மாற்றங் களின் எண்ணிக்கை ($2^{64} - 1$) அல்லது 18, 446744, 073709, 551615 ஆகும். தவறிழைக்காமல் ஒரு நொடிக்கு ஒரு மாற்றம் செய்தால் இதற்காகும் காலம் ($2^{64} - 1$) நொடிகள். அதாவது, தோராயமாக 50,000 கோடி ஆண்டுகள். அப்பப்பா! எத்தனை ஆண்டுகள்! இந்த வளையங்கள் முற்றுமாக மாற்றப்பட்டவுடன், கோவில், குருக்கள், வாரணசி, உலகம் எல்லாம் முடிந்துவிடும் என்று இக் கதை முடிகின்றது.

2. வடிவியல் உருவங்கள் அமைத்தல்: பன்முகப்பட்டை வடிவங்களும், பன்முகத் திண்மங்களும் அமைப்பது மாணவர் களுக்குச் சிறந்த பொழுதுபோக்கு.

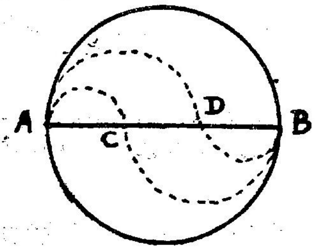
3. மாயச்சதுரங்கள் : இவை கிறித்துவ சகாப்தத்திற்கு முந்திய காலத்திலேயே சைனவில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதாக வரலாறு கூறுகின்றது. ஆயினும், ஏறத்தாழ கி.பி. 15ஆம் நூற் றுண்டில் மாஸ்கோ பூலஸ் என்பவர் இவற்றைப்பற்றிய விவரங்களை ஐரோப்பாவிற்கு எடுத்துச்சென்றதன் மூலமே இவை ஐரோப்பிய நாடுகளில் பிரபலமாயின. ரோம நாட்டு மன்னரான அகிரிப்பா என்பவர், மூன்று முதல் ஒன்பது படிகள் வரையுள்ள மாயச் சதுரங்களை அமைத்து அவற்றை வான்கோள்களின் பெயரால் வழங்கியதாகத் தெரிகின்றது. வெள்ளித் தட்டுகளில் பொறிக்கப் பட்ட மாயச் சதுரங்கள் தாயத்துப்போல் (charm) பயன்படுத்தப் பட்டதாகத் தெரிகின்றது. ஒரு வேளை இதனலேயே இவற்றை மாயச் சதுரங்கள் என்று அமைத்திருக்கலாம். முழு எண்கள் பல வற்றைப் பின்வருமாறு ஒரு செவ்வக வடிவில் அமைத்தால் அதை மாயச் சதுரம் எனலாம். அதாவது, இதில் சதுரத்திலுள்ள எண் களை இடமிருந்து வலமாகவோ மேலிருந்து கீழாகவோ அல்லது மூலைவிட்டம் வழியாகவோ கூட்டும்போது கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகைகள் சமமாயிருக்க வேண்டும். சாதாரணமாக இதில் இயல் முழு எண்களே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. n^2 எண்களைச்

சதுரவடிவில் அமைத்தால் ஒவ்வொரு வரிசையிலும், மத்தியிலும் 'n' எண்கள் இருக்கும். இதற்கு n-படி (nth order) 'மாயச் சதுரம்' என்று பெயர். இதில் வரிசை எண்களின் கூடுதல் $\frac{n(n^2+1)}{2}$. கீழே கொடுக்கப்பட்ட மாயச் சதுரங்களைக் கவனிக்கவும்.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

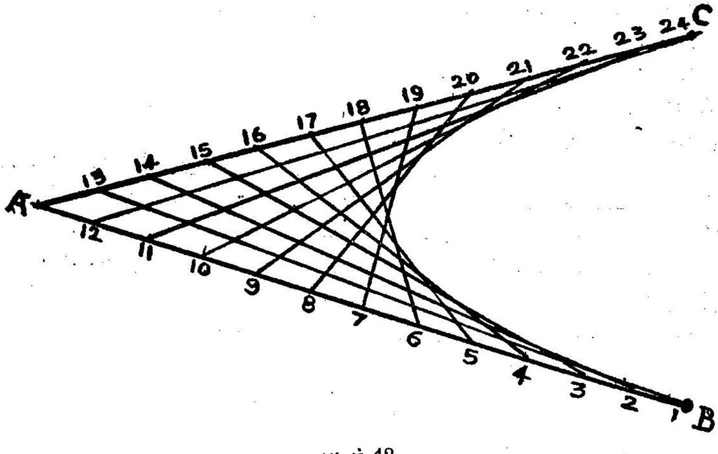
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(அ) ஒரு வட்டத்தை மூன்று சரிசமமாகப் பிரிக்க: AB என்ற விட்டத்தை மூன்று சமமாகப் பிரிக்கவும். AC = CD = DB. AB-க்கு மேல், AC, AD என்ற விட்டங்களின் மேல் அரைவட்டம் வரைக. AB-க்கு கீழ் CB, DB எனற விட்டங்களின் மேல் அரைவட்டம் வரைக. வட்டம் மூன்று சமபாகமாகப் பிரிக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 41

(ஆ) வடிவியல் வரைகள் தைத்தல் — இது மாணவர்களுக்கு விருப்பமான ஒரு பொழுதுபோக்கு:



படம் 42

AB, AC என்ற கோடுகளின் மேல் சமதூரத்தில் துவாரம் செய்க. வண்ண நூலை எடுத்துத் துவாரம் 1-லிருந்து, 13-க்கு எடுத்துச் செல்லவும். ஊசியைக் கீழே எடுத்து 14-க்கு மேல் கொண்டு வரவும். 14-யும், 2-யும் இணைத்து ஒரு தையல் போடவும். அதே போல் (3—15), (4—16) ஆகியவற்றைச் சேர்க்கவும். ஒரு பரவளைவு கிடைத்திருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

கணிதச் சோதனைச்சாலை

கணிதம் கற்பித்தலில் சோதனை முறையும் அமைந்திருப்பதால் கணிதத்திற்கான சோதனைச்சாலையும் அவசியமாகிறது. கணித வகுப்பறைகளையே சோதனைக் கூடங்களாகக் கருதலாம். இருந்த போதிலும் படங்கள் வரைவதற்கான கருவிகளும், மேசைகளும், சிறந்த கரும்பலகைகளும், சோதனைகள் செய்யத் தேவையான துணைச் சாதனங்களும் கொண்டுள்ள அறையானது சோதனை செய்வதற்கேற்றவாறு அதிக இடத்தினையும் பெற்றிருத்தல் விரும்பத்தக்கது.

துணைச் சாதனங்களும், கருவிகளும்:

1. சிறந்ததொரு நூலகம்;

2. கரும்பலகை,
வரைபடப் பலகை,
அட்டைப் பலகை,
ஒட்டுப் பலகை (plywood);

3. கணித மாதிரிகள் (கன உருவங்கள், பன்முகத்திண்மங்கள், கம்பியால் செய்யப்பட்ட கன உருவங்கள்);

4. மடக்கைப் புத்தகம், நழுவு சட்டம்;

5. நில அளவைக் கருவிகள்;

6. தராசுகள்;

7. கிளினோ மீட்டர்;

8. பான்டோ கிராப் (Panto graph);

9. தச்சன் சதுரம், சாராய மட்டம்;

10. மெக்கனோ தொகுதி;

11. வடிவ கணிதக் கருவிகளின் பெட்டி;

12. T. சட்டம்;

13. மீட்டர் நாடா;

14. படங்கள்.

(i) பல்வேறு வரலாற்றுச் சகாப்தங்களைச் சித்திரிக்கும் படங்கள்,

(ii) கணித மேதைகளின் உருவப் படங்கள். உதாரணமாக நியூட்டன், கலீலியோ, பாஸ்கல், லிப்னிட்ஸ்.

(iii) பலவிதமான வரைபடங்களும், வளைவரைகள் வரையப் படும் முறைகளும், பயனும்.

(iv) வானவியல்—பெரிய தொலைநோக்கிகளைப்பற்றிய தகவல்களும், தொலைநோக்கிகளின் பயன்களும்.

மேற்கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்படாத மற்றச் சாதனங்களை மாணவரும், ஆசிரியரும், தேவையைப் பொறுத்துச் சேர்த்துக் கொள்ளலாம். கற்பிக்கும்பொழுது கருவிகளைக்கொண்டே செய்யக்கூடிய சோதனைகளுக்கும், நிரூபணங்களுக்கும், செயல்களுக்கும் பதிலாகக் கருத்து வரைபடங்களைப் பயன்படுத்துவதைத் தவிர்க்கவேண்டும்.

கணித நூலகங்கள்

கணித அறைக்கென்று தனியானதொரு நூலகத்தை ஒதுக்குவது அவசியமாகும். அந் நூலகமானது தரமுள்ள நல்ல புத்தகங்களையும், குறிப்புப் புத்தகங்களையும், கருத்து விளக்கப் படங்களையும், மற்றும் மாணவர்க்கான பல சாதனைகளையும் கொண்டிருக்க வேண்டும். கணிதப் பாடங்களிலும் கணிதத் தொடர்பான பாடங்களிலும் அமைந்துள்ள ஓரளவு அறிமுகமான செய்திகளோடு அறிவியல் துறைகளில் அதன் நடைமுறை உபயோகங்களைக் கூறும் நூல்களையும் படிக்குமாறு மாணவர்களை ஊக்குவிக்கவேண்டும். இதனால் மாணவர்கள், கணிதம், பரந்த அளவிலே பயன்படுத்தப் படுவதைத் தெரிந்துகொள்வர்.

புத்தகங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

சிறப்பு மிக்க புது மாதிரிப் புத்தகங்களை மாணவர்களுக்குக் கிடைக்கும்படி செய்யவேண்டும். மேலும், இத்தகையதான புத்தகங்களைக் கவனித்துக் குறிப்பெடுக்க மாணவர்கள் பழக வேண்டும். இந்தக் குறிப்புகளை வகுப்பில் கூறுமாறு செய்தல்வேண்டும்.

சில சமயங்களில் அவ்வாறு குறிப்பிடுவதைக் கட்டாயமான வீட்டு வேலையாகவும் ஆசிரியர் கொடுக்கலாம்.

நூலகத்திற்குத் தேவையான சில புத்தகங்கள்

1. A brief history of Maths by Cajori
2. The Great Mathematicians — by Turnbull
3. Mathematics its magic & Mystery —Bakst
4. Mathematics for the million — Hogben
5. Books on Astronomy
6. Books on Modern Geometry
7. Books on Modern Mathematics
8. Books on Elementary Statistics

வகுப்புவேலை தொடர்பாக நடைபெறும்போது கணிதப் பொருட்காட்சிசாலை வளர வாய்ப்பிருக்கிறது. தொடக்கத்திலே பொருட்காட்சிசாலையில் ஒன்றுமே இல்லாவிடினும், ஆசிரியர்—மாணவர்கள் இணைந்த கூட்டு முயற்சியால் அதைச் சிறப்பாக்க முடியும். மாதிரிகள் (மாணவர்களால் செய்யப்பட்டதோ, அல்லது வாங்கியதோ), வெவ்வேறு வகையான வரைபடங்கள், கணித மேதைகளின் உருவப்படங்கள், கணிதப் பொதுமைக் கருத்து களைக் காட்டும் கருவிகள் முதலியவை பொருட்காட்சிசாலையில் இருக்கலாம்.

பாடக் குறிப்புகள்
(Lesson plan)

பாடக் குறிப்பின் முக்கியத்துவத்தை ஆசிரியர்கள் உணரா திருப்பது வருந்தத்தக்கதொன்றாகும். எந்தத் தொழில் செய் பவனும் ஆய்ந்து, கவனத்தோடு திட்டமிடாமல் புதிதாக ஒரு தொழிலைத் தொடங்குவதுபற்றி நினைக்கமாட்டான்; எந்தச் சட்ட நிபுணரும் வழக்கை நடத்தும் திட்டத்தைப்பற்றித் தீர ஆலோசிக்காமல் நீதிமன்றத்திற்குச் செல்லமாட்டார். இவ்வாறிருக்க, பட்டறிவு இல்லாத அல்லது சிறிதே பட்டறிவு உள்ள ஆசிரியரொருவர் தாம் கற்பிக்கும் பாடத்தைப்பற்றிய எந்த ஒரு திட்டமுமில்லாமல் எதை அடிப்படையாக வைத்துப் பாடம் நடத்தலாம் என்று சிறிதேனும் சிந்திக்காமல் பல சமயங்களில் வகுப்பறைக்குச் செல்கின்றார். பின்பு, கணக்குகளைத் தீர்க்கத் திறமையின்றியும்

கணிதத்தில் ஆர்வம் இல்லாமலும் மாணவர்கள் ஏன் இருக்கிறுர்கள் என்று அவரே வியக்கிறுர்.

பல ஆண்டுகள் அனுபவமுள்ள ஆசிரியர்களும் வகுப்பிற்குச் செல்லுமுன் பழக்கமுள்ள பாடங்களைப்பற்றி நினைப்பதற்கு அதிக நேரம் செலவழிக்கத் தயங்கமாட்டார்கள். பயிற்றுவிக்க வேண்டிய பாடப் பகுதியில் அவர்களுக்குள்ள ஆழ்ந்த அறிவையும் அனுபவத்தையும்கொண்டு பாடப்பகுதியில் சிலவற்றை மாற்றியும் சேர்க்க வேண்டியவற்றை ஆங்காங்கே சேர்த்தும் பாடப்பகுதியில் ஆர்வமூட்டுவண்ணம் செய்வார்கள்.

அனுபவமில்லாத ஆசிரியருக்குப் பாடக் குறிப்புகள் பின் வரும் காரணங்களினுல் இன்றியமையாததாய்க் கருதப்படுகின்றது.

1. பாடக் குறிப்பானது பாடச் செய்திக்குத் தொடர்பில்லாக் கருத்துகளுக்கு ஆசிரியர் செல்வதிலிருந்து தடுப்பதோடு பாடத்தின் முக்கியக் கருத்துகள் எது ஒன்றும் விடுபட்டுப்போகாமல் நன்கு திட்டமிட்ட வரிசைக் கிரமத்தில் எடுத்துக்காட்டவும் உதவுகிறது.

2. வகுப்பில் ஏற்படும் சிறு இடையூறுகளாலும், மாணவர்களின் ஒழுங்கற்ற நடவடிக்கைகளாலும், அல்லது, பொருத்தமற்ற கேள்விகளினுலும் ஏற்படக்கூடிய மன எழுச்சியான சந்தர்ப்பங்களிலும்கூட, பாடத்தைத் தொடர்ந்துநடத்துவதற்கும் பாடக் குறிப்பு அதிகப்பயன் உள்ளதாயிருக்கின்றது.

3. பாடத்தைத் திட்டமிட்டுக் குறிக்கோள்களின் அடிப்படையில் கற்பிக்கும் ஆசிரியருக்கு இந்த நல்ல பழக்கம் வகுப்பில் மட்டுமன்றி வாழ்க்கை முழுவதிலும் பெரும் பயன் தரக்கூடும்.

4. விவேகத்தோடும், கவனத்தோடும், ஓராண்டிற்குச் செய்யப்பட்ட பாடக் குறிப்புகள் வரும் பல ஆண்டுகளுக்கு ஒரு நல்ல அடிப்படையாக அமைகின்றது. புதிய பாடப் பொருள்களையும், கருத்துகளையும் இப் பாடக் குறிப்புகளில் சேர்த்தும், முக்கியத்துவம் இல்லாதவற்றை நீக்கியும் பாடக் குறிப்பை அமைப்பதால் ஒவ்வோர் ஆண்டும் புதிதாகத் தொடங்குவதனுல் ஏற்படக் கூடிய காலவிரயத்தைத் தடுப்பதோடு, ஒரே வழியில் ஆசிரியர் கற்பிக்கும் நிலையையும் தவிர்க்கலாம்.

பின்பற்றக் கூடிய (workable) பாடக் குறிப்பின் தேவைகள் வருமாறு

1. மாணவர்களின் முன்அனுபவமும், அறிவும் அடிப்படையாக அமையவேண்டும்.

2. ஆசிரியர் கூற விரும்பும் பாடக் குறிப்பாக அமையாமல் மாணவர்கள் ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடியதாக அது அமைய வேண்டும்.

3. முதலில் கற்பித்தலின் குறிக்கோளை மாணவர்களும் ஆசிரியரும் கவனிக்கவேண்டும். சிந்தனைக்குரிய எளிய புதிரின் மூலம் சிறந்த முறையில் இவற்றை அறியச்செய்யலாம்.

4. மாணவர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டும் முறையில் அன்றாட வேலையைத் தொடங்க வேண்டும்.

5. கவனத்தோடு திட்டமிடப்பட்ட பாடப் பொருள் அமைப்பே ஒரு நல்ல பாடக் குறிப்பின் சிறப்பியல்பாகும். ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய சில முக்கியமான கருத்துகளைக் குறிக்கோளாகக் கொண்டு பாடப் பொருள் அமைக்கப்படவேண்டும்.

6. பாடக் குறிப்பில் மாணவர்களின் சுய சிந்தனையையும் சொல் திறமையையும் ஊக்கப்படுத்தக்கூடிய தெளிவான சில கேள்விகள் இடம் பெறுதல் நல்லது.

7. எடுத்துக்கொண்ட தலைப்பின்கீழ் அமைந்த பாடச் செய்தியின் வளர்ச்சியை எடுத்துக்காட்டவேண்டும்; முன்பே கற்றுத் தந்த பாடச் செய்தியை யன்று.

8. அனுபவமற்ற ஆசிரியர்கள் பாடத்தில் முக்கியமற்ற பகுதிக்காக அதிக நேரம் செலவிட வாய்ப்பிருக்கிறது. நன்கு கவனித்துத் திட்டமிடுவதால் இந்தக் குறையைத் தவிர்க்கலாம்.

9. பாடத்தில் கற்றுத் தந்த கருத்துகளைப் பல்வேறு முறைகளில் பயன்படுத்த வேண்டும்.

10, பாடக்குறிப்பு பாடச் சுருக்கத்தைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும். பாடத்தின் முடிவில் இதுவரை வகுப்புக்கு என்ன நடத்தியுள்ளோம் என்று சோதிப்பதற்கு இது பயன்படும்.

பாடக் குறிப்புகளைத் தயாரிக்கும் பெரும்பாலான ஆசிரியர்கள் ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் மேற்கூறிய திட்டத்தின்படி பாடக் கருத்துகளைக் குறிக்கின்றனர். ஆனால், சிலரால் பாடக் குறிப்பை மனத்தில் நினைவில் வைத்துக்கொள்ள இயலும்; இது ஆசிரியரின் நினைவாற்றலைப் பொறுத்தது. பாடக்குறிப்பு என்பது ஆசிரியருக்கு ஒரு வழிகாட்டியே அல்லாது, அதுவே ஓர் ஊன்றுகோல் என்று நினைத்தல் கூடாது. பாட வளர்ச்சியின்போது ஆசிரியர் எதிர்பாராத புதிய சூழ்நிலையில் புதிய வினாக்கள் மாணவர்களிடம் இருந்து வருமாயின் அவற்றை விளக்குவதற்கான போதிய திறமை

உடையவராக ஆசிரியர் இருத்தல் அவசியம். இதற்குப் பாடப் பொருளில் ஆசிரியர் ஆழமான, விரிந்த அறிவுடையவராக இருத்தல் வேண்டும். பாடக் குறிப்பை அப்படியே எழுத்துக்கு எழுத்து பின்பற்றுதல் கட்டாயமன்று. சூழ்நிலைக்கு ஏற்பக் கற்பித்தல் முறையை மாற்றி அமைத்தல் வேண்டும்.

பாடக் குறிப்புகளில் வினுக்கள்

நடத்தப் போகும் பாடத்தோடு தொடர்புடைய, சிந்தனையைத் தூண்டக்கூடிய வினுக்களைக் கொண்டதாக ஒரு நல்ல பாடக் குறிப்பு விளங்கவேண்டும். சிந்திக்காமல் அமைக்கப்பட்ட தேவையற்ற பல்வேறு கேள்விகளை விட, ஆராய்ந்து அமைக்கப் பட்ட ஒரு சில கேள்விகளைக் கொண்ட பாடக் குறிப்பே சிறப் பானது. தேவைப்படும் பதிலைத் தாஞகவே வரவழைக்கும் கேள்வியே சிறந்ததொன்ருகும். இவற்றை இயல்பான கேள்விகள் எனலாம். இக் காரணத்திஞலேயே, பொதுவாக மாணவர்களிடமிருந்து எழும் கேள்விகள், ஆசிரியரால் கேட்கப்படும் கேள்விகளைவிடச் சிறப்பாக அமைந்துவிடுகின்றன.

வினவுவதின் நோக்கங்கள்

1. புதுக் கருத்துகளை உருவாக்குதல்.

2. புரிந்துகொள்ளும் தன்மையை வளர்த்தல்.

3. தெரிந்த கருத்துகளைப் பயன்படுத்துதல்.

4. காரணகாரிய அடிப்படையிலான சிந்தனையைத் தூண்டுதல்.

5. தனி மாணவனின் அல்லது வகுப்பின் தரத்தை மதிப்பிடுதல்.

6. கற்பித்ததன் குறிக்கோள்கள் கைகூடினவா என்று சோதனை செய்தல்.

வினுக்களை அமைத்தல்

1. வினுக்கள் தெளிவாகவும், திட்டவட்டமாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

2. வினுக்கள் சுருக்கமாகத் தேர்ந்தெடுத்த சொற்களைக் கொண்டிருத்தல் நல்லது.

3. மாணவர்களின் அனுபவ அறிவு எல்லைகளுக்குட்பட்ட வினுக்களையே கேட்கவேண்டும். கேள்விகளுக்கு முழுமையாக

விடையளிக்க மாணவர்களுக்குப் பயிற்சி அளிக்கவேண்டும். மாணவர்கள் விடைகளைக் குறுக்கியோ, அல்லது துண்டு துண் டாகவோ விடைகள் அளிப்பதைத் தவிர்க்கவேண்டும்.

கற்றல் செயல்முறையில், வினாவானது ஓர் ஆக்கக் கூறாக விளங்கு கிறது.

நன்கு அமைக்கப்பட்ட வினாவானது கற்பவரைச் சிந்திக்கவும். மீட்டறியவும் தூண்டுகின்றது. முன் அறிந்தவற்றைச் சோதிக் கின்றது. மேலும், ஆசிரியர் மேற்கொள்ளும் சிறந்த முயற்சிகளுக்கு ஒரு சவாலாகவும், ஆர்வத்தை எழுப்புவதாகவும் அமைகின்றது.

நல்ல பாடக்குறிப்பு, சிறந்த ஆசிரியர்களைத் தோற்றுவிக்கும்; போதனையை வளப்படுத்தும்.

நிறைவான பாடக்குறிப்பு

(1) குறிக்கோள், (2) கற்றல் அனுபவங்கள், (3) ஒப்படைகள் —இம் மூன்றையும் கொண்டதே நிறைவான பாடக் குறிப்பாகும்.

ஆசிரியரால் தயார் செய்யப்பட்ட ஒரு பாடக்குறிப்பை வேறு ஒருவர் பார்க்கும்போது, அப்பாடக் குறிப்பின் உள்ளடக்கமும், முறையும், நோக்கமும் தெளிவாகத் தெரிவதே அதன் சிறப்பாகும்.

ஒரு வகுப்புக்குக் கொடுக்கப்பட்ட கால அளவைக் கீழ்க்கண்ட வாறு பிரித்துக் கொள்ளலாம்:

வகுப்புக் காலம்

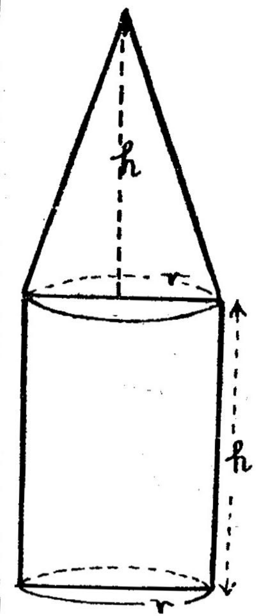
பாட வளர்ச்சிக்கான வேலை	தன்வயப்படுத்துதல்
1. புரிந்துகொள்ளுதல்	1. அறிவாற்றலை வளர்த்தல்
2. செயல் முறைகள்— திட்டமான முடிவுகளைத் தொகுத்தறிதல்	2. நிலைத்துநிற்கும் விதத்தில் பழக்குதல்
3. பொதுவிதி காணுதல்	3. முழுத் தேர்சியடையச் செய்தல்

குறிக்கோள்களை அடைவதற்கேற்றவாறு செயல்முறைகளை வரிசைக் கிரமத்தில் அமைக்கவேண்டும். அதாவது பயன் விளை விக்கக்கூடிய கற்றல் அனுபவங்களிலும், பன்முறைப் பயிற்சியிலும், மீள்நோக்குதலிலும், வீட்டுவேலை கொடுப்பதிலும், வகுப்பு நேரத்திலேயே செய்யக்கூடிய பிற சிறப்புச் செயல்களிலும் கவனம் செலுத்தவேண்டும்.

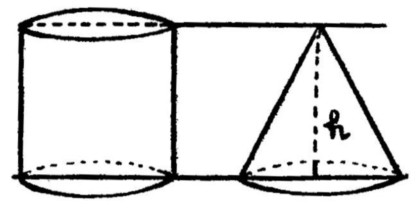
பாடக்குறிப்பு

பாடப்பகுதி Content Analysis	ஆசிரியர் செயலும், கேள்விகளும் Teacher's activity and questions	மாணவர்களிடமிருந்து எதிர்நோக்கும் விடைகள் Pupil's expected answers	துணைக்கருவிகளும் விளக்கங்களும் Aids and Illustration
	Introduction — அறிமுகம்		
உருளையின் கன அளவினைக் காணும் சூத்திரத்தை மாணவர்களின் நினைவிற்குக் கொண்டுவருதல்.	உருளையின் கன அளவைக் காணும் சூத்திரம் என்ன?	$\pi r^2 h$ கன அலகுகள்	
	(பின்) உருளை வடிவான பெட்டியை மாணவர்களுக்குக் காட்டி அவர்களுடைய வீடுகளில் ஓவல்டின், போர்ன்விடா, குவளையின் உருளை வடிவத்தைக் கவனித்திருக்கிறார்களா என வினவுவேன்.		
	டம்ளர் என்ன வடிவத்தில் உள்ளது?	அவை உருளைகள் அல்ல. ஆனால், பக்கங்கள் சரிந்திருக்கின்றன.	
ஆசிரியர், தினசரி வாழ்க்கையில் உபயோகிக்கக் கூடிய கூம்பு வடிவமான பொருள்களை மாணவர்களுக்குக் காட்டுதல்.	சில கூம்பு வடிவமான கண்ணுடி டம்ளர்களை மாணவிகளுக்குக் காட்டுவேன். கூம்பு வடிவமான ஐஸ்கிரீமைப் பற்றியும் எடுத்துக் கூறி ஒரு கூம்பினைக் காட்டுவேன். (சிறிது மணலைத் தரையில் கொட்டிக் கூம்பு வடிவமாக அமையச் செய்தல்) அடுத்ததாக ஒரு பெரிய கன உருளையைக் காட்டி அதனுடைய அடிப்பக்கத்தையும் காட்டுவேன்.		

	அடிப்பக்கத்தின் வடிவம் என்ன?	அடிப்பக்கம் வட்ட வடிவமாக உள்ளது.
	ஒரு கூம்பினைக் காட்டி அதனுடைய அடிப்பக்கத்தையும் காட்டுவேன்.	
	அடிப்பக்கம் என்ன வடிவத்தில் உள்ளது?	வட்ட வடிவத்தில் உள்ளது.
	பின் கூம்பினை உருளையின்மீது வைப்பேன். (கூம்பின் உயரமும், அடிப்பக்கமும் முறையே உருளையின் உயரத்திற்கும், அடிப்பக்கத்திற்கும் சமம்.)	கூம்பின் அடிப்பக்கமும், உருளையின் அடிப்பக்கமும் சமமாக இருக்கிறது.
	இப்பொழுது என்ன காண்கிறீர்கள்? இதிலிருந்து என்ன தெரிகிறது?	கூம்பின் ஆரமும், உருளையின் ஆரமும சமமாக இருக்கின்றன.
மாணவிகள் சாய்வு உயரத்திற்கும் செங்குத்து உயரத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டினை அறியச் செய்தல்.	உருளையின் உயரம் என்றால் என்ன?	
	உருளையின் ஒரு பக்கத்தில் உயரத்தைக் குறிக்கும் கோட்டினை வரைவேன். அதே போன்று கூம்பின் சரிவான பக்கத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து அது கூம்பின் உயரத்தைக் குறிக்கின்றதா என்று வினவுவேன்.	இல்லை, அது சரிவு உயரம்.



படம் 43

பாடப்பகுதி	ஆசிரியர் செயலும், கேள்விகளும்	மாணவர்களிடமிருந்து எதிர்நோக்கும் விடைகள்	துணைக்கருவிகளும் விளக்கங்களும்
	அப்படியானல் செங்குத்து உயரம் என்பது என்ன?	கூம்பின் உச்சியிலிருந்து, அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடே கூம்பின் செங்குத்து உயரம் ஆகும்.	
	கூம்பின் செங்குத்து உயரமே அதனுடைய உயரமாகக் குறிக்கப்படுகிறதென்பதை எடுத்துக் கூறுவேன். பிறகு அடிக் கோலை எடுத்து அதைக் கூம்பின் உச்சியிலும் உருளையின் உச்சியிலும் பொருந்தும்படி வைப்பேன்.		
	இதிலிருந்து என்ன தெரிகிறது?	கூம்பின் உயரமும், உருளையின் உயரமும் சமமாக இருக்கிறது.	படம் 44
	சமமான உயரமும், சமமான அடிப்பக்கமும் உள்ள உருளையின் கன அளவும், கூம்பின் கன அளவும் சமமா?	இல்லை.	
ஆசிரியர் தலைப்பினைக் கரும்பலகையில் எழுதுதல்.	இப்பொழுது கூம்பின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கும் சூத்திரத்தைக் காணலாம் என்று கூறி வகுப்பைத் தொடங்குதல்.		

	Presentation		
மாணவர்கள் கூம்பின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கும் சூத்திரத்தை அறியச் செய்தல்.	ஒரே அடிப்பக்கமும், உயரமும் உள்ளீடற்ற உருளையையும், உள்ளீடற்ற கூம்பினையும் எடுத்துக் கொண்டு, கூம்பினை உருளையின் மீது வைப்பேன்.		
	இப்பொழுது என்ன காண்கிறீர்கள்?	உருளையின் அடிப்பக்கமும், கூம்பின் அடிப்பக்கமும் சமம்.	
	பின் ஓர் அளவுகோலைக் கூம்பின் உச்சியிலும், உருளையின் உச்சியிலும் பொருந்தும்படி வைப்பேன்.		
	இதிலிருந்து என்ன தெரிகிறது?	இரண்டும் ஒரே உயரத்தைக் கொண்டது.	
	பின் கூம்பினை மணலால் நிரப்பி அதனை உருளைக்குள் ஊற்றுவேன்.		
	உருளை நிரம்பக் கூம்பினுல் எத்தனை முறை ஊற்றப்பட்டது?	மூன்று முறை ஊற்றப் பட்டது.	
	இதிலிருந்து அறிவது என்ன?	கூம்பின் கன அளவு $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ க. அலகுகள்.	
எடை = கன அளவு × அடர்த்தி என்ற சூத்திரத்தை மாணவிகளின் நினைவிற்குக் கொண்டுவருதல்.	மற்ருெரு சோதனையின்மூலம் மேற்கண்ட சூத்திரத்தைக் கண்டறியலாம் என்று கூறிச் சோதனையைச் செய்தல்.		

பாடப்பகுதி	ஆசிரியர் செயலும் கேள்விகளும்	மாணவர்களிடமிருந்து எதிர்நோக்கும் விடைகள்	துணைக்கருவிகளும் விளக்கங்களும்
அடர்த்தி மாருமலிருக்கும்போது எடையும், கன அளவும் நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.	ஒரு கனக் கூம்பினையும், ஒரு உருளையையும் எடுத்துக்கொண்டு முதலில் உருளையின்மீது கூம்பினையும், பின் இரண்டின் உச்சியின் மீது ஓர் அளவுகோலையும் வைப்பேன்.		
	இதிலிருந்து என்ன கண்டறியலாம்?	கூம்பும், உருளையும், சமமான அடிப்பக்கத்தையும் உயரத்தையும் கொண்டிருக்கிறது.	
	பிறகு ஒரு கைத்தராசின் ஒரு தட்டில் 2 கூம்பினையும், மற்றொரு தட்டில் உருளையையும் வைப்பேன்.		
	இப்பொழுது தராசு தட்டுகள் சமமாக உள்ளதா?	இல்லை.	
	மூன்ருவது கூம்பினையும் அதனுடன் வைப்பேன்.		
	இப்பொழுது இரு தராசு தட்டுகளும் சமமாக உள்ளதா?	ஆம்.	
	இதிலிருந்து நாம் அறிவது என்ன?	3 கூம்பின் எடை = 1 உருளையின் எடை.	3 கூம்பின் எடை = 1 உருளையின் எடை.

	கூம்பும், உருளையும் ஒரே மரத்தில் செய்யப்பட்டிருப்பதால் அவற்றின் அடர்த்தி சமமாக இருக்கும்.	எடைகள் சமமாதலால், கன அளவுகளும் சமம்.	
	எனவே, அதனுடைய கன அளவைப்பற்றி என்ன கூறலாம்?	3 கூம்பின் கன அளவு $= 1$ உருளையின் கன அளவு அல்லது 1 கூம்பின் கன அளவு.	3 கூம்பின் கன அளவு $= 1$ உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$ க. அலகுகள்
	அதனை எப்படி எழுதலாம்?	$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்.	∴ கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்
ஒழுங்கற்ற கன உருவத்தின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையை மாணவர்களின் நினைவிற்குக் கொண்டு வருதல்.	மாணவர்களுக்கு ஒரு கன உருவத்தையும், ஒரு கல்லையும் காட்டிக் கன உருவம் திடப்பொருள் என நமக்குத் தெரியும்.		
	கல் எவ்வகையைச் சார்ந்தது?	கல்லும் திடப்பொருளாகும்.	
பொருளின் கன அளவு = அதனால் இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த நீரின் கன அளவு.	கன உருவத்திற்கும், கல்லிற்கும் உள்ள வேறுபாடு என்ன?	கல் ஒழுங்கற்ற உருவம் எனப்படும்.	
	ஒழுங்கான உருவத்தின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? எப்படி?	அதனுடைய நீள, அகல, உயர அளவுகளைக் கொண்டு சூத்திரத்தை உபயோகித்துக் கன அளவினைக் கண்டுபிடிக்கலாம்	
	ஒழுங்கற்ற உருவத்தின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? எப்படி?	இடப்பெயர்ச்சி முறையின் மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம்.	

பாடப்பகுதி	ஆசிரியர் செயலும், கேள்விகளும்	மாணவர்களிடமிருந்து எதிர்நோக்கும் விடைகள்	துணைக்கருவிகளும் விளக்கங்களும்
	எனவே, இம் முறையின்மூலம் உருளையின் கன அளவினையும், கூம்பின் கன அளவினையும் கண்டுபிடிக்கும் முறையினை மாணவிகளுக்கு எடுத்துக்கூறுதல்.		
	இரு கண்ணாடி பீக்கர்களை எடுத்துக் கொண்டு அதன் விளிம்புவரை தண்ணீரால் நிரப்புவேன். பிறகு கூம்பினை ஒரு பீக்கரிலும், உருளையை மற்றொரு பீக்கரிலும் நன்றாக மூழ்கச் செய்வேன். இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த நீரினை இரண்டு வெவ்வேறான அளவு ஜாடிகளில் ஊற்றித் தண்ணீர் மட்டத்தை மாணவர்களைக் கொண்டு கண்டுபிடிக்கச் செய்வேன். உருளையினால் இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த நீரின் கன அளவு என்ன?	200 க.செ.	இரும்பால் செய்த உருளையும், கூம்பும். (ஒரே உயரம், ஒரே விட்டம்.)
	கூம்பினால் இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த தண்ணீரின் கன அளவு என்ன?	67 க. செ.	

	இவ்வாறு இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த தண்ணீர் எதைக் குறிப்பிடுகிறது?	உருளையின் கன அளவையும் கூம்பின் கன அளவையும் குறிக்கிறது.	
	இவ்விரண்டிற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன ?	$3 \times$ கூம்பின் கன அளவு = உருளையின் கன அளவு.	
	∴ கூம்பின் கன அளவு என்ன?	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்.	
	இம் மூன்று சோதனைகளிலிருந்தும் என்ன கண்டறியலாம்?	கூம்பின் கன அளவு $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்.	
கூம்பின் கன அளவு= $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள் என்பதைப் பயன் படுத்திக் கணக்கு கள் செய்யக் கற்றுக் கொள்ளுதல்.	மாதிரிக் கணக்கு ஒரு கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரம் 7 செ. மீ., உயரம் 21 செ. மீ. அதன் கன அளவு என்ன? சிறு சிறு வினக்கள்மூலம் மாணவர்களிடம் இருந்து வழிமுறையை வரவழைத்துக் கரும்பலகையில் செய்து காட்டுவேன்.		
	1. கூம்பின் கன அளவு காண உதவும் சூத்திரம் என்ன?	கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$	
	2. இதில் 'r' எதைக் குறிக்கும்?	r-ஆரம் $= 7$ செ.மீ.	
	3. இதில் 'h' எதைக் குறிக்கும்?	h-உயரம் $= 21$ செ.மீ.	

பாடப்பகுதி	ஆசிரியர் செயலும் கேள்விகளும்	மாணவர்களிடமிருந்து எதிர்நோக்கும் விடைகள்	துணைக்கருவிகளும் விளக்கங்களும்
	சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கன அளவு காண என்ன செய்ய வேண்டும்?	∴ கன அளவு $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ க. அலகுகள் $=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 21$ $=1078$ க.செ.மீ.	
	வகுப்புவேலை 8 செ. மீ. விட்டமும், 6 செ. மீ. உயரமும் உடைய ஈயக்கூம்பை உருக்கி, ஒவ்வொன்றும் 2 செ.மீ. விட்டமும், 1·5 செ.மீ. உயரமும் உடைய கூம்புகளாக எத்தனை வார்க்கலாம்?	மாணவர்கள் தங்கள் குறிப்பு ஏடுகளில் குறித்துக்கொள்ளுதல்.	
	ஆசிரியர் வகுப்பறையில் சுற்றி வந்து சந்தேகங்களைத் தீர்ப்பார்.		
	ஒப்படைப்பு கணிதப் புத்தகத்தில் உள்ள 4 கணக்குகள்.		

சுய கல்வி அமைப்பு (Programmed learning)

கல்வியின் குறிக்கோள்களெல்லாம் கைகூட வேண்டுமாயின் ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும், தகுதியும், திறமையும் வாய்ந்த ஓர் ஆசிரியர் தேவை. ஆனால், இது நடைமுறைக்கொவ்வாத கருத்தென்பது சொல்லித் தெரியவேண்டியதில்லை. மேலும், மக்கள் தொகை அதிகமான நாடுகளில் எல்லோருக்கும் கல்வி புகட்ட வேண்டிய நிலையில், வகுப்புமுறைக் கல்வியைக் காட்டிலும் சிறந்த முறை வேறு இல்லையென்றே கூறலாம்.

கல்வித் திட்டங்கள் எவ்வாறிருப்பினும், போதனை முறைகள் தனி மாணவனின் பண்பையும், திறமையையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு அமையவேண்டும் என்பதை எவரும் மறுக்க முடியாது. 'கற்பிக்கும் இயந்திரம்' (Teaching machine) இவ்வித நோக்கத்துடன் உருவாக்கப்பட்டதாகும். இம் முறையின் செயல் நுணுக்கங்களைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

கற்பிக்கும் இயந்திர முறைப் போதனையை, சுய கல்வியமைப்பு அல்லது சுய கல்விப் போதனைமுறை (self instruction) எனலாம். திட்டப்படி அமைக்கப்பட்ட பாடப் பொருளுக்கும் மாணவனுக்கும், நேர்தொடர்பு ஏற்படுத்துவதே இக் கல்வி முறையின் முக்கியக் குறிக்கோளாகும். பாடப்பொருளை, இயந்திரத்தின் மூலமாகவோ அல்லது ஏட்டின் (booklet) மூலமாகவோ விளக்கிக் காட்டிக் கற்பிக்கலாம். இவ்விதம் திட்டப்படுத்தப்பட்ட பாடப்பொருள் கீழ்க்கண்ட சிறப்புத் தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

1. இது தனி மாணவனுக்காக ஏற்படுத்தப்பட்டது (individualised). அதாவது, ஒரு சமயத்தில் ஒருவர் மட்டுமே கற்கும்படி அமைக்கப்பட்டது.

2. பாடப்பொருள் தகுந்த முறையில் பல சிறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இவ்விதமான சிறிய பகுதிகளைத் தெளிவாகவும், விரைவாகவும் கற்க முடியும்.

3. பாடப் பொருள்கள் முடிந்தமட்டிலும் தருக்கரீதியாகவும் உள இயல்புக் கேற்றவாறும் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன. அதாவது, வழிவகைகள் ஒன்றுக்கொன்று சேர்ந்து பிணைக்கப்பட்டுள்ளன.

4. மாணவர்கள் தங்கள் திறமைக்குத் தகுந்த வேகத்தில் கற்க முடிகின்றது. பொதுவாக, வகுப்பறையில் போதனை முறையும், வேகமும் சராசரி மாணவனின் (average student) திறமையை

அடிப்படையாகக்கொண்டு தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. அதற்கு மாறாக, இம் முறையில் மாணவர்கள் கற்கும் வேகம் அவர்கள் செயல் திறமையைப் பொறுத்தே அமைகின்றது.

5. கொடுக்கப்பட்ட சரியான விடையுடன் தன்னுடைய விடையை உடனுக்குடன் ஒப்பிட்டுப்பார்க்க முடிகின்றது. சரியான விடை மாணவனுக்கு மனநிறைவையும் மேலும் கற்கக்கூடிய மனநிலையையும் கொடுக்கின்றது. விடை தவறாக இருக்குமானால், போதனைப் பகுதியைத் திருப்பிப் பார்த்துத் தவற்றுக்கான காரணத்தை எளிதில் கண்டுகொள்ள இயலும்.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியைக் கவனிக்க: (IX படிவம்: அடுக்குக்குறிகளின் முதல்விதி $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

பக்கம்—1

இரண்டு, தன்னைத்தானே நான்குமுறை பெருக்குவதால் கிடைக்கும் தொகை 16. அதாவது $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$......(1)
இதேபோல் 5 தன்னைத்தானே மூன்றுமுறை பெருக்கினால் கிடைக்கும் தொகை 125. அதாவது $5 \times 5 \times 5 = 125$......(2)
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ என்பதை $2^4 = 16$ என்றும்......(3)
$5 \times 5 \times 5 = 125$ என்பதை $5^3 = 125$ என்றும் எழுதலாம்......(4)
இதேபோல் a என்ற எண்ணைத் தன்னைத்தானே 'n' முறைகள் பெருக்கினால் கிடைக்கும் தொகை $a \times a \times a \times \ldots n$ முறைகள் $= a^n$. இதில் a என்பது பீடம் அல்லது மூலம் எனப்படும்; 'n' என்பது அடுக்குக்குறி எனப்படும்.

பயிற்சி

1. கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் அடுக்குக்குறி என்ன? பீடம் என்ன?

   (அ) 4^3 (ஆ) 5^2 (இ) x^4 (ஈ) x (உ) 8^4

2. விரித்து எழுது

   (அ) 3^5 (ஆ) 7^2 (இ) x^3

சரியான விடைகள் அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பக்கம்—2

1. (அ) பீடம் 4 ; அடுக்குக்குறி 3
   (ஆ) பீடம் 5 ; அடுக்குக்குறி 2
   (இ) பீடம் x ; அடுக்குக்குறி 4

(ஈ) பீடம் x ; அடுக்குக்குறி 1

(உ) பீடம் 8 ; அடுக்குக்குறி 4

2. (அ) $3^5 = 3\times3\times3\times3\times3$

(ஆ) $7^2 = 7\times7$

(இ) $x^3 = x\times x\times x$

விடை சரியாக இல்லையென்றால் பக்கம் 5 பார்க்கவும்.

பக்கம்—5

1. அ, ஆ, இ, உ
2. அ, ஆ, இ

} முதல் பக்கத்தைத் திரும்பப் பார்.

1. ஈ : x-ஐ ஒரே தரம் பயன்படுத்துவதால் அதன் அடுக்குக் குறி 1 ஆகும்; பூச்சியம் அன்று.

பக்கம்—3

கீழே கொடுக்கப்பட்ட பெருக்கற் பலனை என்னவென்று பார்ப்போம்.

(அ) $2^3 \times 2^4$

(ஆ) $3^3 \times 3^5$

(இ) $4^4 \times 4^2$

(அ) $2^3\times2^4$ என்பதைப் பிரித்து எழுதினல்,
$(2\times2\times2) \times (2\times2\times2\times2)$ — அதாவது, இரண்டு தன்னைத்தானே ஏழுமுறை பெருக்கிக் கொள்கிறது.
ஆகவே, $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 2^{3+4}$
அதேபோல்,

(ஆ) $3^3\times3^5=(3\times3\times3) \times (3\times3\times3\times3\times3) = 3^8=3^{3+5}$

(இ) பிரித்து எழுதாமல் விடையைக் கூறவும்.

$4^4 \times 4^2 = 4^{4+2} = 4^6$, எப்படி வந்தது?

$2^7=2^4\times2^3$ என்பதில் 7ஆனது அடுக்குகள் 3,4 இவற்றின் கூட்டுத் தொகை. $3^8=3^3\times3^5$ என்பதில், 8 ஆனது அடுக்குகள் 3,5 இவற்றின் கூட்டுத்தொகை. ஆதலால் $a^m\times a^n$ என்பதன் விடை என்னவாகவிருக்கும்?

$a^m\times a^n=a^{m+n}$ இது முதலாம் அடுக்குக்குறியின் விதி.

7. மதிப்பீடும் புள்ளியியலும்

மதிப்பீட்டின் கருத்து
(Concept of Evaluation)

தேர்வுக்கும் மதிப்பீட்டிற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடுகள்

'மதிப்பீடு' மாணாக்கனது பள்ளி வாழ்க்கை முழுவதுமே தொடர்ந்து நடக்கும் ஒரு செயல் முறையாகும். பாடப்பகுதியில் மாணவர்களுடைய முன்னேற்றத்தை அளவிடுவதோடு, கல்வியின் பிற முக்கியக் குறிக்கோள்களான, ஆற்றல்கள், மனப்பான்மைகள், நற்பழக்கங்கள், அறிவியல் ஆராய்ச்சியில் ஆர்வம், பயனுள்ள செய்திறன்கள் ஆகியவற்றின் வளர்ச்சியையும் தொடர்ந்து ஆராய்ந்து, மாணவர் கற்கும் முறையையும், ஆசிரியர் கற்பிக்கும் முறையையும் திருத்திக்கொள்ள உதவுகின்றது. ஆகவே, குறிக்கோளை அடிப்படையாகக்கொண்ட போதனை முறையையும் (Objective-based instruction) மாணவர்களின் முன்னேற்றத்தைப் பற்றிய தொடர்ந்த மதிப்பீட்டையும் இது குறிக்கும். மதிப்பீட்டைப்பற்றிக் குறிப்பிடும்போது,

மதிப்பீடு = அளவீடு + மதிப்பின் திறனாய்வு
(Evaluation = measurement + value judgement)
என்று குறிப்பிடுதல் பொருந்தும்.

மேலும், தற்போது கல்வித் துறையில் மிகவும் தேவை என வற்புறுத்தப்படும் 'வழிகாட்டுதலும் அறிவுரை பகர்தலும்' (guidance and counselling) என்பதற்கு மதிப்பீடு ஓர் அடிப்படையாய் அமைந்துள்ளது. மாணவனைச் சோதித்து அவன் தகுதி இவ்வளவுதான் எனக் கூறுவதோடு முடிவது தேர்வு. ஆனால், மாணவன் இன்ன குறைகளை உணர்ந்து நீக்கிக் கொள்வானேயாகில் இவ்வாறு முன்னேற்றமடையலாம் என வழிகாட்டிவிட உதவுவது மதிப்பீடு.

தேர்வுகள் (Examinations) : 'தேர்வுகள்' கல்வி முறையில் முக்கியமான ஊக்குவிக்கும் விசையாகத் (force) தொடர்ந்து இருந்துவருகின்றன. நமது நாட்டில் கல்வி முறை பெரும்பாலும்

கடினமான கருத்துகளுக்குச் செல்லவேண்டும். திட்டங்களை இரண்டு முக்கிய வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவையாவன:

(a) போதனைத் திட்டம்,

(b) சோதனைத் திட்டம்.

(a) போதனைத் திட்டம் (learning frames): போதிக்க வேண்டிய பாடப் பொருளின் முக்கியக் கருத்துகள் செயல் முறைகள் எல்லாம் இதில் இடம்பெறவேண்டும். முக்கியமாக மாணவர் தாமாகப் படித்துப் புரிந்துகொள்ளும் விதத்தில் இவை ஒழுங்கு படுத்தப்படவேண்டும்.

(b) சோதனைத் திட்டம் (Testing frames): இது முந்திய பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட கருத்துகளை மாணவன் உண்மையாகவே இடர்ப்பாடில்லாமல் தெளிவாகப் புரிந்துகொண்டதைச் சோதிக்கும் திட்டமாகும்.

3. திட்டத்தை ஒழுங்குபடுத்தி அமைத்தல் (Editing the frames): துறைகளில் வல்லுநர்களாக இருப்போர் சேர்ந்த குழு ஒன்று, திட்டத்தை ஒழுங்குபடுத்தி அமைக்கவேண்டும்.

(அ) பாடப் பகுதியில் வல்லுநர்,

(ஆ) மற்றொரு திட்ட அமைப்பாளர்,

(இ) சிறந்த எழுத்தாளர்.

4. சோதித்தலும் திருத்தியமைத்தலும் (Tryout and revision): இப் பூர்வாங்கத் திட்டமானது முதலில் சில மாணவர்களுக்கு வழங்கப்படுகிறது. எழுதியவரால் மிக எளிமையானது எனக் கருதப்படும் படிமுறையானது கடுமையானது என நிறுவப்படலாம். அப்போது திட்டத்தினைத் தயாரித்தவர் புதிய கற்றல் திட்டங்களைச் சேர்க்கவோ, வரிசை முறையினை மாற்றியமைக்கவோ செய்தல் வேண்டும். ஒரு திட்டத்தை நிறைவேற்றுங்கால் மாணவன் செய்யும் தவறுகள், ஒரு சோதனையில் அவன் அடையும் தேர்ச்சி ஆகியவை பல்வேறு மாற்றங்களுக்கு வழிகாட்டக்கூடும். ஒரு திட்டத்தின் மூலம் நம்பகமான, சிறந்த முடிவுகள் கிட்டும்வரை அதை மீண்டும் பல முறை சோதிக்கவும் திருத்தியமைக்கவும் வேண்டும்.

5. ஒப்புக்கொள்ளக்கூடியதாக்கலும், மதிப்பிடுதலும் (Validation and Evaluation): சோதனையில் கிடைத்த தகவல்களின் மூலம் ஒரு திட்டத்தை மாற்றியமைத்தபின் மாணவர் குழுக்களுக்கு அதை வழங்கவேண்டும்.

7. மதிப்பீடும் புள்ளியியலும்

மதிப்பீட்டின் கருத்து
(Concept of Evaluation)

தேர்வுக்கும் மதிப்பீட்டிற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடுகள்

'மதிப்பீடு' மாணாக்கனது பள்ளி வாழ்க்கை முழுவதுமே தொடர்ந்து நடக்கும் ஒரு செயல் முறையாகும். பாடப்பகுதியில் மாணவர்களுடைய முன்னேற்றத்தை அளவிடுவதோடு, கல்வியின் பிற முக்கியக் குறிக்கோள்களான, ஆற்றல்கள், மனப்பான்மைகள், நற்பழக்கங்கள், அறிவியல் ஆராய்ச்சியில் ஆர்வம், பயனுள்ள செய்திறன்கள் ஆகியவற்றின் வளர்ச்சியையும் தொடர்ந்து ஆராய்ந்து, மாணவர் கற்கும் முறையையும், ஆசிரியர் கற்பிக்கும் முறையையும் திருத்திக்கொள்ள உதவுகின்றது. ஆகவே, குறிக்கோளை அடிப்படையாகக்கொண்ட போதனை முறையையும் (Objective-based instruction) மாணவர்களின் முன்னேற்றத்தைப் பற்றிய தொடர்ந்த மதிப்பீட்டையும் இது குறிக்கும். மதிப்பீட்டைப்பற்றிக் குறிப்பிடும்போது,

மதிப்பீடு = அளவீடு + மதிப்பின் திறனாய்வு
(Evaluation = measurement + value judgement)
என்று குறிப்பிடுதல் பொருந்தும்.

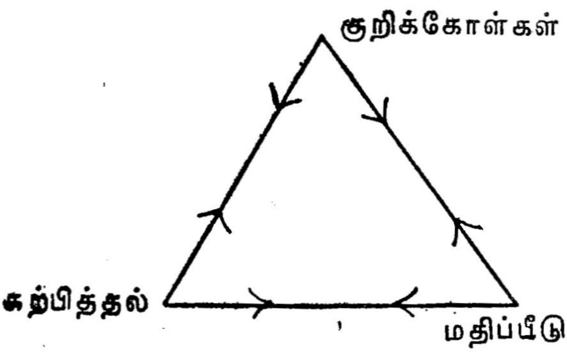
மேலும், தற்போது கல்வித் துறையில் மிகவும் தேவை என வற்புறுத்தப்படும் 'வழிகாட்டுதலும் அறிவுரை பகர்தலும்' (guidance and counselling) என்பதற்கு மதிப்பீடு ஓர் அடிப்படையாய் அமைந்துள்ளது. மாணவனைச் சோதித்து அவன் தகுதி இவ்வளவுதான் எனக் கூறுவதோடு முடிவது தேர்வு. ஆனால், மாணவன் இன்ன குறைகளை உணர்ந்து நீக்கிக் கொள்வானேயாகில் இவ்வாறு முன்னேற்றமடையலாம் என வழிகாட்டிவிட உதவுவது மதிப்பீடு.

தேர்வுகள் (Examinations) : 'தேர்வுகள்' கல்வி முறையில் முக்கியமான ஊக்குவிக்கும் விசையாகத் (force) தொடர்ந்து இருந்துவருகின்றன. நமது நாட்டில் கல்வி முறை பெரும்பாலும்

தேர்வையே அடிப்படையாகக் கொண்டிருக்கிறது, மேலும், தேர்வுகள்தாம் மாணவருக்கும் ஆசிரியருக்கும் குறியிலக்காக (target) இருந்துவருகின்றன. தேர்வில் வெற்றிபெற வேண்டும் என்பது மாணவர் குறிக்கோளாகும்; மாணவர்களின் சாதனைகளைக் கணக்கிடுவதற்கு ஆசிரியர்கள் வேறு வழிகளைப் பயன் படுத்துவதில்லை. எல்லாப் பாடங்களையும் மாணவர்கள் திருப்பிப்பார்ப்பதற்கும், கற்றலில் அவர்கள் எவ்வளவு முன்னேற்றம் அடைந்திருக்கிறார்கள் என்பதை அளந்தறிய ஆசிரியருக்கும் தேர்வுகள் உதவியாயிருக்கின்றன. ஆனாலும், 'தேர்வுகள்' மதிப்பீட்டின் ஒரு முக்கியமான கருவியே அன்றி, தேர்வுகள் மட்டுமே மதிப்பீடாகா.

குறிக்கோள்களை வகுத்தல்
(Formulation of Objectives)

கல்விச் செயலில் குறிக்கோள்கள் மையமான இடத்தைப் பெறுகின்றன எனலாம். ஏனெனில், கற்பித்தற் கருத்துகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய அடிப்படைத் தத்துவங்களை அவைதாம் நிர்ணயிக்கின்றன. கற்பித்தல் முறைகளும், தேர்வுகளும், சோதனைகளும் இவற்றை யொட்டியே அமைக்கப்படுகின்றன. இக் குறிக்கோள்களை அடிப்படையாகக்கொண்ட கற்பித்தலும் மதிப்பிடுதலுமே கல்வி சம்பந்தமான எல்லாத் திட்டங்களுக்கும், எல்லாக் கல்வி நிறுவனங்களின் செயற்பாடுகளுக்கும், முடிவெடுக்கத்தக்க

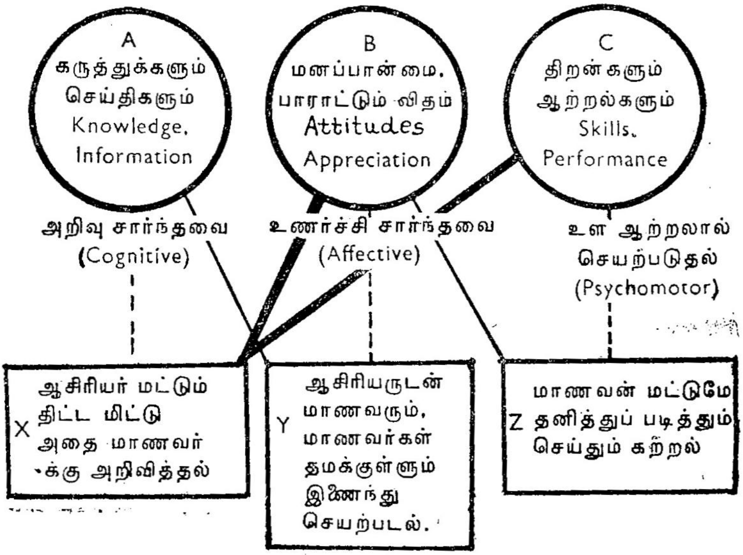


படம் 45

திருப்பங்களாக (crux) விளங்குகின்றனவெனின் மிகையல்ல. இத் தொடர்பைக் மேற்கண்ட விளக்கப் படத்தின் மூலம் காட்டலாம். கற்பிக்கும் நோக்கங்களைப்பற்றி ஓரளவு தெரிந்துகொள்ள வேண்டுமாயின், முதலாவதாக, 'கற்றலும் கற்பித்தலும்'

என்பதைக் குறிக்கும் விளக்கப்படத்தை நோக்கலாம். இப் படத்தில் A,B,C என்பன கல்வியின் பொதுப்படையான நோக்கங்களைக் குறிப்பிடுகின்றன. மூன்று வகையான கற்பித்தல் நோக்கங்கட்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை அறிய இவை பயன்படும். நோக்கங்களைத் தெளிவுபடுத்துவதில் இதுவே முதற் படியாகும்.

நடத்தையில் மாற்றங்கள்



படம் : 46

கற்றலில் மூன்று படிகள் உண்டு. அவை பின்வருமாறு:

A-கருத்துகளையும், செய்திகளையும் கற்றலும் புரிந்துகொள்ளலும் போன்றவை.

B-மனப்பான்மையும், அறிந்து பாராட்டும் விதமும்.

C-திறன்களும், செய்து முடிக்கும் ஆற்றலும்.

கற்றல்-கற்பித்தல் செயல்முறைகளை விளக்கும் மேற்கண்ட படத்தில், கற்பிக்கும் பொருளும், நோக்கங்களும் வட்டங்கள் மூலமாகவும், மாணவர், ஆசிரியர் செயல்கள் செவ்வகங்களின் மூலமாகவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு குறிக்கோளிலும் ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஆசிரியருக்கும் மாணவருக்கும் குறிப்பிட்ட பங்குண்டு. அதுபோலவே, ஒவ்வொரு நிலையிலும் கற்றல் சிறப்புற நடைபெறத் துணைக்கருவிகளும், ஏற்ற சூழ்நிலைகளும் தேவையாகும்.

கற்பித்தற் குறிக்கோள்களை யடைவதில் மனம் சம்பந்தமான சில செயல்களும் அடங்கியுள்ளன. மனத்தின் செயல்களை யொட்டிய சில கருத்துகளை இங்குக் கூறலாம். அவையாவன: கற்றல் நடைபெறும்போது கற்பித்தல் வெற்றி பெறுகிறது. கற்றல், அனுபவங்களின் வாயிலாகவே நிகழ்கின்றது. பல்வேறு புலன்களின் வாயிலாகக் கருத்துகளை ஈர்த்துக் கொள்வதே அனுபவமாகும். கருத்துகளை ஈர்த்துக்கொள்ளும்போது நம் புலன்கள் புறச் சூழல்களுக்கேற்பச் செயற்படுகின்றன. இப் புறச் சூழல்கள் மாணவர்களுடைய செயல்களாலாகியவை. மாணவர் களுடைய செயல்களாவன, படித்தல், கேட்டல், வினாத் தொடுத் தல், விடைகூறல், பிரச்சினை தீர்த்தல், வரைதல், ஒப்புமை காணு தல், பகுத்தாய்தல், விளக்கம் தருதல், கணித்தல், செய்முறைகளை உற்றுநோக்கல், பரிசோதனைகள் செய்தல், உபகரணங்களைப் பார்த்தல் போன்றனவாகும். ஆக்கத்திறன் படைத்த சிந்தனை, இச் செயல்களில் சிறப்பிடம் வகிக்கின்றது. இத்தகைய மாணவர் களுடைய செயல்களே உண்மையில் குறிக்கோள்களை அமைப்பதற் குரிய அடிப்படை நிலையாக அமைந்துள்ளன.

அன்றாட வாழ்க்கையில் எத்தனையோ பிரச்சினைகள் தோன்று கின்றன. அவற்றை நுண்ணறிவுடன் சமாளிக்க மாணவனுக்கு அறிவு, ஆற்றல், திறன் முதலியன தேவை. கற்றலினால் விளையக் கூடிய இப் பயன்களை மாணவர்கள் அடையச் செய்வதே கற்பித்த லின் முக்கிய நோக்கமாகும். மாணவனுடைய அனுபவ எல்லைக்குள் அவனுக்குப் பொருள்களைப் பகுத்தறியவும், ஒப்பிடவும், மதிப்பிட வும், முடிவு கூறவும் வாய்ப்புகள் ஏற்படுகின்றன. ஆக்க முறை யில் சிந்திப்பதில் ஒரு மாணவனுடைய முன்னேற்றமானது, அவனுடைய இயற்கையறிவை யொட்டியும், அறிவு வளர்ச்சியை யொட்டியும், அவ் வறிவு வளர்ச்சிக்காக அவன் பெறும் பல்வகை யனுபவங்களை யொட்டியும் அமைந்துள்ளது.

கற்றல், படிப்படியாக, எளிமையிலிருந்து கடின நிலைக்குச் செல்லுதல் வேண்டும். அது படிப்படியான தன்மயமாக்கும் ஒரு செயல்முறையாகும். இதில் சில கருத்துகள் ஏனையவற்றிற்கு அடிப்படையாய்த் திகழ்கின்றன. இத்தகைய சில கருத்துகளில் தெளிவு பெறாமல் ஏனையவற்றைப் புரிந்துகொள்ள இயலாது. உதாரணமாக, எண்களின் கருத்தைப் புரிந்துகொண்ட பின்னரே பின்னங்களைப்பற்றி அறியமுடியும்; தசமப் பின்னங்களைப் பற்றியும், சதவீதங்களைப்பற்றியும் அறிவதற்குப் பின்னங்களைப்பற்றிய கருத்துப் புரிந்திருக்கவேண்டும்.

கருத்துத் தெளிவு என்பது, செய்திகளை மனனம் செய்வதில் இல்லை. இது, செய்திகளை உய்த்துணர்வதிலேயே யமைந்துள்ளது. இன்னும் கூறப்போனால், இக் கருத்துத் தெளிவு, மாணவர்களுடைய செயல்களால் உண்டாக்கப்படுகின்ற ஆக்கச் சிந்தனை, அறிவு பூர்வமான விளக்கங்கள் ஆகியவற்றாலேயே விளைகின்றது எனலாம்.

கற்றலின் மற்றொரு சிறந்த பயன் கற்ற கருத்தைப் பயன் படுத்தி அன்றாட வாழ்க்கைப் பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கும் திறம் பெறு தலாகும். மாணவன், அவனுடைய பிரச்சினையையோ, சூழ்நிலை யையோ நன்கு ஆராய்ந்து அதன் உட்கிடக்கையை யறிதல் வேண்டும். பின்னர், அவற்றிற்குப் பொருத்தமான விதிகளையும் கோட்பாடுகளையும் தேர்ந்தெடுத்தல் வேண்டும். அதன் பின்னர், அப் பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான முயற்சிகளில் ஈடுபடுதல் வேண்டும்.

மேலும், கணித்தல், வடிவங்கள் வரைதல், கணித அட்டவணை களைப் பார்த்தல், வரைபடங்கள் வரைதல், அவற்றின் பொருள் விளக்கம் தருதல் முதலிய செயல் முறைகள் மாணவர்கள் வளர்த்துக்கொள்ள வேண்டிய முக்கியத் திறன்களாகும்.

ஓர் ஆசிரியர் வகுப்பறையில் பயன்படுத்தத்தக்க கற்றல் அனுபவங்களைத் தீர்மானிக்க, அவற்றால் விளையத்தக்க பயன்களை யும், அவன் பயன்படுத்தப்படப்போகும் சூழ்நிலைகளையும் மிகுந்த கவனத்துடன் ஆராய்தல் வேண்டும்.

கற்றல் அனுபவங்கள் (Learning experiences)

கற்பவருக்கும் அவர் வாழும் சமுதாயத்திற்கும் பயனுள்ள முறையில் ஒவ்வொருவரையும் மாற்றி யமைப்பதே கல்வியின் நோக்கமாகும். கற்கும் ஒவ்வொரு பாடமும் இந் நோக்கங்களையே அடிப்படையாகக்கொண்டு அமையவேண்டும். அன்றாட வாழ்க் கையில் ஏற்படும் பிரச்சினைகளில் வெற்றிகாணவேண்டிய அறிவும், திறனும், ஆற்றலும் அடையச் செய்வது கல்வியின் நோக்கமாகும். ஆகவே, ஒவ்வொரு பாடமும் என்ன குறிக்கோளுக்காக அமைந்தது என்பதை மனத்தில் கொண்டு ஆசிரியர்கள் மாணவர்களுக்கு உதவ வேண்டும். இந்த நோக்கங்களை அடைவதற்கு ஆசிரியர்கள், தெளிவுடன்,

(அ) ஒவ்வொரு பாட நிலையிலும் மாணவரிடம் என்ன எதிர் பார்க்கப்படுகின்றது என்றும்,

(ஆ) பொருத்தமான செயல்முறைகள் எவையெவை? யென்றும்,

(இ) ஒரு பாட நிலையிலிருந்து மற்றதற்கு மாறுவதற்கு மாணவர் எப்போது தயாராகிறார்கள்? என்றும் அறிய வேண்டும்.

ஆயத்தம் : பொதுவாக, ஆயத்தச் செயல் முறைகளுக்கு இரண்டு நோக்கங்கள் உண்டு. முதலாவதாக, வழிமுறைகளையும் கலைச்சொற்களையும் அறிந்துகொள்ளக்கூடிய ஆற்றலை அளிப்பது; இரண்டாவதாக, செயல் முறைகளுக்கு வேண்டிய செயல் நோக்கங்களைத் தூண்டும் ஆர்வத்திற்கான பின்னணி ஏற்படுத்துவது.

ஆய்ந்தறிதல் (Exploration) : மாணவனுக்கு, அவன் ஆர்வம் காட்டக்கூடிய பலவிதமான சந்தர்ப்பங்களிலும் அவன் கற்றுக் கொண்ட புதுக் கருத்துகளைக் காணும் வாய்ப்பை ஏற்படுத்திக் கொடுக்கவேண்டும். இப்படிப்பட்ட ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்தையும் ஆய்ந்தறிந்து கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கான தீர்வை அவ்வப்போது கண்டுகொள்ளும் ஆர்வத்தையும் வளர்க்க வேண்டும்.

எந்த ஒரு வழிமுறையையும் அறிந்து செயற்படவும், அதனை மற்ற வழிமுறைகளோடு தொடர்புபடுத்தி அறியவும் மாணவர்கள் எதிர்பார்க்கப்படுகின்றனர். கணித முறைகளை நன்கு அறிவதனால் அவர்களுடைய மனப்பான்மையும் மாறுதல் அடைகின்றது. அதிக அளவுப் பயிற்சி இல்லாமலேயே கற்க முடிகின்றது. தெரிந்த கருத்துகளை நன்கு பயன்படுத்த முடிகின்றது. இவற்றை மறவாது கவனத்தில் வைத்துக்கொள்ளவும் முடிகின்றது.

கல்வி பயனுள்ளதாக இருக்கவேண்டுமானால் அது அனுபவங்களின் அடிப்படையிலேயே அமையவேண்டும்; கருத்துகள், ஆசிரியர்களிடமிருந்து மாணவருக்கு மாற்றப்படுவதன்று. தாங்களாகவே ஆராய்ந்து அனுபவித்துப் பலவற்றிற்குப் பொது விதி கண்டு வளர்வதே உண்மையான அறிவாகும்.

திறனை உறுதிப்படுத்துதல் : தன்னியக்கமான தேர்ச்சித்திறன் வளர்வதற்கு மறுபயிற்சி மிகவும் அவசியம் என்பதற்குக் கணிதத்திலுள்ள சில செய்திறன்களே நல்ல உதாரணங்களாகும்.

பயன் முறைகள் : கணிப்பு முறைகளை அறிந்து தேர்ச்சியும் பெறுவது எவ்வளவு முக்கியமோ அவ்வளவு முக்கியம், தேவையானபோது புதிய சந்தர்ப்பங்களில் கணித முறைகளைப் பயன்

படுத்தும் திறமையை வளர்த்துக்கொள்ளுதலும் ஆகும். ஒரு விதத்தில், இதுவே கணிதம் கற்பதன் தலையாய :பயன் என்றே கூறலாம். ஏனெனில், சமுதாய வாழ்க்கைக்குக் கணக்கின் இன்றி யமையாமையே, அதைப் பாடத்திட்டத்தில் சேர்த்திருப்பதன் முக்கிய நோக்கமாகும்.

மாணவர்கள் பல்வேறு செயல்களில் ஈடுபட்டு அவற்றின் விளைவாகப் பல அனுபவங்களைப் பெறுவதன் மூலம்தான் சிறந்த கல்வி வளர்ச்சிபெறவியலும் என்பதை மறுக்க முடியாது. விளை யாட்டு முறைகள், செயல்திட்ட முறைகள், சோதனைச்சாலை முறைகள், கண்டறிமுறை போன்ற செயல்களின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ள புதிய கற்பித்தல் முறைகள் யாவுமே இக் கோட் பாட்டினை மையமாகக்கொண்டு அமைந்தவைதாம்.

குறிக்கோள் : குறிப்பிட்ட ஒரு பாடத்தைக் கற்பிப்பதற்குக் காரணமான திட்டமிடப்பட்ட சிறந்த நோக்கங்களையே நாம் குறிக்கோள் என்போம். கற்பிப்பதை மட்டுமன்றி, மாணவர் களின் அறிவுச் சாதனைகளைச் சோதிப்பதையும் இத் தலைப்பின்கீழ்க் குறிப்பிடலாம். கல்வியின் விளைவாக மாணவர்களிடம் ஏற்படும் வெளிப்படையான மாறுதல்களையும் இதில் சேர்த்துக்கொள்வோ மாயின், குறிக்கோள் என்பதன் முழுப்பொருளும் தெளிவாகும். இவற்றைப் பொதுவாக, குறிக்கோளின் சிறப்பு நோக்கங்கள் எனலாம்.

கணிதம் கற்பிப்பதன் குறிக்கோள்கள்

1. அறிவாற்றல் (Knowledge): உயர்நிலைப் பள்ளிக் கணிதப் பாடத்தில் மாணவர்கள் கலைச்சொற்றொடர்களையும், கருத்து களையும், வரைவிலக்கணங்களையும் (definitions), தத்துவங்கள், செய்முறைகள், சூத்திரங்கள் முதலியவற்றைப்பற்றியும் அறிகிறார் கள்.

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) கற்றவற்றை நினைவூட்டுதல்,

(ஆ) கற்றவற்றைக் கண்டுணர்தல்.

2. பொருளுணர்வாற்றல் (Understanding): கணிதப் பாடத் தின் சொற்றொடர்களையும் அவற்றின் கருத்துகளையும், வரை விலக்கணங்களையும், செய்முறைகளையும் சூத்திரங்களையும்பற்றிய அறிவை மாணவர்கள் வளர்த்தல், இரண்டாம் நிலையாகும்.

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுத்தல்;

(ஆ) தவறுகளைக் கண்டுபிடித்துச் சரிசெய்தல்;

(இ) ஒப்புநோக்குதல்;

(ஈ) நெருங்கிய தொடர்புடைய கருத்துகளின் வேறுபாடுகளைக் கண்டறிதல்;

(உ) கருத்துகளைத் தத்துவமுறைப்படி பாகுபாடுசெய்தல்;

(ஊ) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் தொடர்பைக் காணல்;

(எ) சொல்வகை விவரங்களைக் குறியீட்டு வடிவில் அமைத்தல்; குறியீடுகளைக் கருத்துவடிவில் மாற்றியமைத்தல்;

(ஏ) முடிவை மதிப்பிடுதல்.

3. செயலாற்றல் (Application): அறிவாற்றலையும், பொருளுணர்வாற்றலையும், புதிய சூழ்நிலைகளுக்குப் பயன்படுத்துதல்.

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) கொடுக்கப்பட்டது என்ன, தேவையானது என்ன என்று அறிதல்;

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் போதுமானவையா, தேவைக்கு அதிகமானவையா என்று அறிதல்;

(இ) விவரங்களின் தொடர்புகளை நிலைநாட்டல்;

(ஈ) கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலைப் பொருத்தமான முறையில் தீர்வுசெய்து விடைகாணல்;

(உ) முடிந்தால் மாற்றுமுறைகளைக் கூறுதல்;

(ஊ) விதிவருமுறையினுல் பெறப்பட்ட பொதுக்கருத்தைத் தருதல் (reasons inductively);

(எ) விதிவிளக்க முறையினுல் உய்த்துணருதல் (reasons deductively).

4. திறமை (Skill): மாணவர்கள் கீழ்க்கண்ட திறமைகளைப் பெறவேண்டும்.

(அ) கணித்தல்;

(ஆ) வடிவியல், வரைபடங்கள் வரைதல்;

(இ) அட்டவணைகள், விவர விளக்கப்படங்கள் அல்லது கருத்துப்படங்கள் (charts), வரைபடங்கள் ஆகிய வற்றின் விளக்கம் அறிதல்.

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) மனக் கணக்கு, எழுதிக்கணிக்கும் கணக்குகளில் வேகமும், நயமும்.

(ஆ) சிறப்பு நோக்கம்

(i) வடிவியல் கருவிகளைத் திறமையுடனும் எளிமையுட னும் கையாளுதல்;

(ii) துல்லியமாக அளத்தல்;

(iii) கருவியின்றி எளிதாக வடிவங்கள் வரைதல்;

(iv) அளவுத்திட்டப்படி வடிவங்கள் நுட்பமாகவும் எளி மையாகவும் வரைதல்.

(இ) சிறப்பு நோக்கம்

(i) அட்டவணையை வேகமாகவும், சரியாகவும் பயன் படுத்துதல்;

(ii) வரைபடங்களை விளக்குதல்.

5. உணர்ந்து பாராட்டுதல்: அன்றாட வாழ்க்கையில் கணிதத் தின் பங்கை மாணவர் உணர்ந்து பாராட்டுதல்.

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) மற்றக் கணித அடிப்படைப் பாடங்களில் உள்ள சிக்கல் களை விடுவிப்பதற்குக் கணிதம் பயன்படுவதை உணர்தல்;

(ஆ) உருவங்களின் சமச் சீர்நிலையையும், உருவமைப்பையும் அறிதல்;

(இ) கணிதச் செயல் முறைப் பழக்கத்தினால், எந்தக் காரியத் தையும், சுருக்கமாகவும், சரியாகவும் செய்யும் பண்பு வளர்வதை உணர்தல்.

6. மாணவர் கணிதத்தை விரும்பிக் கற்றல்

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) கணித சம்பந்தமான நூல்களைக் கற்றல்;

(ஆ) கணிதம் சம்பந்தப்பட்ட பொதுக் கட்டுரைகள் பள்ளியின் ஆண்டு இதழுக்கு எழுதுதல்;

(இ) புதிர்க் கணக்குகளை (Puzzles) விடுவித்தல்;

(ஈ) கணிதக் கழகத்தின் நடவடிக்கைகளில் பங்கு கொள்ளுதல்;

(உ) சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதில் சுருக்க முறைகளைக் கையாளுதல்;

(ஊ) வகுப்பு நிலைக்கு அப்பாற்பட்ட கணித முறைகளைக் கற்றல்;

(எ) பாடத் திட்டத்தில் இல்லாத கணிதச் சிக்கல்களை ஆசிரியரிடம் கேட்டு அறிந்துகொள்ளுதல்.

7. ஆராய்ச்சி மனப்பான்மை: கணிதம் கற்பதால் மாணவர்களின் ஆராய்ச்சி மனநிலை விருத்தியாகின்றது.

சிறப்பு நோக்கம்

(அ) கணிதக் கருத்துகளைத் தருக்க முறைப்படி நிரூபித்த பின்னரே ஒப்புக்கொள்ளுதல்;

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலின் பலவிதப் பண்புக் கூறுகளையும் சோதித்துப்பார்த்தல்;

(இ) பிழை கண்ட இடத்தில் தன்னம்பிக்கையுடன் சுட்டிக் காட்டுதல்;

(ஈ) அதுபோல், தன் பிழைகளையும் துணிவுடன் ஒப்புக் கொள்ளுதல்;

(உ) தன்னுடைய தீர்வுகளையே ஆய்ந்தறிதல்;

(ஊ) விதி முறைகளிலிருந்து வழுவாது செயற்படல்.

மதிப்பீட்டுக் கருவிகள்

பள்ளியில், மாணவர்களின் சாதனைத் தரத்தை மதிப்பீட்டு முறைகள் மூலமாக மட்டுமே அறியமுடியும். மாணவரின் திறமையில் ஏற்படும் உண்மையான முன்னேற்றத்தைக் குறிப்பிட்ட ஒரு முறையினுல் மட்டுமே அளந்தறிய முடியாது. மதிப்பீட்டு முறையில் மாணவனின் தனிப் பண்புகளை அறிந்து பதிவு செய்வதற்குத் தனிக் 'கருவி'களைப் பயன்படுத்துகிறோம். கீழே கொடுக்கப்பட்ட கருவிகள் சிலவற்றின் தொகுதியினுல் மாணவர்களை ஓரளவுக்கு முழுமையாக மதிப்பிட முடியும்.

1. கவனிப்பு முறை: இதனை ஒரு கருவி யென்று கூறுவிடினும், மதிப்பீட்டு முறைக்கு இஃது ஓர் அடிப்படைத் தேவையென்று கூற

லாம். தனிப்பட்ட ஒரு மாணவனையோ அல்லது ஒரு வகுப்பையோ நேரில் மேற்பார்வையிடுவதன் மூலம் அம் மாணவனின் அல்லது வகுப்பின் செயல்முறையைக் கூர்ந்து ஆய்வதைக் கவனிப்புமுறை என்று கூறலாம். முழுவதும் நம்பத் தகுந்தது என்று இம் முறையைக் கூறமுடியாதாயினும், கீழ்க்கண்ட சில அதிகப்படியான கருவிகளினால் இம் முறையைச் சிறந்ததும் நம்பத் தகுந்ததுமாகச் செய்யலாம்.

1. சரிபார்க்கும் பட்டியல் (Check list).
2. வகைப்படுத்தும் அளவுகோல் (Rating scale).
3. நிகழ்ச்சிக் குறிப்பேடு (Anecdotal record).
4. திரள் பதிவேடு (Cumulative record).
5. சோதனைகளும் தேர்வுகளும் (Tests and examinations).
   (அ) எழுத்துமுறைத் தேர்வு;
   (ஆ) வாய்மொழிச் சோதனை;
   (இ) செயல்முறைச் சோதனை.

1. சரிபார்க்கும் பட்டியல்: அவ்வப்போது மாணவர்களின் நடத்தையில் ஏற்படும் குறிப்பிடத்தக்க நிகழ்ச்சிகளை மறந்து போகாதவாறு பட்டியல்படுத்தி வைத்துக்கொள்ள உதவும் சாதனம் இவ் வெளிய கருவி. ஆகவே, இப் பட்டியல்கள் பாடத்திற்குப் பாடம், ஆசிரியருக்கு ஆசிரியர் மாறுபட்டிருக்கலாம். ஆயினும், தனி ஒரு மாணவனின் எல்லாவிதத் தேர்ச்சிப் பேறுகளையும் குறிக்கும் விதத்தில் இது அமையவேண்டும். கணிதப் பாடத்தில் ஒரு மாணவனின் வளர்ச்சியை மதிப்பிடும்படி தயார் செய்யப்பட்ட ஒரு பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

பள்ளியின் பெயர்: ஆண்டு:
ஆசிரியர்: வகுப்பு:
மாணவன்:

தோற்றக் கூறு (Traits)

(அ) வேலைசெய்யும் பழக்கம்:
   (i) கொடுக்கப்பட்ட வேலையைச் செய்துமுடித்தல்;
   (ii) தொடர்ந்து தூண்டுதல் தேவை;
   (iii) சிறு தடங்கல் வரினும் நம்பிக்கையிழத்தல்;
   (iv) எந்த வேலையையும் சரிவர முடிப்பதில்லை.

(ஆ) கணிக்கும் திறமை:

(i) வேகமாயும் தவருகவும் செய்தல்;

(ii) மெதுவாகவும் சரியாகவும் செய்தல்;

(iii) வேகமாகவும் சரியாகவும் செய்தல்.

(இ) வரைதலின் திறமை:

(i) கோடுகளையும், கோணங்களையும் நேர்த்தியாக வரைந்து துல்லியமாக அளக்கும் திறமை;

(ii) வரைவதிலும் அளப்பதிலும் அசட்டை மனப் பான்மை;

(iii) வடிவியல் கருவிகளை எளிமையுடன் கையாளுதல்.

(ஈ) ஆசிரியரின் பொதுக்கருத்துக் குறிப்பு.

2. வகைப்படுத்தும் அளவுகோல்: தனிச் சிறப்பியல்புகளை அளப்பதற்குச் சரிபார்க்கும் பட்டியலைக் காட்டிலும் சிறிது மேம் பட்ட மதிப்பீட்டு முறையாக, வகைப்படுத்தி அளக்கும் ஐந்துபடிப் பாகுபாட்டு முறையைக் குறிப்பிடலாம்.

ஒவ்வொரு தனிப் பண்பைப்பற்றியும் ஆசிரியர் தம் கருத்தை அதற்காக ஒதுக்கப்பட்ட இடத்தில் தகுந்த எண்ணுல் குறிக்க வேண்டும். இதற்கான அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	பண்பு	மதிப்பெண் (மொத்தம் 5)				
1.	வேலை செய்யும் பழக்கம்	1	2	3	[4]	5
2.	கணக்கிடும் திறமை	1	[2]	3	4	5
3.	வடிவம் வரையும் திறமை	1	2	3	4	[5]
4.	புதிர்களை முறைப்படி விடுவித்தல்	1	2	[3]	4	5

ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் மொத்த மதிப்பெண்களைக் கண்டு பிடித்துப் பின்வருமாறு தரப்படுத்த வேண்டும்.

(1) மிக நன்று—A; (2) நன்று—B: (3) திருப்தி—C; (4) சுமார்—D; (5) மந்தம்—F,

இக் கணிப்புப் பட்டியலே மாணவர் பார்த்துத் தங்களுடைய செயலாற்றலில் காணப்படும் குறை நிறைகளை அறியும்படி செய்யலாம்.

3. நிகழ்ச்சிக் குறிப்பேடு: மாணவர்களைப்பற்றி ஆசிரியர் கவனத்திற்குக் கொண்டுவரப்பட்ட உண்மை நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பு என்று இதைக் கூறலாம். நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கும் போது, தன்னுடைய விளக்கம் அல்லது சொந்தக் கருத்துகளை ஆசிரியர் தவிர்க்க வேண்டும். (தனிப்பட்ட முறையில் ஆசிரியர் தம்முடைய விளக்கத்தைக் குறித்து வைத்துக்கொள்ளலாம்.)

மேற்கூறப்பட்ட முறைகளின் உதவியால் மாணவர்களின் கல்வி சம்பந்தமான செயல் திறமைகளை மட்டுமன்றி, அவர்களுடைய நோக்கங்கள், பழக்கவழக்கங்கள், விருப்பு வெறுப்புகள், மனப்போக்கு முதலியவற்றையும் அறியலாம்.

4. திரள் பதிவேடு: ஒவ்வொரு மாணவனைப்பற்றியும் மதிப்பீட்டு முறையினுல் சேகரிக்கப்பட்ட முக்கியமான பண்புகள் அனைத்தையும் முறைப்படுத்தித் தயாரித்த செய்திக் குறிப்பைத் திரள் பதிவேடு எனலாம். இவ்விதமாக, மாணவர்களின் கல்வி முன்னேற்றம், பாடத்திலுள்ள ஆர்வம், தனித் திறமைகள் முதலியவற்றைக் குறித்து வைத்திருக்கும் இக் குறிப்பேட்டின்மூலமாக, தனித்தனியே, ஒவ்வொரு மாணவனைப்பற்றியும் எப்போது வேண்டுமாயினும் அறிந்துகொள்ளலாம்.

5. சோதனைகளும், தேர்வுகளும்: கல்வி முறையை, கற்பித்தல், கற்றல், மதிப்பீடு என்று மூன்று பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். மதிப்பீடு, மாணவர்களின் தேர்ச்சியை மட்டுமன்றி, ஆசிரியரின் போதனைத் திறமையையும் மறைமுகமாகக் குறிப்பிடுகின்றது.

சோதனையும், மதிப்பீடும் போதனையின் மிக நெருங்கிய ஒன்றுக்கொன்று இணைந்த உறுப்புகளாகும். 'கற்றுக்கொடு—சோதித்தறி—கற்றுக்கொடு' (Teach—test—teach) என்பது ஓர் ஆங்கிலக்கூற்று. ஒவ்வொரு பகுதியும், கற்றுக்கொடுக்கப்பட்டபின் சோதிக்கப்படவேண்டியதன் அவசியத்தை இது குறிப்பிடுகின்றது. மேலும், சோதனை ஒரு முடிவுறாத செயல் முறையாகும். ஆண்டின் முடிவில்தான் சோதனைகள் நடத்த வேண்டும் என்பது மிகப் பழைய கோட்பாடு. கணிதக் கருத்துகள் தருக்க முறையில், படிப்படியாய் வளர்வன. அதாவது, ஒவ்வொரு தலைப்பின்கீழ் வரும் கருத்துகளையும் சரிவரப் புரிந்துகொள்ளாவிடில் அடுத்து வரும் கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்ள இயலாது. ஆகவே,

சோதனைமுறையானது, கற்பித்தல், கற்றலோடு ஒன்றுபட்ட ஒரு செயலாகும்.

பண்டைக் காலச் சோதனை முறைகளில் முடிவான விடைகளே கவனிக்கப்பட்டன. இடைப்பட்ட படிகள் கவனிக்கப்படவில்லை. ஆகவே, சரியான விடைகளுக்கு முழு மதிப்பெண்களும் சரியில்லாத விடைகளுக்கு வெறும் பூச்சியமும் கொடுக்கப்பட்டு வந்தன. மேலும், பழைய முறையில் சோதனைக் கணக்குகள் நீண்ட புதிர்க் கணக்குகளாயிருந்தன. ஆகவே, அவற்றின் எண்ணிக்கை மிகக் குறைவாயிருந்தது. இக் காரணத்தால் வகுப்புப் பாடத் திட்டம் முழுவதையும் வினாக்கள் தழுவுவதில்லை. ஒரு சில மாணவருக்குப் பாதிக் கணக்கு மட்டும் புரிந்திருந்து மீதி புரியாமல் இருந்தால் அவர்களுக்கு மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்படுவதில்லை.

ஆகவே, புது முறைச் சோதனைகள் மூலம் இக் குறைகளை நீக்க முயற்சி செய்யப்படுகின்றது. புதிய முறையில் விடைகளை மட்டும் பார்த்து மதிப்பெண் கொடுக்கப்படுவதில்லை. விடை சரியில்லாவிடினும் தருக்க முறை சரியாக இருந்தால் அதற்குரிய மதிப்பெண் அளிக்கப்படுகின்றது. இம் முறையில், பற்பல ஆற்றல்களான அறிவாற்றல், பொருளுணர்வாற்றல், செயலாற்றல், திறமை, மனப்பான்மை, பகுத்தறியும் ஆற்றல் முதலியவற்றை வினாக்கள் மூலம் அளவிடும் விதத்தில் மதிப்பெண்கள் ஒதுக்கப்படுகின்றன.

உதாரணமாக, ஒருறுப்புப் பெருக்கலை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இயற்கணிதத்தில் இது ஓர் எளிய அடிப்படைச் செயல் முறையாகும். இதில் மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெறுவது மிகவும் அவசியம்.

பெருக்கற்பலன் காண்க: $(-12\, m^5 r^2)\ (-7mr^4)$

இப் பெருக்கலில் மூன்று படிகள் இருக்கின்றன.

(அ) பெருக்கற் பலனின் குறியைத் தீர்மானித்தல்;

(ஆ) எண்களைப் பெருக்குதல்;

(இ) எழுத்துச் சார்ந்த பெருக்கலைச் செய்தல்.

சரியான விடைக்கு மதிப்பெண்: 3

இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பிரிக்கலாம்.

(அ) + குறி: மதிப்பெண்: 1

(ஆ) எண்களின் பெருக்கல்: 84. மதிப்பெண்: 1

(இ) எழுத்துகளின் பெருக்கல்: $m^6 r^6$. மதிப்பெண்: 1

புதுவிதச் சோதனைமுறைகள் பல நோக்கங்கள் ஈடேற உதவுகின்றன

அவையாவன,

1. திறமைச் சோதனை (ability test).
2. முன்னறி சோதனை (inventory test).
3. பயிற்சிச் சோதனை (practice test).
4. அடைவுச் சோதனை (achievment test).
5. குறையறி சோதனை (diagnostic test).

1. திறமைச் சோதனை: உயர்நிலைப்பள்ளி யளவில் கணிதம் கற்பதற்கு வேண்டிய திறமை மாணவனிடம் இருக்கின்றதா என்பதைக் கண்டறிவதே இச் சோதனையின் முக்கிய நோக்கமாகும். இதைப் பின்வருமாறு பாகுபடுத்தலாம். (அ) வழி காட்டுதல்: மாணவனின் திறமையை அறிந்து மேலே அவன் என்ன படிக்கலாம் என்று வழிகாட்டுதல். (ஆ) மிகத் திறமையுள்ள மாணவர்களையும் மிக மந்தமான மாணவர்களையும் கண்டுகொள்ளலாம்.

குறிப்பிட்ட ஓர் ஆற்றல் வெற்றிக்கு மிக முக்கியம் என்றாலும், அந்த ஓர் ஆற்றல் மட்டிலுமே போதுமானது என்று கூற முடியாது. நுண்ணறிவு, உழைப்பு, மனப்பான்மை வீட்டுச் சூழ்நிலை போன்றவற்றையும் கவனிக்கவேண்டும்.

2. முன்னறி சோதனை: மாணவர்களின் முன்னறிவையும் குறைபாடுகளையும் எளிதில் கண்டுகொள்ள இச் சோதனை பயன்படுகின்றது. சாதாரணமாக, இவற்றை அறிய ஆசிரியருக்குச் சில மாதங்கள் பிடிக்கலாம். ஆதலால், ஏதாவது ஒரு பாடப்பகுதியில் மாணவர்களின் திறனுற்றலையும், கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தும் விதத்தையும் அறியுமாறு ஆசிரியர் ஒரு சோதனை புனைந்து வழங்கவேண்டும். இச் சோதனையின் முடிவுகளை ஆதாரமாகக்கொண்டு குறை நீக்கும் போதனைகளை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

3. பயிற்சிச் சோதனை: பல கணிதச் செயல் முறைகளில் மாணவருக்கு மிகுந்த தேர்ச்சி அவசியம். இவ்வித முறைகளை வகுப்பில் கற்பித்த பின்னர் இவற்றில் நல்ல பழக்கமும் தேர்ச்சியும் உண்டாகும்படி பயிற்சிச் சோதனை கொடுக்கவேண்டும். சோதனையைக் குறிப்பிட்ட நேரத்திற்குள் செய்யும்படி பழக்க வேண்டும். வேகமாகச் செய்யவேண்டும் என்பதைக் காட்டிலும் குறிப்பிட்ட நேரத்திற்குள் எவ்வளவு எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது என்பதே முக்கியம்.

4. அடைவுச் சோதனை : ஒரு பாடப் பகுதியைக் கற்றபின் அதில் எந்த அளவிற்கு மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெற்றிருக்கிறார்கள் என்று சோதித்தறிவதற்கு அடைவுச் சோதனை என்று பெயர். பொதுவாக, பள்ளிகளில் வாரந்தோறும் அல்லது மாதந்தோறும் நடத்தும் சோதனைகளை இதற்கு ஈடாகக் கூறலாம். இந்தச் சோதனை முறையைப் பயன்படுத்தி மாணவர்களின் மதிப்பெண் களைக் கணிக்கலாம்; அவற்றின் அடிப்படையில் மாணவர்களை மேல்வகுப்பிற்கு அனுப்புவதா அல்லது பின்தங்கச் செய்வதா என்று தீர்மானிக்கலாம்; இவற்றைப் பயன்படுத்தியும் மாணவர் களைத் தரம் பிரிக்கலாம்.

5. குறையறி சோதனை : கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்வதில் மாணவர்களுக்கு ஏற்படும் இடர்ப்பாடுகளை அறிந்துகொள்வதே இச் சோதனையின் முக்கிய நோக்கமாகும். இவற்றை அறிந்து குறிப்பிட்டு இவற்றை நீக்குவதற்கான வழிகளைப் பயன்படுத்து வது ஆசிரியர் கடமையாகும்; தேவையானால், தாம் கற்பிக்கும் முறையைக்கூட மாற்றியமைத்துக் கொள்ளவும் ஆசிரியர் தயங்கக் கூடாது. இச் சோதனையைக் கொடுத்த பின்னர் மாணவர்களின் விடைத் தாள்களைத் திருத்திக் கீழ்க்கண்டவாறு ஒரு பகுப்பாய்வு அட்டவணை (analysis chart) தயாரிக்கவேண்டும்.

பகுப்பாய்வு மாதிரி அட்டவணை

	மாணவர்கள்	கேள்விகளின் இலக்கங்கள்								கிடைத்த மதிப்பெண்
		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	A	✓	×	×	×	✓	✓	✓	✓	5
2	B	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	4
3	C	✓	×	✓	✓	×	×	×	×	3
4	D	✓	✓	×	×	×	×	×	×	2
5	E	✓	✓	×	✓	✓	✓	×	×	5
6	F	✓	✓	×	✓	✓	✓	×	×	5
சரியான விடை அளித்தவர்களின் எண்ணிக்கை		6	4	2	4	3	3	1	1	24 / 24

பகுப்பாய்வு அட்டவணையின் அடி வரிசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள், வினாக்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் எத்தனை மாணவர்கள் சரியான விடை கொடுத்திருக்கிறார்கள் என்பதையும் கடைசிப் பத்தியில் கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் ஒவ்வொரு மாணவனின் மதிப்பெண்ணையும் குறிக்கும்.

(அ) மாணவர் மதிப்பெண்களின் சராசரி (average score, pupil-wise) $\left.\right\} \frac{24}{4} = 4$

(ஆ) வினாக்களுக்கான மதிப்பெண்களின் சராசரி (average score, item-wise) $\left.\right\} \frac{24}{8} = 3$

முடிவுகள் (அட்டவணையிலிருந்து)

1. ஒரு மாணவன்கூட எல்லா வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவில்லை.

2. வினாக்கள் 7, 8 இரண்டிற்கும் ஒரே ஒரு மாணவனே விடையளித்துள்ளான். (இது சராசரியான 3-ஐ விடக் குறைந்தது) இப் பகுதியைத் திரும்பவும் கற்பிக்கவேண்டும்.

3. மாணவர் C, D இருவரையும் தனிப்பட்ட முறையில் கவனிக்கவேண்டும்.

முடிவுகள் (விடைத்தாள்களிலிருந்து)

1. மாணவன் B, அதிவேகமாகவும் தவறாகவும் செய்வதாகத் தெரிகின்றது. நிதானமாகச் செய்யக் கற்றுக்கொள்ள வேண்டும்.

2. மாணவன் A-க்கு வாய்பாடுகளில் தேர்ச்சியில்லை; மனப்பாடம் தேவை.

3. மாணவன் F, தவறான வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தியிருக்கிறான்; திருத்திக்கொள்ள வேண்டும்.

4. மாணவன் E, கடைசி இரண்டு வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவில்லை. மெதுவாகக் கணக்குகளைச் செய்வதாகத் தெரிகின்றது. பயிற்சி தேவை.

குறிப்பு: வினாக்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களோ அல்லது மாணவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களோ அவ்வவற்றிற்கான சராசரியைக் காட்டிலும் குறைவாயிருந்தால் அவற்றையும் ஆசிரியர் கவனித்தல் வேண்டும்.

மாதிரிக் குறையறி சோதனைத்தாள்

தலைப்பு : பின்னம்

வகுப்பு : VII

கொடுக்கப்பட்ட நேரம் : 25 நிமிடம்

மொத்த மதிப்பெண் : 18

நோக்கம்	வினா
சாதாரணப் பின்னத்தின் கருத்தை மாணவர்கள் புரிந்திருக்கின்றூர்களா என்று சோதித்தல்.	1. ஏறு வரிசையில் எழுது. $\frac{1}{48}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{3}{72}$
பின்னக் கூட்டல், கழித்தல்களில் பகுதிகள் ஒரே எண்ணுயிருந்தால் அவற்றைச் செய்யும் முறை; பகுதிகள் வெவ்வேருயிருந்தால் அவற்றைச் செய்யும் முறை அறிந்திருக்கிறூர்களா என்று சோதித்தல்.	2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளில், விடை சரியா? இல்லாவிட்டால் சரியான விடையைக் கொடுக்கவும். (அ) 1. $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}=\frac{5}{26}$ 2. $\frac{2}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7}{10}$ 3. $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$ 4. $\frac{7}{10}+\frac{5}{4}=\frac{28}{50}$

நோக்கம்	வினா
	(ஆ) 1. $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{0} = 4$ 2. $\frac{8}{17} - \frac{1}{34} = \frac{7}{17}$ 3. $\frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$ 4. $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
பெருக்கல் முறைகளில் குழப்பம் இருக்கின்றதா என்று சோதித்தல்.	(இ) 1. $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{9}$ 2. $\frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{14}$ 3. $\frac{5}{11} \times \frac{11}{5} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{11}} \times \frac{\cancel{11}}{\cancel{5}} = 0$ 4. 3-ல் $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 5. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{40}$
வகுத்தல் முறைகளில் குழப்பம் இருக்கின்றதா என்று சோதித்தல்.	(ஈ) 1. $\frac{4}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{3}$ 2. $\frac{5}{9} - \frac{6}{7} = \frac{9}{5} \times \frac{7}{6}$ 3. $8 \div 2 = \frac{8}{2}$ 4. $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ 5. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{5}$ 6. $8 \div \frac{1}{4} = 2$

நல்ல சோதனையின் இலக்கணம்

கேள்விகள், அல்லது சோதனைக் கூறுகளைக் (test items) கொண்டது சோதனை எனப்படும். மாணவர்களிடமிருந்து பதிலை வரவழைக்கும் திறன், அதாவது, மாணவர்களின் அறிவாற்றல், சிந்தனையாற்றல், செயலாற்றல், நாட்டம், பற்று, நுண்ணறிவு முதலியவற்றை வெளிக்கொணர்வது சோதனையின் பொதுப்பண்பாகும். மாணவர் தங்கள் அறிவாற்றலைப் பயன்படுத்திச் செய்முறைகள் மூலம் தங்கள் திறமையை மெய்ப்பித்துக்காட்ட இது ஒரு வாய்ப்பாகும்.

சோதனையை நன்கு அமைப்பதற்கான அடிப்படைத் தத்துவங்கள்: சிறந்த ஒரு சோதனை, ஏற்புடையதாயும் (valid), நம்பகமாகவும் (reliable), புறவயப்பட்டதாகவும் (objective) இருத்தல் வேண்டும்.

1. ஏற்புடைய சோதனை: அளந்தறிய முற்படும் திறனையோ பண்பினையோ, சரியாக அளக்க உதவும் சோதனையை ஏற்புடையது எனலாம். அளக்க முற்படுவனவற்றை அளக்காமல் அதற்குப் புறமான பண்புகளைச் சோதிப்பதாய் அமையும் சோதனை ஏற்புடைய சோதனையன்று.

2. புறவயம்: ஒரு நல்ல தேர்வின் அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்கள், சோதனையாளரின் மனநிலையைச் சாராமல் அமையுமானால் அத்தகைய தன்மையைப் புறவயத்தன்மை என்கிறோம். இம் முறையில் சோதனையாளர் யாராயிருப்பினும், பல சோதனையாளர்கள் ஒரே சோதனையை மதிப்பிட்டாலும் மதிப்பெண்கள் மாறாமலிருக்கும். இவ்வாறன்றிச் சோதனையாளரின் மனநிலைக்குத் தகுந்தபடி மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அதை அகவயத்தன்மை (subjective) என்கிறோம்.

3. நம்பகம்: தொடர்ச்சியாக ஒரேமுடிவைத் தருதல் என்பது தேர்வின் சிறந்த பண்பாகும். குறிப்பிட்ட ஒரு வகுப்பிற்கு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முறைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வை நடத்துவதால் கிடைக்கும் முடிவுகளுக்கிடையேயுள்ள ஒற்றுமையின் அளவே நம்பகத்தின் அளவாகும். இவ்விதம் இரண்டு அல்லது மூன்று முறைகள் நடத்தப்படும் தேர்வில் மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களின் போக்கு (trend) மாறாமலிருந்தால், அதை நம்பகமான தேர்வு எனலாம்.

சோதனைக் கூறுகள்

- பழைய முறை
  கட்டுரை அமைப்பு
  1. அகவயமானது
  2. பதில் தன்னுரிமையானது
  (free response)
- புது முறை
  1. புறவயமானது
  2. பதில் நிலையானது
  (fixed response)
  - மீட்டிக் கொணர்பவை (recall)
    - சிறுவிடைக் கேள்விகள்
    - காலியிடங்களை நிரப்புதல்
  - மீட்டறிபவை (recognise)
    - சரி தவறு
    - இணைத்துச் சேர்
    - பல்விடையில் தேர்வு (multiple choice)

மேலே குறிப்பிட்டபடி தேர்வுகளை இரண்டு முக்கியப் பிரிவு களாகப் பிரிக்கலாம். (1) பழைய முறை: கொடுக்கப்பட்ட புதிர்க் கணக்கை மாணவன் தனக்குத் தெரிந்த எந்த முறையிலும் செய்யலாம்—பொதுவாக இக் கணக்குகளில் பல கருத்துகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியிருக்கும்; பல படிகளைக் (steps) கொண்ட தாக இருக்கும். (2) புது முறை: கணக்குகளின் பதில் நிலை யானது—பொதுவாக இப்:பதில்கள் ஒரு சொல் அல்லது சொற் றொடரால் கொடுக்கப்படும், அல்லது கொடுக்கப்பட்ட பல விடை களில் சரியானதைத் தேர்ந்தெடுப்பதாயிருக்கும்.

இவ் விரண்டு முறைகளும் இரண்டு வெவ்வேறு குறிக்கோள் களுக்காகப் பயன்படுத்தப்படுவதால் தேர்வுகளில் இவ் விரண்டு முறைகளிலும் கேள்விகளை அமைக்கவேண்டும். தன்னியலாகச் சிந்தித்து, தேவையான சூத்திரங்கள் விதிகள் முதலியவற்றைத் தகுந்த இடத்தில் பயன்படுத்தி, ஒழுங்காக, படிப்படியாக எழுதி, தேவையான இடங்களில் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தித் தருக்க முறையில் செயற்படப் பழைய முறை உதவுகின்றது. மாறாக, புதிய முறையில் கேள்விகள் சிறியனவாயிருப்பதால் பாடத் திட்டத்திலுள்ள பகுதிகளெல்லாவற்றிலும் கேள்விகள் தரலாம்

(effective content coverage). ஒவ்வொரு கேள்வியும் ஒரே குறிக் கோளைச் சோதனை செய்யும்படி அமைந்திருப்பதால் ஒரு தேர்வில் எல்லாக் குறிக்கோள்களையும் சோதிக்கமுடிகின்றது.

மேற்கண்ட காரணங்களால் தேர்வுகளில் இரண்டு முறை களைச் சார்ந்த கேள்விகளும் இணைந்தே பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

பாடத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு நிலையின் முடிவிலும் (various stages) அகவியலாகவோ அல்லது புறவியலாகவோ (internal or external) அந்தந்த நிலைவரை கற்ற பாடங்கள் முழுவதிலும் தேர்வு கள் நடத்த வேண்டும். இவற்றின் மூலமாக மாணவர்கள் அடையும் மதிப்பெண்கள், அவர்களுடைய சாதனைகளை முழுமை யாக வெளிப்படுத்தாவிடினும், இவற்றைச் 'சுட்டிக் காட்டி' (index) என்று கூறலாம். ஏனெனில், தேர்வு, மதிப்பீட்டு முறை யின் ஒரு முக்கியக் கூறுகும்.

மேலும், மாணவர்களின் இச் சாதனைகள், மறைமுகமாக, ஆசிரியர்களுடைய சாதனையின் பிரதிபலிப்பாகும்.

புறவயமான சோதனைக் கூறுகள்

முடித்தற் சோதனைகள் (Completion test): காலியிடங்களைத் தகுந்த வார்த்தைகளால் நிரப்பு

1. இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வதால் ஏற்படும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள்..................; அடுத்துள்ள கோணங்கள்.............

2. 'r' ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவும் அதன் பரப்பும்..............விகிதத்திலிருக்கும்.

குறிப்பு: இந்த முறைச் சோதனை, தகவல்களின் தெரிவிப்பு களை (matters of information) அறியப் பயன்படுகின்றது.

பல்விடைத் தேர்வுச் சோதனை (Multiple choice item)

இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டுவதால் உண்டாகும் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்

(அ) மிகை நிரப்பிகள்

(ஆ) குறுங்கோணங்கள்

(இ) சமம்

(ஈ) செங்கோணங்கள்

(உ) நிரப்புக் கோணங்கள்

குறிப்பு : இவ்வகை விஞக்களில் கொடுக்கப்பட்ட விடைகளை முடிந்தவரையில் சரியானவைபோல் இருக்கும்படி அமைக்க வேண்டும்.

இணைத்தற் சோதனை

கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றுள் இரண்டாம் பத்தியிலுள்ள உருப்படிகளை (நாற்கரங்களின் பெயர்கள்) முதல் பத்தியிலுள்ள, தகுந்த உருப்படியுடன் (நாற்கரங்களின் மூலை விட்டங்கள்) பொருத்தவும்.

பத்தி 1	பத்தி 2
(அ) இவையிரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்; ஒன்றுக்கொன்று சம வெட்டிகள்.	(அ) இணைகரம்
(ஆ) இவை சமமுமல்ல, ஒன்றுக் கொன்று சம வெட்டிகளுமல்ல.	(ஆ) செவ்வகம்
(இ) இவை சமமல்ல; ஆனல் ஒன்றுக் கொன்று சம வெட்டிகள்.	(இ) சாய்வு சதுரம்
(ஈ) இவை ஒன்றுக்கொன்று இரு சம வெட்டிகள்; ஒன்று மற்றதன் செங் குத்துக் கோடு.	—
(உ) இவையிரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று சமம். ஒன்றையொன்று செங் கோணத்தில் வெட்டிக் கொள் கின்றன.	—

குறிப்பு : இரண்டாம் பத்தியிலுள்ளதைக் காட்டிலும் முதல் பத்தியில் ஓர் உருப்படியாவது அதிகமாகக் கொடுப்பதால் ஊகித்து எழுதும் நிலையைக் குறைக்கலாம்.

'சரி — தவறு' சோதனை (True — false test)

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் மெய்யானவற்றை ✓ என்ற குறியீட்டால் 'சரி' யென்ற தலைப்பின் கீழ்க்குறி. தப்பாக இருந்தால் 'தவறு' என்ற தலைப்பின்கீழ் ✓ என்ற குறியீட்டால்

குறி; இவற்றிற்கான சரியான விடையைக் கடைசிப் பத்தியில் எழுது.

கணக்குகள்	விடை	சரி	தவறு	சரியான விடை
1. $\frac{3+4}{5+4}$	$\frac{3}{5}$			
2. $ax + bx$	abx			
3. $m^2 + m^2$	$2m^4$			
4. $\frac{x^2+x}{x^2}$	$\frac{x+1}{x}$			
5. $a \times a$	$2a$			

சிறந்த வகுப்பறைத் தேர்வுகளும், சோதனைகளும்

சோதனைகளை மிகுந்த கவனத்துடன் புனைதல்வேண்டும். இவற்றைத் திட்டமிடுதல், ஆராய்ந்து முயன்று பெற வேண்டிய 'கலை' என்றுகூடக் கூறலாம். தொடக்கத்தில் மிகுதியான நேரமும் உழைப்பும் இதற்குத் தேவைப்பட்டாலும் ஒரு முறை புனைந்த சோதனையைத் திரும்பவும் பயன்படுத்த முடியும்.

சோதனையைத் திட்டமிடுதல்

(1) ஒவ்வொரு பாடப் பகுதியிலும் சோதனையின் குறிக்கோளைத் திட்டவட்டமாகத் தீர்மானம் செய்யவேண்டும். இப் பகுதியில் கற்பிக்கும் பாடப் பொருளைத் (instructional material) தீர ஆராய்ந்து பாகுபாடு செய்யவேண்டும். பின்வரும் குறிக்கோள்களின் அடிப்படையில் சோதனை அமைவது நல்லது. மிக முக்கியமான பகுதிகளும், புதுக் கருத்துகளும் சோதனையில் இடம்பெற வேண்டும். மாணவர்களின் ஆராய்ந்து படிக்கும் பழக்கம், வரையறைகளை மூலத்திலிருந்து வருவிக்கும் ஆற்றல், கொள்கைகளைத் தோற்றுவிக்கும் திறன், வழிமுறைகளிலும் செயல்முறைகளிலும் தேர்ச்சி முதலியனவும் சோதனையில் முக்கியமாக இடம்பெற வேண்டும். ஒவ்வொரு பகுதியும் முடிந்தவுடன் அதற்கான குறிக்கோள்கள் முழுமையும் அடையப்பெற்றனவா என்று இச் சோதனைகள் வெளிப்படுத்தவேண்டும்.

2. கேள்விகளின் தரங்களைத் தீர்மானித்து வரிசைப்படுத்த வேண்டும். பாடப் பகுதியில் அங்கொன்றும் இங்கொன்றுமாகக் கேள்விகள் குறிப்பது முறையன்று. இதனால் நல்ல பயனும் இராது. பாடப்பகுதியில் மாணவனுடைய அறிவுச் சாதனையைத் தெளிவாகத் தெரிந்துகொள்ளவேண்டிய கருவியாகச் சோதனை கள் கருதப்படுவதால் இவற்றைத் திட்டமிடுவதில் மிகுந்த கவனம் தேவை. இதற்குக் கீழ்க்கண்ட முன்னேற்பாடுகள் பயனுள்ளவை யாயிருக்கும்.

(அ) திட்டமிடுதல்: வினாத்தாள் குறிப்பதில் இது முதலாவது மட்டுமல்லாமல் முக்கியமான நிலையுமாகும். வினாத்தாளின் முக்கியமான பரிமாணங்களை (dimensions) இது வரையறுக் கின்றது.

(ஆ) குறிக்கோளின் முக்கியத்துவம்: என்னென்ன குறிக் கோள்களில் சோதனை நடத்தவேண்டும் என்று தீர்மானித்து, அவற்றின் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்து, மொத்த மதிப்பெண் களை அவற்றிற்குப் பங்கீடுசெய்ய வேண்டும். இப்படிச் செய்வதால் அறிவாற்றலை மட்டிலும் வற்புறுத்தாமல் அதைக்காட்டிலும் முக்கியமான மற்ற ஆற்றல்களையும் சோதிக்க முடியும். உதாரண மாக, கீழ்க்கண்ட முறைப்படி சோதனை மதிப்பெண்களைப் பங்கீடு செய்யலாம்.

கற்பிப்பதன் குறிக்கோள்கள்	மதிப்பெண் சதவீதம்
1. அறிவாற்றல்	30
2. பொருளுணர்வாற்றல்	40
3. செயலாற்றல்	15
4. திறமை	15
மொத்தம்	100

(இ) பாடத்தில் ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் தகுந்த மதிப்பளித் தல்: வினாக்களைப் புனையும்பொருட்டுப் பாடப்பகுதியைச் சிறு பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் அதற்குத் தகுந்த மதிப்பெண்கள் கொடுக்கவேண்டும்.

(ஈ) ஒவ்வொரு விதமான திறமையையும் சோதிப்பதற்கு அதற்கேற்ற முறையையே பயன்படுத்த வேண்டும் என்ற கொள்

கைப்படி, வினாத்தாளில் பலவிதமான கேள்விகளும்—அதாவது, பழைய, புதியமுறைக் கேள்விகளும்—இடம்பெற வேண்டும்.

கடின நிலை (Difficulty level): கடை நிலை, முதல் நிலை மாணவர்களை வேறுபடுத்திப் பிரிப்பது சோதனையின் மிக முக்கிய நோக்கங்களில் ஒன்றாகும். இந்த நோக்கத்தை ஈடேற்றக்கூடிய சோதனைத் தாளை ஒரு நல்ல சோதனைத்தாள் எனலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட கேள்விக்கு மாணவர்களில் 70 சதவீதம் பதில் எழுத முடியுமானால் அதை எளிது என்று கூறலாம். மாணவர்களில் 70 சதவீதம் முதல் 30 சதவீதம் வரை அதற்குப் பதில் எழுத முடியுமானால் அதை இடைப்பட்ட கடின நிலை என்றும், 30 சதவீதத்திற்கும் குறைவான மாணவர் அதற்குப் பதில் எழுத முடியுமானால் அதைக் கடின நிலையென்றும் கூறலாம். இம் மூன்று நிலைகளையும் C, B, A என்று குறிப்பிட்டால் இவற்றிற்குக் கொடுக்க வேண்டிய மதிப்புகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

	கடின நிலை		மதிப்பெண் (சதவீதம்)
1.	எளிது	C	30
2.	இடைநிலை	B	40
3.	கடினம்	A	30

தேர்ந்தெடுப்புத் திட்டம் (Scheme of option): சிறந்த சோதனை முறையில், தேர்ந்தெடுக்கும் திட்டத்திற்கு இடமேயில்லை. இத் திட்டம் பழக்கத்தில் இருந்துவருவது வினாத்தாளின் பெருங் குறை என்றே கூறவேண்டும். இதனால், மாணவர்கள் தேர்ந்தெடுத்துக் கற்கிறார்கள்; ஆசிரியரும் தேர்ந்தெடுத்துக் கற்றுக் கொடுக்கிறார்கள். சில சமயங்களில் ஆசிரியர்களே இம் முறையை ஊக்குவிக்கின்றனர். இப் பழக்கம் சோதனை முறையில் வேரூன்றியிருப்பதால் பயனற்ற இம் முறையைப் படிப்படியாக வேனும் ஒழிக்கவேண்டும். இதற்கு ஆரம்பமாக, கட்டுரை வினாக்களுக்கு மட்டிலும் தேர்ந்தெடுப்பு முறையை அனுமதிக்கலாம். புது முறை, சுருக்கவிடை, பல்விடைத் தேர்வுச் சோதனை போன்ற வினாக்களுக்கு விருப்பத் தேர்வுத் திட்டம் தேவையில்லை.

சோதனைத் தாளின் பிரிவுகள்

பொதுவாகச் சோதனைத் தாளை இரண்டு முக்கியப் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். அதாவது, புறவயமான அல்லது மிகச் சுருக்கமான விடைவரும் கேள்விகளை ஒரு பகுதியிலும், கட்டுரை அல்லது சுருக்க விடைக் (short answer) கேள்விகளை மற்றொரு பகுதியிலும் அமைக்கலாம்.

கேள்விகளின் வரிசை முறை : உளவியல் கண்ணோட்டமாகப் பார்க்கும்போது, மாணவர்களுக்குத் தன்னம்பிக்கை வரும்வகையில் கேள்விகளை அவற்றின் கடினப்படி எளிது, இடைநிலை, கடினம் என்ற வரிசையில் அமைக்க வேண்டும்.

வடிவமைப்புத் தயாரித்தல் (Blue print): கேள்வித் தாளின் அமைப்பை விவரமாகத் திட்டப்படுத்திக் காட்டுவது வடிவமைப்பாகும். வினாத்தாளின் அமைப்பைத் தீர்மானித்தபின் தனித் தனியே ஒவ்வொரு குறிக்கோளுக்கும் வினாவாரியாக எத்தனை மதிப்பெண்கள் கொடுப்பது என்பதை விவரமாகக் குறிப்பிட வேண்டும். தலைப்புகளை முதல் பத்தியிலும், குறிக்கோள்களை நான்கு வெவ்வேறு பத்திகளிலும் பின்வரும் 'வடிவமைப்பு' முறையில் அமைக்கவேண்டும்.

கணிப்பு விடைக் குறிப்பு (Scoring key): மதிப்பிடற்குரிய கருத்துகளும் (Value points—expected out-line answers), மதிப்பெண் பங்கீடும் (Marking scheme).

வினாத்தாளைத் தயார் செய்யும்பொழுதே, உடனுக்குடன் விடைக் குறிப்பையும், மதிப்பிடற்குரிய முக்கியக் கருத்துகளையும் அவற்றிற்கான மதிப்பெண் பங்கீட்டையும் தயார் செய்வதனுல் கேள்விகளில் தவறுகள் இருப்பதைத் தவிர்க்கலாம். மேலும், கணிதப் பாடத்தில் நடைமுறைக்கு ஒவ்வாத விடைகள், மிகச் சிக்கலான பின்னங்கள் முதலியவை வருவதைத் தவிர்க்கலாம்.

வினாக்களைப் பாகுபாடுசெய்தல் : வினாக்களை, அவற்றில் பதிந்துள்ள குறிக்கோள்களின் அடிப்படையைக்கொண்டு பாகுபடுத்த வேண்டும். இதை வடிவமைப்போடு ஒப்பிட்டு நோக்கலாம். வினாக்களைக் கீழே கொடுக்கப்பட்ட நோக்கக் கூறுகளாகப் பாகுபாடு செய்யலாம்.

(அ) வினா, எந்தக் குறிக்கோளைச் சோதிக்கின்றது,

(ஆ) வினாவின் சிறப்பு நோக்கம்,

(இ) வினா, எந்தப் பாடத்தலைப்பைச் சேர்ந்தது,

(ஈ) வினா, பாடத்தின் எந்த உட்பிரிவில் அமைந்திருக்கின்றது,

(உ) வினாவின் அமைப்பு,

(ஊ) எதிர்பார்க்கும் கடின நிலை,

(எ) வினாவுக்கு விடையளிக்க ஆகும் நேரம்,

(ஏ) வினாவுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்.

மேற்கண்ட விவரங்கள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றன.

11-ம் வகுப்பு தலைப்பு: வட்டம் **வடிவமைப்பு** நேரம் : 1 மணி

நோக்கம்	அறிவாற்றல்			பொருளுணராற்றல்			செயலாற்றல்			திறன்			மொத்தம்
வினு அமைப்பு	க	கு	ப	க	கு	ப	க	கு	ப	க	கு	ப	
வட்டம் பரிதி பரப்பளவு		4 (1)	2 (2)	7 (1)		1 (1)	8 (1)						22 (6)
வட்டக்கோணப் பகுதி வட்டவில்- பரப்பளவு நாண்		3 (1)				3 (3)	8 (1)		1 (1)				15 (6)
வட்ட வலயம் பரப்பளவு அகலம்			2 (2)		5 (1)	1 (1)							8 (4)
விகிதங்களில் குறிப்பிடுதல்					5 (1)								5 (1)
மொத்தம்	11 (6)			22 (8)			17 (3)						50 (17) / 50 (17)

குறிப்பு : க — கட்டுரை
கு — குறுவிடை
ப — பல்விடையில் தேர்வு

அடைப்புக்குள் இருப்பது வினு எண்
அடைப்புக்கு வெளியே இருப்பது மதிப்பெண்

நோக்கங்களுக்கு முக்கியத்துவம்
செயலாற்றல் + திறன் : $\frac{11}{50} \rightarrow 22\%$
பொருளுணராற்றல் : $\frac{22}{50} \rightarrow 44\%$
அறிவாற்றல் : $\frac{17}{50} \rightarrow 34\%$

ஆசிரியருக்குச் சில குறிப்புரைகள்

(அ) விைக்கள் எளிதாகவும் தெளிவாகவும் இருக்கவேண்டும்;

(ஆ) விைக்கள் குறிக்கோள்களின் அடிப்படையில் அமைய வேண்டும் (objected based). ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் ஒரு குறிக்கோள் இருக்க வேண்டும்;

(இ) வினாக்களில் கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களில் அதே வினாவிற்கான அல்லது மற்ற வினாக்களுக்கான விடைகளுக்குச் சாடைக் குறிப்பிருந்தால் வினாத்தாளின் தரம் குறைகின்றது. இதைத் தவிர்க்கவேண்டும்.

(ஈ) வினாத்தாளின் பிரிவுகள், வினாக்களுக்கான மதிப்பெண்கள் முதலியவைபற்றிய குறிப்புகள் சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

மாதிரி வினாத்தாள்

பாடப்பகுதி : வட்டம்

வகுப்பு : 11-ஆம் வகுப்பு மதிப்பெண் : 50

காலம் : 1 மணி

பிரிவு A

1. இருவட்டங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் 3 : 4. அவற்றின் சுற்றளவுகளின் விகிதமென்ன?

   விடை: A. 4 : 3; B. 16 : 9; C. 9 : 16; D. 3 : 4; E. 9 : 8.

2. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் 'd' அலகானால், அதன் பரப்பளவு

   (A) $\frac{\pi d^2}{4}$ சதுர அலகு; (B) πd^2 ச. அ; (C) $2\pi^2$ ச. அ;

   (D) $4\pi d^2$ ச. அ; (E) $\frac{\pi d^2}{2}$ ச. அ.

3. ஒரு வட்ட வில்லின் நீளம் வட்டத்தின் சுற்றளவில் $\frac{1}{8}$ பாகம் எனில், அது வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம்.

   A. $80°$; B. $10\frac{1}{2}°$; C. $45°$; D. $22\frac{1}{2}°$; E. $\frac{1}{8}°$.

4. $30°$ மையக் கோணமாகவுள்ள ஒரு வட்டவில் ஒரு முழு வட்டத்தினின்று வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள வட்டவில்லின் நீளத்திற்கும் வெட்டி எடுக்கப்பட்ட வட்ட வில்லின் நீளத்திற்கும் உள்ள விகிதம் : (A) 1 : 2; (B) 11 : 1; (C) 1 : 6; (D) 1 : 30; (E) 30 : 1.

5. ஒரு கடிகாரத்தில் மணி முள்ளின் நீளம் 7 செ. மீ. 1 மணியிலிருந்து 4 மணிக்குச் செல்ல அதன் நுனி கடந்து செல்லும் வட்ட வில்லின் நீளம்:

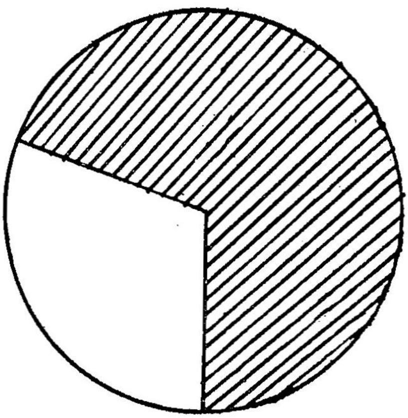
(A) 7 செ. மீ; (B) 4 செ. மீ; (C) $\frac{1}{4}$ வட்டத்தின் சுற்றளவு;
(D) $\frac{4}{12}$ வட்டத்தின் சுற்றளவு; (E) 28 செ.மீ.

6. $\frac{\pi a^2}{4}$ ச. அலகு பரப்புள்ள ஒரு கால்வட்டப் பகுதியின் சுற்றளவு,

(A) $\frac{\pi a}{4}$; (B) $\frac{\pi a^2}{4}$; (C) $\frac{\pi a}{2} + 2a$; (D) $\frac{\pi a}{4} + 2a$;
(E) $\frac{\pi a^2}{4} + a$.

7. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பு ஒரு நாட்டின் பரப்பளவைக் குறிக்கிறது. மக்கள் நெருக்கமுள்ள பகுதி கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் பரப்பு மொத்தப் பரப்பில் 60% என்றால் இந்த வட்டக்கோணப் பகுதியின் கோணம்.

(A) 60°; (B) 300°;
(C) 120°; (D) 216°
(E) 108°.



படம் 47

8. வட்ட வடிவமான ஒரு பாதையின் வெளி விட்டம் 50 மீ. உள்விட்டம் 40 மீ. என்றால், பாதையின் அகலம்:

(A) 10 மீ; (B) 5 மீ; (C) 20 மீ; (D) 25 மீ; (E) 90 மீ.

9. ஒரு வட்ட வளையத்தின் அகலம் 7 செ. மீ. உள், வெளி வட்டங்களின் சுற்றளவுகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம்:

(A) 7 செ.மீ; (B) 14 செ.மீ; (C) 22 செ.மீ; (D) கண்டு பிடிக்க இயலாது; (E) 44 செ. மீ.

10. வெளிவட்ட ஆரம் 'R' அலகுகளும் உள்வட்ட ஆரம் 'r' அலகுகளும் கொண்ட வட்ட வடிவப் பாதையின் பரப்பு,

(A) $\pi\ (R^2+r^2)$ ச. அலகுகள்; (B) $\pi\ (R^2-r^2)$ச. அ; (C) $\pi\ (R+r)R-r$ ச. அ; (D) πR^2-r^2 ச. அ; (E) $\pi\ (r^2-R^2)$ ச. அ.

பிரிவு B

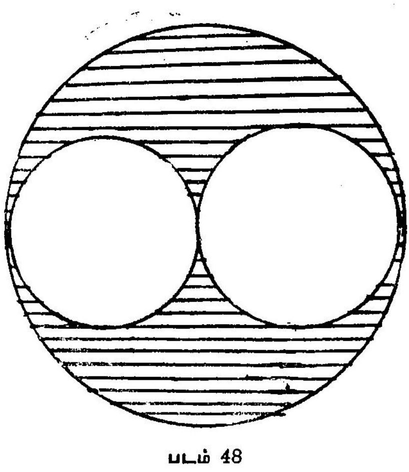
11. 10 செ.மீ ஆரமும் 3.5 செ. மீ. வட்டவில் நீளமும் கொண்ட வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு என்ன?

12. 6 செ. மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்து அதன் வட்டக் கோணப் பகுதியில் கீழ்க்கண்ட விவரங்களைக் குறி.

ஒரு குடும்பத்தின் மாதச் செலவு பின்வருமாறு :

அ.	உணவு	65%
ஆ.	கல்வி	10%
இ.	உடை	5%
ஈ.	வீட்டு வாடகை	10%
உ.	இதர செலவுகள்	10%

13. படத்திலுள்ள பெரிய வட்டத்தில் கோடிட்ட இடத்தின் பரப்பளவும் மீதி இடத்தின் பரப்பளவும் என்ன விகிதத்தில் இருக்கும்?



படம் 48

14. 22 ச. மீ. பரப்பளவுள்ள வட்ட வடிவப் பாதையின் உள் விட்டம் 6 மீ. எனில் அதன் அகலம் என்ன?

15. 2 மீட்டர் நீளமுள்ள கம்பியின் ஒரு பகுதி வட்டமாகவும் மீதி அவ் வட்டத்தைச் சுற்றிச் சதுரமாகவும் வளைக்கப்படுகின்றன. (சதுரத்தின் பக்கம் வட்டத்தின் விட்டத்திற்குச் சமம்.) வட்டத்தின் விட்டம் என்ன? வட்டத்தின் பரப்பளவிற்கும் சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குமுள்ள வித்தியாசம் என்ன?

16. ஊஞ்சலொன்றின் கயிற்றின் நீளம் 5 மீட்டர். அது நேராக இருக்கும்போது தரையிலிருந்து $\frac{1}{2}$ மீட்டர் உயரத்தில் உள்ளது. ஆடும்பொழுது தரையிலிருந்து அதன் அதிக உயரம் $2\frac{1}{2}$ மீ. அதிக உயரத்தில் உள்ள இரண்டு நிலைகளுக்கும் உள்ள தூரம் என்ன?

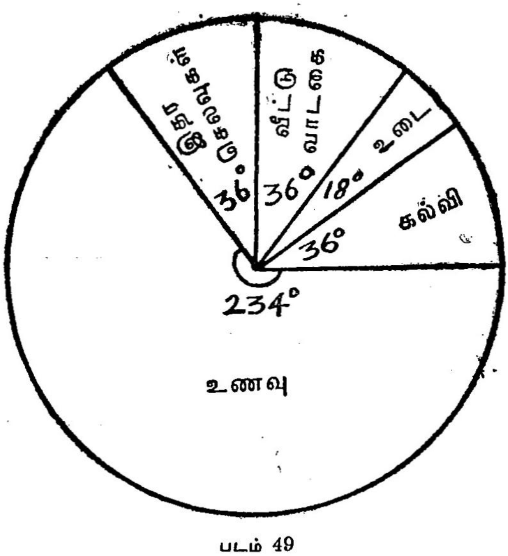
17. 15 மீட்டர் பக்கமுள்ள சதுர வடிவப் பூங்காவின் நடுவில் 3.5 மீ. விட்டமுள்ள தாமரைக் குளம் உள்ளது. குளம் நீங்கிய மீதிப் பாகம் புல்வெளியானால், புல்வெளியின் பரப்பளவு மொத்தப் பரப்பளவில் என்ன சதவீதம்? (முழு எண் திருத்தமாகக் கூறு)

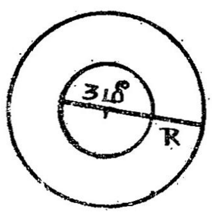
பகுதி–A (Scoring key)

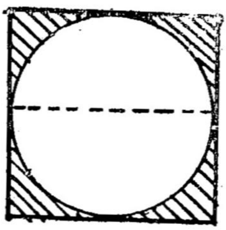
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	C	C	D	B	E	B

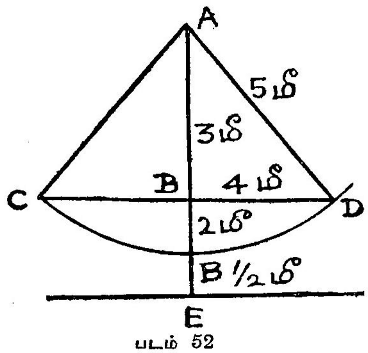
பகுதி–B மதிப்பிடற்குரிய கருத்துகளும், மதிப்பெண் பங்கீடும்

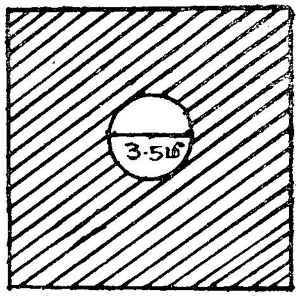
வரிசை எண்	விடைக் குறிப்பு	மதிப்பெண் பங்கீடு	மொத்தம்
11.	வட்ட வில்லின் ஆரம் $r = 10$ மீ.		
	வட்ட வில்லின் நீளம் $l = 3\cdot5$ மீ.		
	∴ வட்டக் கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு		
	$= \frac{1}{2} lr$ ச.அ.	1	
	$= \frac{1}{2} \times 3\cdot5 \times 10$	1	
	$= 17\cdot5$ ச.செ.மீ.	1	3

வரிசை எண்	விடைக் குறிப்பு	மதிப்பெண் பங்கீடு	மொத்தம்
12.	உணவு–65% இதைக் காட்டும் கோணம் $- \frac{65}{100} \times 360 = 234^\circ$	$\frac{1}{2}$	
	கல்வி–10% இதைக் காட்டும் கோணம் $- \frac{10}{100} \times 360 = 36^\circ$	$\frac{1}{2}$	
	உடை–5% இதைக் காட்டும் கோணம் $- \frac{5}{100} \times 360^\circ = 18^\circ$	$\frac{1}{2}$	
	வீட்டு வாடகை–10% இதைக் காட்டும் கோணம் $- \frac{10}{100} \times 360 = 36^\circ$	$\frac{1}{2}$	
	இதரச் செலவுகள்–10% இதைக் காட்டும் கோணம் $- \frac{10}{100} \times 360 = 36^\circ$	$\frac{1}{2}$	
	 படம் 49	$2\frac{1}{2}$	5

வரிசை எண்	விடைக் குறிப்பு	மதிப் பெண் பங்கீடு	மொத்தம்
13.	பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் = r செ.மீ. எனக் கொள்க		
	பெரிய வட்டத்தின் பரப்பளவு = πr^2 ச.செ.மீ.		
	சிறிய வட்டத்தின் ஆரம் = $\frac{r}{2}$ செ.மீ.		
	1 சிறிய வட்டத்தின் பரப்பளவு = $\pi \frac{r^2}{4}$ சது.செ.மீ.	$\frac{1}{2}$	
	2 சிறிய வட்டத்தின் பரப்பளவு = $2 \times \pi \frac{r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{2}$ சது.செ.மீ.	$\frac{1}{2}$	
	கோடிட்ட இடம் = $\left(\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{2}$ சது.செ.மீ.	1	
	கோடிட்ட இடம் = கோடு போடாத இடம்	1	
	∴ விடை 1 : 1	1	4
14.	உள்வட்டத்தின் விட்டம் = 6 மீ. உள்வட்டத்தின் ஆரம் = 3 மீ. வெளிவிட்டத்தின் ஆரம் = R மீ. என்க.  படம் 50		

வினா எண்	விடைக் குறிப்பு	மதிப்பெண் பங்கீடு	மொத்தம்
	வட்டவளையப் பாதையின் பரப்பளவு		
	$= \pi (R^2 - 3^2)$		
	$= \pi (R^2 - 9)$	1	
	வட்டவளையப் பாதையின் பரப்பளவு		
	$= 22$ ச. மீ.		
	$\therefore \quad \pi (R^2 - 9) = 22.$	1	
	$R^2 - 9 = 22 \times \frac{7}{22}$		
	$R^2 = 16$	2	
	$R = 4$ மீ.		
	$\therefore$ பாதையின் அகலம்		
	$= R - r = 4 - 3 = 1$ மீ.	1	5
15.		1	
	படம் 51		
	வட்டத்தின் சுற்றளவு + சதுரத்தின் சுற்றளவு $= 2$ மீ.	1	
	வட்டத்தின் விட்டம் d = சதுரத்தின் பக்கம்		
	$\pi d + 4d = 2.$		
	$d(\pi + 4) = 2$		
	$d\left(\frac{22}{7} + 4\right) = 2$		
	$d\left(\frac{22 + 28}{7}\right) = 2$		
	$d \times \frac{50}{7} = 2$		

வரிசை எண்	விடைக் குறிப்பு	மதிப் பெண் பங்கீடு	மொத்தம்
	∴ வட்டத்தின் விட்டம் $d = 2\times\frac{7}{50}\times 100$		
	$= 28$ செ.மீ.	2	
	வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \frac{22}{7}\times 14\times 14$		
	$= 616$ ச.செ.மீ.	1	
	சதுரத்தின் பரப்பளவு $= 28\times 28$		
	$= 784$ ச.செ.மீ.	1	
	வித்தியாசம் $= 784-616 = 168$ ச.செ.மீ.	1	7
16.	 படம் 52	2	
	கயிற்றின் நீளம் = வட்டத்தின் ஆரம்	1	
	ஊஞ்சல் செல்லும் பாதை ஒரு வட்டவில்	1	
	வட்டமையத்திற்கும் தரைக்குமுள்ள தூரம் $5\frac{1}{2}$ மீ.	1	
	செங்குத்துக்கோடு AB $= 5\frac{1}{2}-2\frac{1}{2} = 3$ மீ.	1	
	BC = BD $= \sqrt{5^2-3^2} = 4$ மீ.	1	
	நாணின் நீளம் = BC+BD = 2BC		
	$= 8$ மீ.	1	8

வரிசை எண்	விடைக் குறிப்பு	மதிப்பெண் பங்கீடு	மொத்தம்
17.	 படம் 53	1	
	சதுரவடிவப் பூங்காவின் பரப்பளவு $-15 \times 15 = 225$ ச.மீ.	1	
	வட்டத்தின் விட்டம் $= 3\cdot5$ மீ. $\therefore$ வட்டத்தின் ஆரம் $= \frac{3\cdot5}{2}$ மீ.	1	
	வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \frac{22}{7} \times \frac{3\cdot5}{2} \times \frac{3\cdot5}{2}$ $= 9.625$ ச.மீ.	2	
	$\therefore$ மீதிப் பாகமான புல்வெளியின் பரப்பளவு $= 225 - 9\cdot625$ $= 215\cdot375$ ச.மீ.	1	
	$\therefore$ புல்வெளிப் பரப்பின் சதவீதம் $= \frac{215\cdot375}{225} \times 100 = 95\cdot72$ $= 96\%$ (முழு எண் திருத்தமாக)	2	8
	மொத்தம்		50

விஞப் பாகுபாடு (Question-wise analysis)

	குறிக்கோள்	சிறப்பு நோக்கம்	பாடத்தலைப்பு	உட்தலைப்பு	வினா அமைப்பு	எதிர்பார்க்கும் கடின நிலை	விடையளிக்க எதிர்பார்க்கும் நேரம் நிமிடங்கள்	மதிப்பெண்
1.	அறிவாற்றல்	கண்டுணர்தல்	வட்டம்	சுற்றளவு	ப	C	1	1
2.	அறிவாற்றல்	கண்டுணர்தல்	வட்டம்	பரப்பளவு	ப	C	1	1
3.	பொருளுணர்வாற்றல்	தொடர்புகாணல்	வ. கோணப்பகுதி	வட்டவில்	ப	A	1	1
4.	பொருளுணர்வாற்றல்	ஒப்பிடுதல்	வ. கோணப்பகுதி	வட்டவில்	ப	B	1	1
5.	பொருளுணர்வாற்றல்	ஒப்பிடுதல்	வ. கோணப்பகுதி	வட்டவில்	ப	B	1	1
6.	செயலாற்றல்	தொடர்பை நிலைநாட்டல்	வ. கோணப்பகுதி	வட்டவில்	ப	A	1	1
7.	பொருளுணர்வாற்றல்	ஒப்பிடுதல்	வட்டம்	விகிதங்களில் கூறல்	ப	B	1	1
8.	அறிவாற்றல்	கண்டுணர்தல்	வட்டவளையம்	வட்டவளைய அகலம்	ப	C	1	1
9.	பொருளுணர்வாற்றல்	தொடர்பு காணல்	வட்டவளையம்	வட்டவளைய அகலம்	ப	B	1	1
10.	அறிவாற்றல்	கண்டுணர்தல்	வட்டவளையம்	வ. வளையப் பரப்பளவு	ப	C	1	1
11.	அறிவாற்றல்	நினைவுகூரல்	வ. கோணப்பகுதி	பரப்பளவு	கு	C	5	3
12.	பொருளுணர்வாற்றல்	தொடர்பு காணல்	வட்டம்	விகிதக் கூறிடல்	கு	B	5	5
13.	அறிவாற்றல்	நினைவுகூரல்	வட்டம்	பரப்பளவு	கு	B	5	4
14.	பொருளுணர்வாற்றல்	தொடர்பு காணல்	வட்டவளையம்	அகலம்	கு	A	5	5
15.	பொருளுணர்வாற்றல்	தொடர்பு காணல்	வட்டம்	பரப்பளவு	க	B	10	7
16.	செயலாற்றல்	ஆய்ந்தறிதல்	வ. கோணப்பகுதி	நாண்	க	A	10	8
17.	செயலாற்றல்	ஆய்ந்தறிதல்	வட்டம்	பரப்பளவு	க	C	10	8

கடினநிலைக்கு முக்கியத்துவம்

A–கடினம்–$\frac{15}{50} = 30\%$ B–இடைநிலை–$\frac{20}{50} = 40\%$ C–எளிது–$\frac{15}{50} = 30\%$

முடிவுரை

கல்வியின் அடிப்படை நோக்கம் மாணவனுடைய தனித் தன்மையை வளர்ப்பதேயாகும். எனவே, திருத்தியமைக்கப்பட்ட தேர்வு முறை, பாடச் செயல்களோடும், இலக்கியம், அறிவியல், பண்பாடு போன்ற மற்றப் பாடஇணைச் செயல்களோடும் தொடர்புடையதாயிருத்தல் வேண்டும். இதற்கு முன்னோடித் திட்டமாகத் தமிழக அரசு 250 பள்ளிகளில் உள்முக மதிப்பீட்டுத் திட்டத்தினைத் (Internal assessment scheme) தொடங்கியுள்ளது. கல்விச் சார்பாகவும், சமூகவியல்புகள், ஆர்வங்கள், மனப்பான்மைகள் சார்பாகவும் மாணவனை மதிப்பிட இத் திட்டம் தக்க குறிப்புகளடங்கிய சிறு கையேட்டினையும் தந்துள்ளது. தற்போதைய கல்வித் திட்டத்திலும், தேர்வுமுறையிலும் காணப்படும் குறைகளை இது போக்கும் என்று நம்பப்படுகிறது.

கல்வியில் புள்ளியியலின் பயன்

இச் சொல் State (நாடு) எனப் பொருள் தரும் status என்ற இலத்தீன் மொழிச் சொல்லினைத் தழுவி வந்ததாகும். இதிலிருந்து, நாட்டின் பற்பல விவகாரங்களில் புள்ளியியல் முறைகள் பண்டைக் காலந்தொட்டே பயன்பட்டு வந்ததாகத் தெரிகின்றது. இதற்கு அதிக விளக்கம் தேவையில்லை; ஏனெனில், எந்த நாட்டின் அரசியலும் செவ்வனே நடக்கவேண்டுமாயின், நாட்டின் குடிமக்கள் கவலையின்றி வாழவேண்டுமாயின், நாட்டின் பொருளாதாரமும், நாட்டின் எல்லைகளும் பாதுகாக்கப்படவேண்டுமாயின் பல புள்ளி விவரங்கள் ஆளுநர்க்குத் தேவை. உதாரணமாக, நாட்டின் மக்கள்தொகையும் அது பெருகும் வீதமும், நாட்டின் பற்பல தொழில் உற்பத்திகள், உணவுதானிய உற்பத்தி, மக்களின் சுகாதார நிலை (பற்பல வியாதிகள் எப்போது, எங்கே, எத்துணை மக்களைப் பாதிக்கின்றன என்கிற செய்திகள்) பிறப்பு இறப்பு வீதங்கள், மக்களிடமுள்ள பணப் புழக்கம் (அரசின் செலவிற்கு வேண்டிய பணம், பலவிதமான வரிகள் மூலமே கிடைக்கின்றது), நாட்டின் பாதுகாப்பிற்குத் தேவையான, போர் செய்யத் தகுதியான ஆண்களும், பெண்களும், ஆகிய இவை யெல்லாவற்றிற்கும் புள்ளியியல் விவரங்கள் இன்றியமையாதவை. எனவே, புள்ளியியலைச் சிலர் 'எண்ணிக்கையியல்' (science of counting) என்றும் கூறுவர்.

திரட்டப்பட்ட புள்ளியியல் செய்திக் குறிப்புகள் வெறும் எண்ணிக்கை வடிவமாக இருப்பதால் இவற்றை, இயன்றவரை சுருக்கித் தொகுக்கவேண்டும். இதற்கு முதற்படியாக இவ்

வெண்களை அளவுப்படி வரிசைப்படுத்தலாம் (ranking). ஆனால், இவற்றின் எண்ணிக்கை அதிகமாயிருப்பின் வரிசைப் படுத்துதல் மிகவும் கடினம். அப்படியே செய்தாலும் அதிகமான எண்ணிக்கையிருப்பதால் இது பயனற்றுத் தோன்றுகிறது. ஆனல், புள்ளியியலின் நோக்கம், பொதுவாக, தனி ராசிகளின் போக்கை அறிவதன்று. அவை ஒரு தொகுப்பாகவே கருதப்பட்டு ஆராயப்படுகின்றன. ஆகவே, சேகரிக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கீழ்க்கண்ட முறைப்படி தொகுத்து ஆராயலாம்.

1. ராசிகளின் எண்ணிக்கை சிலவானல் அவற்றை வரிசைப் படுத்தலாம்; ராசிகளின் எண்ணிக்கை பலவானல் அவற்றைப் பாகுபடுத்திப் பட்டியல் அமைக்கவேண்டும். அதாவது நிகழ்வெண் பரவலாகப் (frequency distribution) பிரிக்கவேண்டும்.

2. வரைபடம் வரைந்து ராசிகளின் பொதுப் போக்கு (trend) என்னவென்று காணுதல்.

3. ராசிகளின் மாதிரி அளவு அல்லது பிரதிநிதி அளவாக ஒரு மையப் போக்கு அளவு (central tendency) அல்லது சராசரியைக் கண்டுபிடித்தல். மையப் போக்கு அளவு, புள்ளியியல் முறையின் 'முதுகெலும்பு' எனலாம். இதனுடைய தனிச் சிறப்பின் காரணமாகச் சிலர் புள்ளியியலை, 'சராசரியியல்' (science of averages) என்றும் கூறுவர்.

4. சிதறல் அளவுகள் மூலம் (measures of dispersion) ராசி அளவுகளின் பரவலை ஆராய்தல்.

5. இயல்நிலைப் பரவல் (normal distribution).

கல்வி முறையில் புள்ளியியலின் பயன்கள்: பள்ளிகளில் மாணவர்களின் அறிவாற்றலை மதிப்பிடுவது ஆசிரியரின் தலையாய கடமைகளில் ஒன்று. மாணவர்களுக்குக் கற்றுக் கொடுத்த பின்னர், அவர்கள் கற்றதன் அளவு பற்பல சோதனைகளினல் கணிக்கப்படுகின்றது, ஆனல், சோதனைகளின் மூலம் மாணவர்க்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்கள், ஒழுங்குபடுத்தப் பட்டு ஆராயப்படுவதற்குப் புள்ளியியல் முறைகள் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. மேலும், சோதனை முறை உளவியலிலும் (experimental psychology), அறிவுத் திறன், ஆளுமைச் (personality) சோதனைகளிலும், தகுதித் தேர்வுகளிலும் புள்ளியியல் முறைகளையே பெரும்பாலும் பயன்படுத்துகிருர்கள். பண்பியல்புகளைப் பற்றி ஆராயவேண்டுமாயின், மதிப்பெண்கள் மூலம் அவற்றை

எண் வடிவமாக மாற்றி, புள்ளியியல் முறைகள் மூலம் அவற்றை ஆராயலாம்.

பாகுபடுத்திப் பட்டியல் அமைத்தல்: பல்வேறு ராசிகளின் எண்ணிக்கை விவரங்கள் குறிப்பிட்ட விதிப்படி ஒழுங்குபடுத்தப் படவில்லையானல் வெறும் எண்களை மட்டிலும் பார்த்து ஒரு முடிவும் எடுக்கமுடியாது; அவற்றைப்பற்றி ஆராயவும் இயலாது. இந்த விவரங்களை முறைப்படுத்துதலுக்கு வகைப்படுத்துதல் (classification) என்று பெயர். ராசிகளை, அவற்றின் பரிமாணங் களைக்கொண்டு வகைப்படுத்திச் சிறுசிறு சமமான பிரிவுகளாகப் பிரித்து அட்டவணைப் படுத்தலாம். இவ்விதம் பாகுபாடு செய்யும் முறையை மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரித்து நோக்கலாம்.

1. ராசிகளின் உச்ச நீச அளவுகளுக்கிடையே உள்ள மொத்த அளவை வேறுபாட்டெல்லை (range) எனலாம். கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளில் மிகப் பெரிய அளவிலிருந்து மிகச் சிறிய அளவைக் கழிப்பதால் கிடைக்கும் எண் வேறுபாட்டெல்லையாகும்.

2. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையையும் (mumber of classes), அளவையும் (class interval) அடுத்தபடியாக முடிவு செய்ய வேண்டும்.

$$\frac{\text{வேறுபாட்டெல்லை}}{\text{பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \text{பிரிவுகளின் அளவு (சுமார்)}$$

முடிந்தவரை எல்லாப் பிரிவுகளிலும் சில ராசிகளாவது இருக்கும் படி பிரித்தல் நல்லது. பிரிவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை மிகச் சிறியதாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இராமல் 10 முதல் 15 வரை இருப்பது சிறந்தது.

3. ராசிகளின் அளவுகளை முறைப்படுத்திப் பிரிவுகளில் அமைத்து அட்டவணைப்படுத்துதல்.

இவ்விதம் வகைப்படுத்தும் முறையைக் கீழே கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் உதாரணத்தால் விளக்கலாம்.

50 மாணவர்களுக்குக் கணிதப் பாடத்தில் கிடைத்த மதிப் பெண்களாவன:

87	92	75	67	52	49	37	30	33	42
25	37	65	90	87	32	32	41	39	28
27	78	60	72	73	56	70	67	25	30
23	53	81	61	38	70	32	42	59	25
72	62	25	30	59	36	63	60	69	48

இவற்றில் மிகப் பெரிய அளவு : 92
மிகச் சிறிய அளவு : 23
வேறுபாட்டெல்லை = 92 — 23 = 69

பிரிவு அலகு 6 என்று எடுத்துக்கொண்டால் 12 பிரிவுகள் வரும். இவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் படுத்தவேண்டும்.

நிகழ்வெண் பரவல் பட்டியல்

மதிப்பெண்கள் முழு எண் எல்லைகள்	குறியீடு	நிகழ்வெண்	மதிப்பெண்கள் உண்மை எல்லைகள்
23 — 28	~~IIII~~ II	7	22.5 — 28.5
29 — 34	~~IIII~~ II	7	28.5 — 34.5
35 — 40	~~IIII~~	5	34.5 — 40.5
41 — 46	III	3	40.5 — 46.5
47 — 52	III	3	46.5 — 52.5
53 — 58	II	2	52.5 — 58.5
59 — 64	~~IIII~~ II	7	58.5 — 64.5
65 — 70	~~IIII~~ I	6	64.5 — 70.5
71 — 76	IIII	4	70.5 — 76.5
77 — 82	II	2	76.5 — 82.5
83 — 88	II	2	82.5 — 88.5
89 — 94	II	2	88.5 — 94.5
——	மொத்தம்	50	——

இந்தப் பட்டியலில், முதல் பத்தியில் ஒரு பிரிவிற்கும் அடுத்த பிரிவிற்கும் இடையில் 1 அலகு விடுபட்டுள்ளது. உதாரணமாக, முதல் பிரிவின் மேல் எல்லை 28-க்கும் இரண்டாவது பிரிவின் கீழ் எல்லை 29-க்கும் இடையில் ஓர் அலகு விடுபட்டுள்ளது. இந்த ஓர் அலகை இரண்டாகப் பிரித்து முதல் அலகின் மேல் எல்லையை 28.5 என்றும் இரண்டாம் பிரிவின் கீழ் எல்லையை 28.5 என்றும் கொள்வது முறையாகும். இப்படி மாற்றியமைக்கப்பட்ட பட்டியல் நான்காவது பத்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் கொடுக்கப் பட்ட பிரிவு எல்லைகளை உண்மை எல்லைகள் (true limits) என்று கூறலாம்.

இவ்வாறன்றி, ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய அளவையும் கண்டு பிடித்து அதை அந்தந்தப் பிரிவின் நிகழ்வெண் ராசிகள் எல்லா

வற்றின் மதிப்பெண்களாகவும் கொள்ளலாம். இந்த முறை யமைப்புக் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல் (Cumulative frequency table) நிகழ்வெண் பட்டியலில், ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அந்த இடைவெளி யில் (interval) வரும் ராசிகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. வளர் நிகழ்வெண் பட்டியலில், ஒவ்வொரு பிரிவிலும், அதற்கு மேல் உள்ள ராசிகளின் கூடுதலோ அல்லது அதற்குக் கீழ் உள்ள ராசி களின் கூடுதலோ வருமாறு ஒழுங்குபடுத்தினால் வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல் கிடைக்கின்றது. இது இரண்டு வகைப்படும். (1) கீழ் வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல், (2) மேல்வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல் என்ற இவ் விரண்டும் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

பிரிவுகள் உண்மை எல்லைகள் x	பிரிவுகள் மைய அளவுகள் x	நிகழ்வெண் f	கீழ்வளர் நிகழ்வெண்	மேல்வளர் நிகழ்வெண்
22.5 — 28.5	25.5	7	7	50
28.5 — 34.5	31.5	7	14	43
34.5 — 40.5	37.5	5	19	36
40.5 — 46.5	43.5	3	22	31
46.5 — 52.5	49.5	3	25	28
52.5 — 58.5	55.5	2	27	25
58.5 — 64.5	61.5	7	34	23
64.5 — 70.5	67.5	6	40	16
70.5 — 76.5	73.5	4	44	10
76.5 — 82.5	79.5	2	46	6
82.5 — 88.5	85.5	2	48	4
88.5 — 94.5	91.5	2	50	2

புள்ளியியல் வரைபடங்கள்

எண் வடிவப் பட்டியல்களைக்காட்டிலும் படங்கள் மூலமாகக் கண்ணையும் கருத்தையும் கவருவது எளிது. எனவே, பல புள்ளி யியல் தகவல்களை (1) படவிளக்கங்கள் (Pictogram) மூலமாகவும் (2) வரைபட (graph) விளக்கமாகவும் கொடுத்திருப்பதைத் தினசரிப் பத்திரிகைகளில்கூடக் காணலாம்.

பட விளக்கங்களில், பட்டைப்படம், வட்டப்படம், சித்திரப் படம் போன்றவை அதிகமாக வழக்கத்திலுள்ளன. இவை பெரும்

பாலும் எழுதப்படிக்கத் தெரியாதவர்களுக்காகவே பயன்படுத்தப் படுகின்றன. எனவே, இவற்றை விடுத்து, வரைபடங்களைப்பற்றி ஆராயலாம். இவற்றில் முக்கியமாக நான்கு வகைகள் உள்ளன. அவையாவன:

1. செவ்வகப் பட்டை வடிவம் (rectangular histogram).
2. நிகழ்வெண் பலகோணம் (frequency polygon).
3. நிகழ்வெண் வரை (frequency curve).
4. கீழின, மேலின, வளர் நிகழ்வெண் வரைகள் (less than ogive and greater than ogive).

1. **செவ்வகப் பட்டை வடிவம் :** வரைபடத் தாளில், ராசிகளின் எண் அளவுகளை x அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை y அச்சிலும் தகுந்த வீத முறையில் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவு மெய்யிடை வெளியிலும் (real class interval) அதற்கான நிகழ் வெண்ணுக்குத் தகுந்த செவ்வகங்கள் வரைந்தால் இந்தச் செவ் வகங்கள் படத்தில் காட்டியபடி ஒன்றையொன்று சேர்ந்திருக்கும். இவற்றின் மொத்தப் பரப்பளவு மொத்த ராசிகளின் விகிதத்தி லிருக்கும்.

2. **நிகழ்வெண் பலகோணம் :** பிரிவுகளின் மைய அளவுகளை x அச்சிலும் அவற்றின் நிகழ்வெண்களை y அச்சிலும் குறிப்பதால் கிடைக்கும் புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் சேர்ப்பதால் ஏற்படும் பல கோணத்திற்கு நிகழ்வெண் பலகோணம் என்று பெயர். (செவ்வகப் பட்டை வடிவத்தில் செவ்வகங்களின் உச்சி நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்ப்பதாலும் இப் பல கோணம் கிடைக்கும்.) இப் பல கோணம், முதலிலும் முடிவிலும் x அச்சைத் தொடுமாறு நீட்டிவிடப்படுகின்றது.

3. **நிகழ்வெண் வரை :** இது ஓர் இலட்சியக் கோடு. பிரிவு களின் அகல அளவுகளைக் குறைத்துக்கொண்டே வந்தால் இவற்றின் மொத்த எண்ணிக்கை அதிகமாகிக்கொண்டே வரும். இது ஓர் இலட்சிய நிலையை அடையும்போது, பலகோணம் ஓர் இழைந்த வரையாக மாறுகின்றது. இதற்கு நிகழ்வெண் வரை யென்று பெயர். நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைவதற்காகக் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இழைந்த வரையினால் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் வரை, ஏறத்தாழ நிகழ் வரையை ஒத்திருக்கும்.

4. **கீழின, மேலின வளர் நிகழ்வெண் வரைகள் :** பிரிவுகளின் மேல் மெய்யளவுகளை x அச்சிலும் அதற்கான கீழின வளர் நிகழ் வெண்களை y அச்சிலும் குறிப்பதால் கிடைக்கும் புள்ளிகளை நேர் கோடுகளால் சேர்த்தால் கீழின வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம்

கிடைக்கின்றது. இப் புள்ளிகளை இழைந்த வரையினல் சேர்ப்ப தால் கிடைக்கும் வரை கீழின ஓகைவ் (less than ogive) எனப் படும். இதற்கான பட்டியலும் வரைகளும் கீழே கொடுக்கப்பட் டிருக்கின்றன. இப் பட்டியலில் ஒவ்வொரு பிரிவும், மேல் மெய் யெல்லையையும், அதற்குக் கீழ் எத்தனை ராசிகளின் அளவுகள் இருக்கின்றன என்பதையும் காட்டுகின்றன.

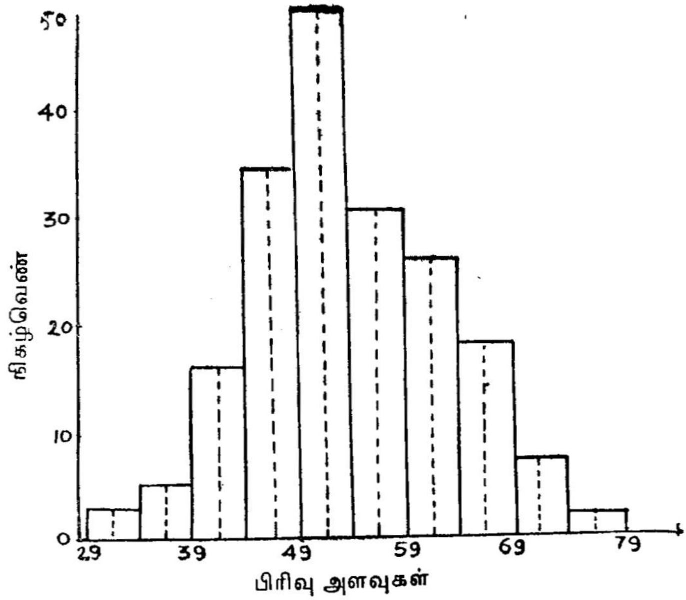
இதைப்போல், பிரிவுகளின் கீழ் மெய்யெல்லைகளை x அச்சிலும் அதற்கான மேலின வளர் நிகழ்வெண்களை y அச்சிலும் குறிப்ப தால் கிடைக்கும் புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் சேர்த்தால் மேலின வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம் கிடைக்கின்றது. இப் புள்ளிகளை இழைந்த வரைவினல் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் வரை, மேலின ஓகைவ் (greater than ogive) எனப்படும். இதற்கான பட்டியலில் ஒவ்வொரு பிரிவும் கீழ் மெய்யெல்லையையும் அதற்கு மேல் எத்தனை ராசிகளின் அளவுகள் இருக்கின்றன என்பதையும் காட்டுகின்றன.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கான புள்ளியியல் வரைபடங்கள் வரைக.

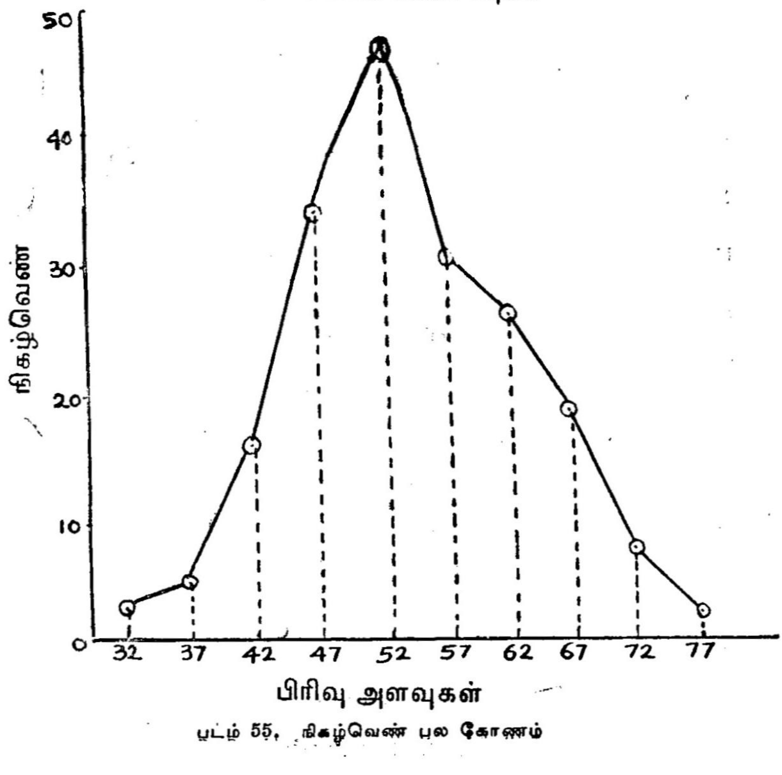
நிகழ்வெண்பரவல் : வரைபட விளக்கங்கள்

பிரிவு மெய்யெல்லைகள் x	பிரிவு மைய அளவுகள் x	நிகழ்வெண் f	கீழ்வளர் நிகழ்வெண்	மேல்வளர் நிகழ்வெண்
29.5 — 34.5	32	3	3	190
34.5 — 39.5	37	5	8	187
39.5 — 44.5	42	16	24	182
44.5 — 49.5	47	34	58	166
49.5 — 54.5	52	49	107	132
54.5 — 59.5	57	30	137	83
59.5 — 64.5	62	26	163	53
64.5 — 69.5	67	18	181	27
69.5 — 74.5	72	7	188	9
74.5 — 79.5	77	2	190	2
	மொத்தம்	190		

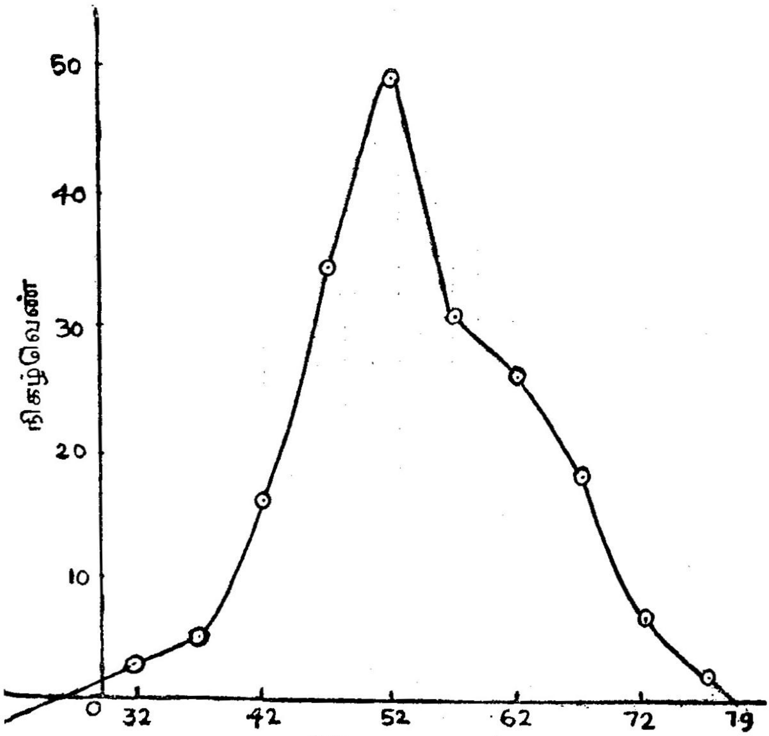
மொத்த ராசிகள்: 190 பிரிவலகு: 5



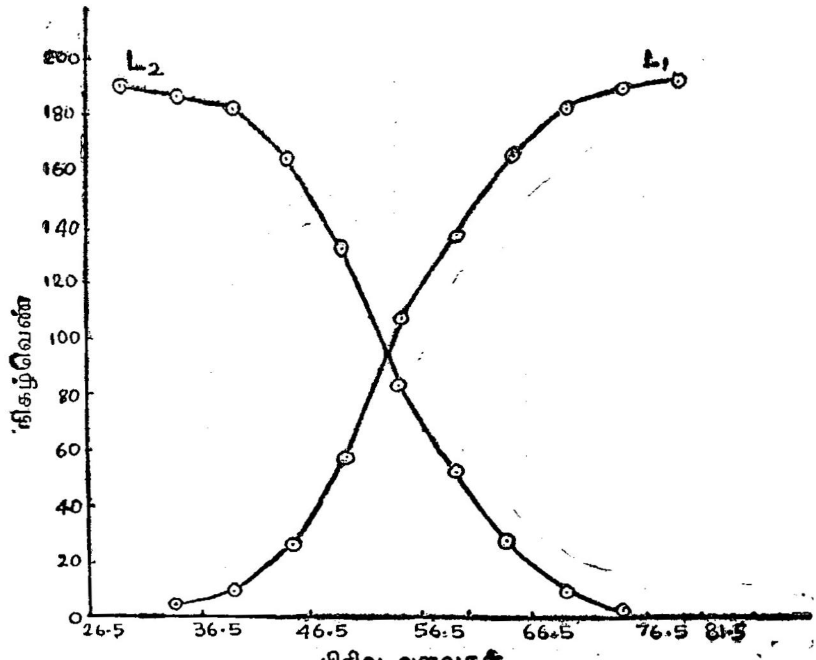
படம் 54. செவ்வகப் பட்டை வடிவம்



படம் 55. நிகழ்வெண் புல கோணம்



படம் 56. நிகழ்வெண் பிரிவு அளவுகள்



படம் 57. ஓகைவ் வரைகள்

கீழின, மேலின வளர் நிகழ்வெண் பல கோணங்கள் முறையே L_1, L_2 ஆகும்.

புள்ளிகளை இழைந்த வரையினால் சேர்ப்பதால் ஓகைவ் வரைகள் கிடைக்கின்றன.

மையப் போக்களவுகள் (Measures of central tendency): புள்ளியியலைச் சிலர் சராசரியியல் என்று குறிப்பிட்டார்கள் எனக் குறிப்பிட்டோம். உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின், குறிப்பிட்ட ஒரு பாடத்தில் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்ணை அவ் வகுப்பின் மதிப்பெண்ணாகவே நோக்குகின்றோம். வகுப்பின் தரத்தை, இதைக்கொண்டே மதிப்பிடுகின்றோம். சராசரி மதிப்பெண் பெரிய எண்ணாக இருப்பின் அவ் வகுப்பின் தரமும் உயர்ந்தது என்று மதிப்பிடுகின்றோம். இக் காரணத்தினால் 'சராசரி' மையப் போக்களவு என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது, இதில் முக்கியமான மூன்று பிரிவுகளைப்பற்றிக் கீழே காணலாம்.

அவை,

1. கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic mean);
2. மையநிலைச் சராசரி (Medium);
3. மீப்பு எண் சராசரி (Mode).

1. கூட்டுச் சராசரி: இதைப் பொதுச் சராசரி (common average) என்றும் கூறுவர். நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் இச் சராசரி பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

கொடுக்கப்பட்ட n எண்கள் x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_n$ என்றால், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n} \text{ அதாவது, } \frac{\text{எண்களின் கூட்டுத்தொகை}}{\text{அவற்றின் எண்ணிக்கை}}$$

என்று வரையறுக்கப்படுகின்றது.

உதாரணமாக, தொழிலாளர்களின் வார வருமானம் இங்கே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

தொழிலாளி	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
வருமானம் ரூ	80	80	90	100	100	100	120	120	160	160	200	250

இவர்களின் ஒருவார மொத்த வருமானம் ரூ. 1560

$\therefore$ சராசரி வருமானம் ரூ. $\frac{1560}{12}$ = ரூ. 130

இதைக் கணக்கியல் சார்ந்த சராசரியென்றும் கூறுவர். இந்தச் சராசரி, கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் சரியான விளக்கத்தை எந்த அளவிற்குக் கொடுக்கின்றது என்பது ஐயப்பாட்டிற்குரியது. இதை ஒரு மையப் போக்கு அளவு என்று கூறினாலும், இத் தொழிலாளர்களில் ஒருவருக்கேனும் ரூ 130 வார வருமானம் இல்லை. ஆகவே, தொழிலாளர் வருமானங்களின் மாதிரி அளவாக இதை எவ்வாறு கூற முடியும்? (இந்தக் காரணத்தினால் தோன்றியவை மற்ற இரண்டு சராசரிகளும் என்று கூறலாம்.)

நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி: பிரிவுகளின் மைய அளவுகள் x_1, $x_2 \ldots x_n$ என்றும் அவற்றின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2 \ldots f_n$ என்றும் கொள்வோம். இதில், முதல் f_1 ராசிகளில் ஒவ்வொன்றின் அளவும் x_1 எனக் கொள்வது பொருந்தும். இவற்றின் மொத்தம் $x_1 f_1$.

இதே போல் f_2 ராசிகளில் ஒவ்வொன்றின் அளவும் x_2 இவற்றின் மொத்தம் $x_2 f_2$.

இப்படியே மற்றப் பிரிவுகளிலுள்ள ராசிகளின் அளவுகளின் மொத்தத்தையும் கணிக்கலாம். ஆகவே, எல்லா ராசிகளின் மொத்தமும் சேர்ந்து $x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n$ ஆகின்றது.

$$\therefore \text{ கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots\ldots + x_n f_n}{\text{ராசிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$\text{அதாவது } \bar{x} = \frac{\sum_1^n x_r f_r}{\sum_1^n f_r} \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

குறிப்பு: $\bar{x} \Sigma f_r = \Sigma x_r f_r$

$$\text{அதாவது } \Sigma (f_r x_r - f_r \bar{x}) = 0$$

$$\text{அல்லது } \Sigma f_r (x_r - \bar{x}) = 0$$

சுருக்க முறையில் கூட்டுச் சராசரி காணல்: A என்பது ஏதாவது ஒரு வசதியான மூல அளவு என்று கொண்டால் (பொதுவாக இதை, மிகப் பெரிய நிகழ்வெண்ணுக்குரிய மைய அளவாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்),

$x_r = A + d^1{}_r$ என்று எழுதலாம்.

$d^1{}_r$ என்பது, பிரிவலகான (class interval) C-ன் மடங்காகவே எப்போதும் இருக்கும்.

எனவே, $x_r = A + C\,d_r$ என்க.

$$f_r\,x_r = A\,f_r + C\,d_r.\,f_r$$

ஆகவே, $\Sigma f_r\,x_r = A\,\Sigma f_r + C\,\Sigma f_r\,d_r$

இதிலிருந்து, $\dfrac{\Sigma f_r\,x_r}{\Sigma f_r} = A + C.\dfrac{\Sigma f_r\,d_r}{\Sigma f_r}$ ...... (ii)

இது கூட்டுச் சராசரிக்கான சூத்திரமாகும்.

பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் இவ்விரு முறைகளையும் விளக்கலாம்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணிக்க :

பிரிவு இடைவெளி x	பிரிவு மைய அளவுகள்	நிகழ்வெண் f	$x \times f$	$d_r = \dfrac{x_r - A}{C}$	$f_r\ d_z$
30 — 34	32	3	96	—4	—12
35 — 39	37	5	185	—3	—15
40 — 44	42	16	672	—2	—32
45 — 49	47	24	1128	—1	—24
50 — 54	52	50	2600	0	0
55 — 59	57	47	2679	1	47
60 — 64	62	26	1612	2	52
65 — 69	67	20	1340	3	60
70 — 74	72	7	504	4	28
75 — 79	77	2	154	5	10
	மொத்தம்	200	10970	—	197—83 =114

முதல் முறை : கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_r\,f_r}{\Sigma f_r}$

$$= \frac{10970}{200} = 54.85$$

இரண்டாவது முறை : கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = A + C\dfrac{\Sigma f_r\,d_r}{\Sigma f_r}$

இதில் $A = 52$ என்பது மிகப் பெரிய நிகழ்வெண்ணுள்ள 50-க்குரிய அளவாகும். இந்தச் சூத்திரப்படி

$$\bar{x} = 52 + 5 \times \frac{197 - 83}{200}$$

$$= 52 + 5 \times \frac{114}{200}$$

$$= 54.85$$

மையநிலைச் சராசரி : ராசிகளை அவற்றின் அளவுகளுக்கேற்ப வரிசைப்படுத்தி யமைத்தால் (ranking), அவ்வித அமைப்பில், நடு ராசியின் அளவுக்கு மைய நிலைச் சராசரி என்று பெயர்.

அதாவது, x_1, x_2,...... $x_{2n} + 1$ என்பவை $2_n + 1$ ராசிகளின் (ஒற்றைப்படை எண்) வரிசைப்படுத்தப்பட்ட அளவுகளினுல் இவற்றின் மைய நிலைச் சராசரி xn ஆகும்.

ஆனுல் x_1, x_2,......x_{2n} (இரட்டைப் படை) என்பவை வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ராசிகளின் அளவுகளானுல் $\frac{x_n + x_n + 1}{2}$ என்பது இவற்றின் மையநிலைச் சராசரியாகும்.

நிகழ்வெண் பரவலின் மையநிலைச் சராசரி : நிகழ்வெண் பரவல் ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட அமைப்பாதலால் பாதி ராசிகளின் அளவுகள் மைய நிலைச் சராசரிக்கு அதிகமாகவும் அடுத்த பாதி ராசிகளின் அளவுகள் இதற்குக் குறைவாகவும் இருக்கும். அதாவது, மொத்த ராசிகள் N என்ருல், வளர் நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$-க்குப் பொருத்தமான ராசியின் அளவு மையநிலைச் சராசரி யாகும். இதைக் கணிப்பதற்கு,

(1) மொத்த ராசிகளின் எண்ணிக்கை N என்ருல், $\frac{N}{2}$-க் கண்டுகொள்ளவேண்டும்.

(2) பட்டியலில் வளர் நிகழ்வெண் பத்தியை நிரப்ப வேண்டும்.

இதில் $\frac{N}{2}$ ராசியின் அளவு எந்தப் பிரிவில் இருக்கின்றதோ அதற்கு மையநிலைப் பிரிவு (Medium class) என்று பெயர். இதன் நிகழ்வெண் f என்றும் இப் பிரிவின் கீழ் எல்லை 'l_1' என்றும், m

என்பது மைய நிலைப் பிரிவிற்கு முந்திய பிரிவுவரையுள்ள கூட்டு நிகழ்வெண் என்றால்,

$$\text{மைய நிலைச் சராசரி } M = l_1 + C.\frac{\frac{N}{2}-m}{f} \text{ என்ற சூத்திரத்தின்}$$

உதவியால் கணிக்கப்படுகின்றது. (பிரிவலகு c-ஐ f சமபாகங்களாகப் பிரித்து இதில் ஒவ்வொரு ராசியின் அளவும் அதற்கு முந்தியதைவிட $\frac{c}{f}$ அளவு கூடுவதாகக் கொள்ளலாம்)

பின்வரும் உதாரணத்தால் இம் முறையை விளக்கலாம்.

மையநிலைச் சராசரி காண்க

பிரிவு மெய்யிடைவெளி x	நிகழ்வெண் f	வளர் நிகழ்வெண்
29·5 — 34·5	3	3
34.5 — 39.5	5	8
39.5 — 44.5	16	24
44.5 — 49.5	24	48
49.5 — 54.5	50	98
54.5 — 59.5	47	145
59.5 — 64.5	26	171
64.5 — 69.5	20	191
69.5 — 74.5	7	198
74.5 — 79.5	2	200

இதில் மொத்த நிகழ்வெண் $N = 200$

$$\therefore \frac{N}{2} = 100$$

நிகழ்வெண் பட்டியலில் 100-வது ராசியின் அளவு, 54·5—59.5 என்ற பிரிவில் இருக்கிறது. ஆகவே,

$l_1 = 54.5;\quad m = 98;\quad c = 5;\quad f = 47$

சூத்திரத்தின் மூலம் $M = 54.5 + 5\,\frac{100-98}{47}$

$= 54.5 + .21 = 54.71$

மீப்பு எண் சராசரி: ராசிகளின் அளவுகள் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்றால், இதில் அதிக முறைகள் மீண்டும் மீண்டும் வரும் அளவு (repeated most often) மீப்பு எண் சராசரியாகும்.

நிகழ்வெண் பரவலில் மீப்பு எண் சராசரி : இதில் மீப்பு நிகழ்வெண் f_i என்றால் இது காணப்படும் பிரிவு மீப்பு எண் பிரிவு (Modal class) எனப்படும். இப் பிரிவின் மைய அளவு x_i ஐ மீப்பு எண் சராசரியின் தோராய மதிப்பாகக் கொள்ளலாம்.

பின் வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதால் இதைக் காட்டிலும் சிறந்த அளவைப் பெற முடிகிறது.

$$\text{மீப்பு எண் சராசரி} = l_1 + \frac{c\,f_2}{f_1 + f_2}$$

இதில் l_1 என்பது மீப்பு எண் பிரிவின் கீழ் மெய்யளவு. f_1, f_2 முறையே மீப்பு எண் பிரிவிற்கு, முந்திய, அடுத்த பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்கள். C-பிரிவலகு.

நிகழ்வெண் பரவலில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மீப்பெரும் அளவுகள் இருப்பின், மீப்பு எண் சராசரியைக் கீழ்க்கண்ட அனுபவ வாய்பாட்டின் (empirical formula) மூலம் கணிக்கலாம்.

கூட்டுச்சராசரி—மீப்புச் சராசரி = 3 (கூட்டுச் சராசரி—மைய நிலைச் சராசரி).

உதாரணமாக, மேலே மைய நிலைச் சராசரியைக் கண்டு பிடிக்கப் பயன்படுத்திய நிகழ்வெண்பரவலில்.

மீப்பு எண் 50. இதற்கான பிரிவு: 49·5 – 54·5.

ஆகவே, $l_1 = 49.5$

$f_1 = 24,\ f_2 = 47,\ c = 5$

$\therefore$ மீப்பு எண் சராசரி $= 49.5 + \frac{5 \times 47}{24+47} = 49.5 + \frac{235}{71}$

$= 49.5 + 3.31$

$= 52.81$

அனுபவ வாய்பாட்டின் மூலம் கணிக்க :

கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = 54 \cdot 85$

மையநிலைச் சராசரி $M = 54 \cdot 71$.

ஆகவே, மீப்பு எண் சராசரி P என்று கொண்டால்,

$$\bar{x} - P = 3[\bar{x} - M]$$

$$\therefore P = 3M - 2\bar{x} = 3 \times 54 \cdot 71 - 2 \times 54 \cdot 85$$

$$= 164 \cdot 13 - 109 \cdot 70$$

$$= 54 - 43$$

பரவல் அளவைகள் (Measures of dispersion) : ஒரு சில ராசிகளின் அளவுகள் சமமாக இருந்தாலும், பொதுவாக இவ்வளவுகள் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்டே இருக்கின்றன. உதாரணமாக, கீழே கொடுக்கப்பட்டவை ஒரு சில மாணவரின் பாட மதிப்பெண்கள் எனக் கொள்வோம்.

20, 30, 30, 45, 47, 50, 53, 55, 60, 60, 65. 85.

இவற்றின் சராசரி அல்லது மையப் போக்களவு 50 என்று கூறினால் (இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 50), இந்த அளவினின்று வேறுபட்ட பெரிய அளவுகளையும், சிறிய அளவுகளையும்பற்றி அறிய வாய்ப்பில்லை. ராசிகளின் அளவுகள் மையப் போக்கிற்கு அண்மையில் செறிந்தோ, சேய்மையில் பரந்தோ இருக்கலாம். இதற்குப் பொதுவாகப் பரவுகை (scatter) என்று பெயர். இதைக் கணிப்பதற்கு ஏற்பட்ட அளவுகளே பரவல் அளவைகளாகும்.

பொதுவாக வழக்கிலிருக்கும் பரவல் அளவைகளாவன:

1. வேறுபாட்டெல்லை (Range).
2. கால்மான விலக்கம் (Quartile deviation).
3. திட்ட அளவு விலக்கம் (Standard deviation).
4. சராசரி விலக்கம் (Mean deviation).

1. வேறுபாட்டெல்லை: ராசிகளின் மிகப் பெரிய அளவிற்கும் மிகச் சிறிய அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் அளவே வேறுபாட்டெல்லை என்று ஏற்கெனவே பார்த்தோம்.

நிகழ்வெண் பரவலில்,

வேறுபாட்டெல்லை = கடைசிப் பிரிவின் மேல்எல்லை — முதல் பிரிவின் கீழ்எல்லை என்று தோராயமாகக் கணிக்கலாம்.

2. கால்மான விலக்கம்: ஒன்றிரண்டு எல்லை ராசிகளின் அளவுகள் மேலே கூறப்பட்ட வேறுபாட்டெல்லையின் அளவைப் பெரிதும் பாதிப்பதால், இதைக் காட்டிலும் சிறந்த பரவல் அளவையாக, கால்மான விளக்கம் கருதப்படுகின்றது.

கால்மான விளக்கம் $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்ற சூத்திரத்தில், வரிசைப்படுத்தப்பட்ட அளவுகளில் அல்லது நிகழ்வெண் பரவலில் Q_1 என்பது கீழ்க்கால்மானம் (lower of first quartile) எனப்படும். Q_1-க்குக் கீழே மொத்தத்தில் கால் பங்கு ராசிகளின் அளவுகள் இருக்கும். இதே போல் Q_3 என்பது மேல் கால்மானம் (upper or third quartile). இதற்கு மேல் மொத்தத்தில் கால் பங்கு ராசிகளின் அளவுகள் இருக்கும். (கீழ்க் கால்மானம், மைய நிலைச் சராசரி, மேல் கால்மானம் இம் மூன்றும் மொத்த ராசிகளை நான்கு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன.)

Q_1, Q_3 ஐக் கணிக்கும் முறை: இவற்றைக் கணிக்கும் முறை, மையநிலைச் சராசரியைக் கணிக்கும் முறையை ஒத்ததாகும். நிகழ்வெண் பரவலில்,

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f} C$$

இதில் N என்பது மொத்த ராசிகள். $\frac{N}{4}$-வது ராசியின் அளவு அமையும் பிரிவிற்கு முதல் கால்மானப் பிரிவு என்று பெயர். இதன் கீழ்மெய்யளவு l_1, நிகழ்வெண் f, இதற்கு முந்திய பிரிவு வரையுள்ள வளர் நிகழ்வெண் m. இதே போல்,

$$Q_3 = l_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} C$$

இதில் $\frac{3N}{4}$-வது ராசியின் அளவு அமையும் பிரிவிற்கு மூன்றும் கால்மானப் பிரிவு என்று பெயர். இதம் கீழ்மெய்யளவு l_1, நிகழ் வெண் f, இதற்கு முந்திய பிரிவுவரையுள்ள வளர் நிகழ்வெண் m.

குறிப்பு: மொத்தப் பரவலையும் 100 சம பாகங்களாகப் பிரித் தால் ஒவ்வொன்றிற்கும் சதவிகித அளவு (percentile) என்று பெயர். எனவே,

$$Q_1 = 25\text{-வது சதவிகித அளவு (25th percentile)}$$

$$M = Q_2 = 50\text{-வது சதவிகித அளவு (50th percentile)}$$

$$Q_3 = 75\text{-வது சதவிகித அளவு (75th percentile).}$$

கால்மான விலக்கத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கலாம்.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}{2}$$

அதாவது, M-லிருந்து Q_3-ம், Q_1-ம் விலகும் மொத்த அளவின் சராசரி Q ஆகும். ஆகவே, ராசி அளவுகள் மையநிலைச் சராசரியைச் சுற்றி எவ்விதம் செறிந்திருக்கின்றன என்பதை அறிய இது ஓர் இணையற்ற அளவாகும். அளவுகள் செறிந்திருந்தால் Q சிறிதாகவும், சிதறியிருந்தால் Q பெரிதாகவும் இருக்கும்.

$Q_3 - Q_1$ என்பதை இடைக் கால்மான வேறுபாட்டெல்லை (inter-quartile range) என்றும் $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பதை அரை இடைக் கால்மான வேறுபாட்டெல்லை என்றும் கூறலாம்.

சராசரி விலக்கம்: கால்மான விலக்கம் வேறுபாட்டெல்லையைக் காட்டிலும் சிறந்த பரவல் அளவானாலும், இதிலும் குறைகள் உண்டு. Q_1, Q_3 இரண்டுமே இடஞ் சார்ந்த அளவுகளாகும் (localised). இவற்றின் இடைப்பட்ட ராசிகளின் பரவலால் இவை பாதிக்கப்படுவதேயில்லை. ஆகவே, ராசிகள் எல்லாவற்றின் அளவுகளையும் சார்ந்து அமையக் கூடியதாக சராசரி விலக்கம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

$\bar{x}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சராசரியைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். (இது, கூட்டுச் சராசரி, மைய நிலைச் சராசரி, அல்லது மீப்பு எண் சராசரி ஆகிய இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கலாம்.)

$\frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})}{\Sigma f_r}$ என்பது இந்தச் சராசரியைச் சார்ந்த விலக்கமாகும். ஆனால், ஏற்கெனவே நிரூபிக்கப்பட்டபடி, $\bar{x}$ என்பது கூட்டுச் சராசரியென்றால்,

$\Sigma fr\ (x_r - \bar{x}) = 0$ ஆகும். அதாவது விலகலே இல்லை என்ற முரண்பாடான முடிவைக் கொடுக்கும். ஆகவே, விலக்கங்களின் குறிகளைக் கருதாது அவற்றின் தனி அளவுகளை (absolute values) மட்டிலுமே எடுத்துக்கொண்டால், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து

சராசரி விலக்கம் $\frac{\Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid}{\Sigma f_r}$ என்று எழுதலாம்.

இதில் $\bar{x}$ எந்தச் சராசரியோ அதைப் பொறுத்தே இந்தச் சராசரி விலக்கமும் அமையும்.

திட்ட அளவு விலக்கம் : சராசரி விலக்கத்தில் நேர்மறை, எதிர்மறை எண்களின் கலப்பினுல் ஏற்பட்ட இடர்ப்பாடுகளைத் தவிர்க்கும் விதத்தில் திட்டஅளவு விலக்கம் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. ஆனுல், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஏற்படும் விலகல் மட்டுமே பொதுவாகக் கணிக்கப்படுகின்றது. விலக்கங்களில் ஏற்படும் குறி மாறுபாட்டைத் தவிர்ப்பதற்காக இவ் விலக்கங்கள் வர்க்கமாக்கப்படுகின்றன. $\bar{x}$ என்பது கூட்டுச் சராசரியும், σ என்பது திட்ட அளவு விலக்கமுமானுல்,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{\Sigma f_r} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{இதிலிருந்து } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{\Sigma f_r}}$$

கணிப்பு முறை : கூட்டுச் சராசரியைக் கணிப்பதற்கு எடுத்துக் கொண்டது போல், A என்பது ஒரு வசதியான மூல அளவு என்று கொண்டால்,

$$\begin{aligned}(x_r - A)^2 &= (x_r - \bar{x} + \bar{x} - A)^2 \\ &= (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 + 2(x_r - \bar{x})(\bar{x} - A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \Sigma f_r (x_r - A)^2 &= \Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2 + \Sigma f_r (\bar{x} - A)^2 \\ &\quad + 2 \Sigma f_r (\bar{x}_r - \bar{x})(\bar{x} - A) \\ &= \Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 \\ &\quad \Sigma f_r + (\bar{x} - A) \Sigma f_r (x_r - \bar{x})\end{aligned}$$

இதில், $\Sigma f_r (x_r - \bar{x}) = 0.$

$$\text{ஆகவே, } \frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{\Sigma f_r} = \frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{\Sigma f_r} + (\bar{x} - A)^2$$

$$\text{ஆனுல், } \bar{x} = A + C \frac{\Sigma f_r d_r}{\Sigma f_r}$$

$$\therefore \bar{x} - A = C. \frac{\Sigma f_r d_r}{\Sigma f_r}$$

$$\text{எனவே, } \frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{\Sigma f_r} = \frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{\Sigma f_r} + \left(C. \frac{\Sigma f_r d_r}{\Sigma f_r}\right)^2$$

$$\text{இதில், } \frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{\Sigma f_r} = s^2 \text{ என்றும் } C. \frac{\Sigma f_r d_r}{\Sigma f_r} = d$$

என்றும் கொண்டால் $s^2 = \sigma^2 + d^2$

அல்லது $\sigma^2 = s^2 - d^2$

பரவல் அளவுகளைக் கணிக்கும் முறை பின்வரும் உதாரணத்தால் விளக்கப்படுகின்றது.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கான பல்வேறு பரவல் அளவைகளைக் கணிக்க:

பிரிவு மெய் இடைவெளி	பிரிவு மைய அளவுகள் x	நிகழ்வெண் f	வளர் நிகழ்வெண்
14.5 — 20.5	17.5	3	3
20.5 — 26.5	23.5	7	10
26.5 — 32.5	29.5	11	21
32.5 — 38.5	35.5	18	39
38.5 — 44.5	41.5	25	64
44.5 — 50.5	47.5	31	95
50.5 — 56.5	53.5	42	137
56.5 — 62.5	59.5	38	175
62.5 — 68.5	65.5	33	208
68.5 — 74.5	71.5	22	230
74.5 — 80.5	77.5	8	238
80.5 — 86.5	83.5	2	240

1. வேறுபாட்டெல்லை

வேறுபாட்டெல்லை = கடைசிப் பிரிவின் மேல்எல்லை — முதல் பிரிவின் கீழ் எல்லை

$= 86.5 - 14.5 = 72$

2. கால்மான விலக்கம்

$$N = 240 \quad \therefore \frac{N}{4} = 60, \quad \frac{3N}{4} = 180$$

முதல் கால்மானப் பிரிவு 38.5 — 44.5

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} C$$

இதில், $l_1 = 38.5$, $\frac{N}{4} = 60$, $m = 39$, $f = 25$, $C = 6$,

$$\therefore\ Q_1 = 38.5 + \frac{60-39}{25} \times 6 = 43.54$$

மூன்றும் கால்மானப் பிரிவு 62.5—68.5

$$Q_3 = l_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} C$$

இதில், $l_1 = 62.5,\ \frac{3N}{4} = 180,\ m = 175,\ f = 33,\ C = 6.$

$$\therefore\ Q_3 = 62.5 + \frac{180 - 175}{33}\ 6 = 63.41$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{63.41 - 43.54}{2} = \frac{19.87}{2}$$

$$= 9.98$$

3. சராசரி விலக்கம்

சராசரி விலக்கமும் திட்ட அளவு விலக்கமும் கணிக்கும் வகையில் பின்வரும் அட்டவணை தயார் செய்யப்பட்டுள்ளது (மூல அளவு $A = 53.5$ என எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது).

பிரிவு மைய அளவுகள் x_r	நிகழ் வெண் f_r	$\frac{x_r - A}{C} = d_r$	$f_r\ d_r$	$f_r\ d_r^2$	$\lvert x_r - \bar{x} \rvert$	$f_r \lvert x_r - \bar{x} \rvert$
17.5	3	—6	—18	108	35.5	106.5
23.5	7	—5	—35	175	29.5	206.5
29.5	11	—4	—44	176	23.5	258.5
35.5	18	—3	—54	162	17.5	315.0
41.5	25	—2	—50	100	11.5	287.5
47.5	31	—1	—31	31	5.5	170.5
53.5	42	0	0	0	.5	21.0
59.5	38	1	38	38	6.5	247.0
65.5	33	2	66	132	12.5	412.5
71.5	22	3	66	198	18.5	407.0
77.5	8	4	32	128	24.5	196.0
83.5	2	5	10	50	30.5	61.0
மொத்தம்	240	—	212−232 = −20	1298	—	2689.0

$$\bar{x} = A + C.\frac{\Sigma f_r d_r}{\Sigma f_r} = 53.5 + 6 \times \frac{-20}{240}$$

$$= 53$$

திட்ட அளவு விலக்கம் σ என்றால், சூத்திரப்படி,

$$\sigma^2 = s^2 - d^2 = \left[\frac{1298}{240} - \left(\frac{-20}{240}\right)^2\right] 6^2$$

$$= (5.402)\, 6^2$$

$$\therefore\ \sigma = \sqrt{6^2 \times 5.402} = 6 \times 2.324$$

$$= 13.944$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம்

அட்டவணையின் கடைசிப் பத்தியிலிருந்து

$\Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid =$

$\therefore$ சராசரி விலக்கம் $\dfrac{\Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid}{\Sigma f_r} = \dfrac{2689}{240} = 11.204$

குறிப்பு: ராசிகளின் எண்ணிக்கை குறைவாயிருந்தால் அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட அளவு விலக்கமும் காண மேற்கண்ட விதியையே பயன்படுத்தலாம். ஆனால் $f_r = 1$ என்றும், $C = 1$ என்றும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

உடன் தொடர்புக்கெழு (Correlation)

எடுத்துக்கொண்ட பல ராசிகளைச் சார்ந்த ஏதேனும் ஓர் அளவுபற்றியும் அதை வெவ்வேறு முறைகளில் எவ்வாறு பாகு படுத்தி அறியலாம் என்றும் பார்த்தோம். ஆனால், இரண்டு வெவ் வேறு வகையான அளவுகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு கொண் டிருப்பதை நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் காணலாம். உதாரண மாக, மனிதர்களின் எடையும், உயரமும்; ஒரு நாட்டில் பெய்யும் மழையின் அளவும் பயிர் விளைச்சலும், கணிதப் பாடத்திலும், வர லாற்றுப் பாடத்திலும் மாணவர்களுடைய ஆற்றல்கள்; மொழி களிலும் அறிவியலிலும் மாணவர்களின் ஆர்வம், போன்றவை இவ்விதத் தொடர்பு கொண்டவையாகும். இத்தகைய அளவு களை ஆராயும்போது, இவற்றிற்குள்ள தொடர்பு நேரிடை யானதா, எதிரிடையானதா அல்லது தொடர்பு இருப்பதாக நினைப்பது வெறும் கற்பனையா என்று வரையறை செய்ய வேண்டி யது அவசியம். ஆகவே, தொடர்பின் வகையை அளப்பதற்கான உடன் தொடர்புக் கெழு (coefficient of correlation) ஒன்றைக் காணலாம்.

இரு உடன் மாறிகளின் அளவுகள் முறையே x, y என்று எடுத்துக்கொண்டால், உடன் தொடர்புக் கெழு

$r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sigma_n \sigma_y}$ என்று எடுத்துக்கொள்வது x, y இரண்டிற்கு முள்ள தொடர்பைத் தெரிந்துகொள்ள ஒரு வழியாகும்.

இதில் $\bar{x}$ என்பது x அளவின் கூட்டுச் சராசரி, $\bar{y}$ என்பது y அளவின் கூட்டுச் சராசரி, σ_x, σ_y என்பவை முறையே இவற்றின் திட்ட அளவுப் பரவல்கள், N என்பது கொடுக்கப்பட்ட (x,y) அளவு களின் எண்ணிக்கை.

இதில் r-ன் மதிப்பு எப்போதும் -1-க்கும் $+1$-க்கும் மத்தியில் இருக்கும். இவற்றில்,

(1) $r = 1$ என்றால் மாறிகள் முற்றும் நேர்த் தொடர்புடையன என்றும்; (2) $r > 0$ என்றால் மாறிகள் நேர்த் தொடர்புடையன என்றும்; (3) $r = -1$ என்றால் மாறிகள் முற்றும் எதிர்த் தொடர்புடையன என்றும்; (4) $r < 0$ என்றால் மாறிகள் எதிர்த் தொடர்புடையன என்றும் கருதப்படுகின்றது.

தொடர்பு நேர்க்கோடுகள் (Regression lines): x, y அளவுகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் புள்ளிகளாகக் குறித்தால் இப் படத்திற்குப் பரவல் படம் (scatter diagram) என்று பெயர். மாறிகள் இரண்டும் நேர்த் தொடர்புடையவையானல் இப் புள்ளிகள், $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளிவழியேயும், முதலாம்,—மூன்றும் கால் பிரிவுகளின் (I—III Quadrants) வழியே செல்வதுமான ஒரு நேர்க் கோட்டில் அமையும். அல்லாமல், இம் மாறிகள் எதிர்த் தொடர்புடையவையானல், இப் புள்ளிகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியேயும், இரண்டாம் நான்காம் கால் பிரிவுகளின் வழியே செல்வதுமான ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும். இந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r . \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \quad \text{.........(1)}$$ அல்லது

$$\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = r . \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} \quad \text{.........(2)}$$ என்று கொள்ளலாம்.

இவற்றில் (1)-க்கு 'x-ன் மேல் y' என்றும், (2)-க்கு 'y-ன் மேல் x' என்றும் பெயர். இவற்றிற்கு மாறிகளின் தொடர்பு நேர்க் கோடு கள் என்று பெயர்.

வரிசை உடன் தொடர்பு (Rank correlation): மாறிகளின் அளவுகளை அப்படியே எடுத்துக்கொள்ளாமல் அவற்றின் வரிசைத்

தரங்களை (ranks) அடிப்படையாகக்கொண்டு தொடர்புக் கெழுவைக் காணலாம். மேலும், அளந்து மதிப்பிடமுடியாத சில பண்பு சார்ந்த மாறிகளை [உதாரணமாக, அறிவுக் குறியெண் I. Q; பொது அறிவு, அழகு முதலிய பண்புகள்] அவற்றிற்கான மதிப்பிடம் (rank) கொடுத்து அவற்றின் வரிசை உடன் தொடர்பைக் கணிக்கலாம். இதற்கான ஸ்பியர்மென் (Spearman) சூத்திரமாவது :

$$r = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{N(N^2 - 1)}$$

இதில் N என்பது எடுத்துக்கொண்ட மாறிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை, d என்பது மாறிகளின் வரிசைத்தர வேறுபாடு. கீழே கொடுக்கப்பட்டிருப்பது A, B, C, D, E என்ற ஐந்து மாணவரின் அறிவியல், வரலாறு ஆய்வுகளுக்கான மதிப்பெண்கள். இப் பாடங்களில் மாணவருக்கு ஒரேவிதமான அக்கறை இருக்கிறதா?

மாணவர்	விஞ்ஞான மதிப்பெண்	அறிவியல் மதிப்பெண்	விஞ்ஞான மதிப்பிடம் x	அறிவியல் மதிப்பிடம் y	$x-y=d$	d^2
A	60	33	1	1	0	0
B	51	30	2	2	0	0
C	35	20	5	5	0	0
D	40	26	4	4	0	0
E	43	28	3	3	0	0
					மொத்தம்	0

$r = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{N(N^2 - 1)} = 1.$ இவை முற்றும் நேர்த் தொடர்புடையவை. ஆகவே, இந்த ஐந்து மாணவருக்கும் இப் பாடங்களில் ஒரேமாதிரியான ஆர்வம் இருப்பதாகத் தெரிகின்றது.

எதிரிடை உடன் தொடர்பு : ஐந்து மாணவர்களின் ஆங்கிலம் தமிழுக்கான ஆய்வு மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன,

மாணவர்களுக்கு இப் பாடங்களில் உள்ள ஆர்வம் எத்தகையது?

மாணவர்	ஆங்கிலம் மதிப்பெண்	தமிழ் மதிப்பெண்	ஆங்கிலம் மதிப்பிடம் x	தமிழ் மதிப்பிடம் y	$x-y=d$	d^2
A	62	30	1	5	−4	16
B	44	62	4	2	2	4
C	59	56	2	4	−2	4
D	48	60	3	3	0	0
E	40	70	5	1	4	16
						மொத்தம் 40

$$r = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 40}{5(5^2-1)} = -1$$

ஆகவே, மாறிகள் முற்றிலும் எதிர்த் தொடர்புடையன. மாணவர்களுக்கு இப் பாடங்களில் முரண்பட்ட ஆர்வம் இருப்பதாகத் தெரிகின்றது.

தொடர்பற்றவை : ஐந்து மாணவர்களின் பூகோளம், வரலாற்றுக்கான ஆய்வு மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. மாணவர்களுக்கு இப் பாடங்களில் உள்ள ஆர்வம் எத்தகையது ?

மாணவர்	வரலாறு மதிப்பெண்	பூகோளம் மதிப்பெண்	வரலாறு மதிப்பிடம் x	பூகோளம் மதிப்பிடம் y	$x-y=d$	d^2
A	70	46	1	4	−3	9
B	62	48	2	3	−1	1
C	53	50	3	2	1	1
D	50	67	4	1	3	9
E	48	36	5	5	0	0
						மொத்தம் 20

$r = 1 - \frac{6 \times 20}{5\,(5^2 - 1)} = 0$. ஆகவே, மாணவர்களுக்கு இப் பாடங்களில் உள்ள ஆர்வம் தொடர்பற்றது.

ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களுக்கு அறிவியல், வரலாறு ஆகிய இரு பாடங்களிலும் கிடைத்த மதிப்பெண்களும், அவற்றிற்கான வரிசை உடன் தொடர்பு கணிக்கும் விதமும் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

வரிசை எண்	x	y	வரிசைத் தரங்கள் R_1	R_2	d $R_1 \sim R_2$	d^2
A	73	32	1	7.5	6.5	42.25
B	68	32	2	7.5	5.5	30.25
C	53	26	3	10	7	49.00
D	48	35	4.5	6	1.5	2.25
E	48	29	4.5	9	4.5	20.25
F	33	43	6	5	1	1.00
G	32	49	7	3	4	16.00
H	27	55	8	1	7	49.00
I	20	49	9	3	6	36.00
J	18	49	10	3	7	49.00
						$\Sigma d^2 = 295$

$$\gamma = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n\,(n^2 - 1)} = 1 - \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{59}{\cancel{295}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \times \underset{33}{\cancel{99}}}$$

$$= 1 - \frac{59}{33} = 1 - 1.8$$

வரிசை உடன் தொடர்புக்கெழு = − 0.8

சராசரியின் பயன்கள்: சிறந்த ஒரு சராசரியானது (1) முழுத் தொகுதியைப்பற்றியும் சுருக்கமாகத் தெரிவிக்கவேண்டும்; (2) பல பகுதிகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப் பயன்படவேண்டும். எனவே, ஒரு சிறந்த சராசரி, கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பண்புகளைப் பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.

1. உறுதியாக விவரிக்கக் கூடிய விதியையொட்டி வரையறுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

2. ஊகத்தால் மதிப்பிடப்பட்ட அளவாக இருத்தல் கூடாது.

3. எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகளையும்கொண்டு கணக்கிடப்படுவது விரும்பத்தக்கது.

4. சுலபமாகவும், வேகமாகவும் கணிக்கக் கூடியதாயிருத்தல் வேண்டும்.

வெவ்வேறு சராசரிகளை பயன்படுத்தும் சந்தர்ப்பங்கள்

கூட்டுச்சராசரி : பொதுவாக, எண்கணிப்புகளுக்குக் கூட்டுச் சராசரியே சிறந்ததாகும். ஆயினும், கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள் எல்லாவற்றையும் கொண்டு கணிக்கப்படும் இச் சராசரி ஒரு அளவுடனும் பொருந்தாமலும் இருக்கலாம். அதாவது, இச் சராசரி பெரும்பாலும் கணிதச் (mathematical) சார்புடையது. ஓர் ஆற்றைக் கடந்து செல்வதற்கு, அறிவியலார் ஒருவர் ஆற்றின் சராசரி ஆழத்தைக் கணக்கிட்டு அந்த ஆற்றைக் கடக்க முயன்றதாகக் கூறுவார்கள். சராசரியைப் பயன்படுத்தும் விதத்தை அறிந்து கொள்வதன் தேவையை இது வலியுறுத்துகின்றது. மிகச் சிறிய அல்லது மிகப் பெரிய அளவுகளால் கூட்டுச்சராசரி அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுவதால் அவ்விதமான அளவுகள், மிகுந்த வேற்றுமையுடன் வரும்போது மற்றச் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தலாம். உதாரணமாக, ஒரு தேர்வில் ஒரு மாணவன் 5 பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 90, 85, 100, 70, 75 என்றால்

சராசரி மதிப்பெண் $\dfrac{90 + 85 + 100 + 70 + 75}{5} = 84$

என்பது பொருந்தும். ஆனால், மற்றொரு மாணவன் 4, 23, 33, 31, 41 என்ற மதிப்பெண்கள் பெற்றிருந்தால் கூட்டுச் சராசரியைக் காட்டிலும் இடைநிலைச் சராசரியே ஓரளவு ஏற்றதாகும். அதாவது, மிகப் பெரிய அளவும் மிகச் சிறிய அளவும் அதிக வேற்றுமையுள்ளவையாயிருந்தால் மற்றச் சராசரிகளைக் கணிக்கலாம். அல்லது, பல அளவுகள் ஒன்றாயிருந்தால் முகடு பொருத்தமான சராசரியாகும். அவ்வாறில்லையெனில் இடைநிலைச் சராசரியே சிறந்த சராசரியாகும்.

ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை நோக்கும்போது பொதுவாக அவர்களில் அநேகம் பேர் என்ன உயரம் இருப்பார்களோ அதுதான் கண்ணைக் கவரும். இது எந்த விதமான அளவுகளுக்கும் (quantities) பொருந்தும். ஆகவே, முகடு தான் இப்படிப்பட்ட

இடங்களில் சிறந்த சராசரியாகும். 'ரெடிமேட்' (Ready made) ஆடை தைப்பவன், அல்லது காலணி தயாரிப்பவன், மனிதரின் கூட்டுச் சராசரி அளவுகளுக்கு இவற்றைச் செய்வானுனல் அவன் செய்த பொருள்கள் யாருக்கும் பயன்படாமல் போகவும் வாய்ப் புண்டு. இவ்விதச் சந்தர்ப்பங்களில் முகடு மிகச் சிறந்த சராசரி யாகும். கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கவனிக்க:

உதாரணம்

1. ஒரு தெருவிலுள்ள சில குடும்பங்களில் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை:

குழந்தைகள்	குடும்பங்கள்
ஒன்றுமில்லை	4
1	3
2	12
3	5
4	3
7	1

இங்கு முகடு பொருத்தமான சராசரியாகும்.

2. ஒரு தோட்டத்திலுள்ள சில மரங்களின் உயரங்கள்:

14மீ, 13·5மீ, 2மீ, 10மீ, 15மீ, 13மீ, 1·5மீ.

இடைநிலைச் சராசரியே இதற்குப் பொருந்தும்.

3. ஒரு வாரத்தில் குறிப்பிட்ட ஒரு சாலையில் ஏற்பட்ட விபத்துகள்:

திங்கள்	11
செவ்வாய்	8
புதன்	7
வியாழன்	5
வெள்ளி	10
சனி	14
ஞாயிறு	15
மொத்தம்	70

கூட்டுச் சராசரி — 10.

இதில் மிகப்பெரிய அளவுக்கும், மிகச்சிறிய அளவுக்கும் அதிக வேற்றுமையில்லை, எனவே, இதற்குக் கூட்டுச் சராசரி கணிக்கலாம்.

இரண்டாம் பகுதி

8. பாடப்பொருள்

வடிவியல் கற்பித்தல் முறை

[இப் பகுதியில், IX, X, XI வகுப்புகளுக்குரிய கணிதப் பாடத்தின் சில முக்கியப் பகுதிகளும், விளக்கங்கள் தேவையான சில இடங்களும் ஆங்காங்கே விரிவாக எழுதப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களுக்கு ஆர்வமூட்டும் வகையில் நெகிழ்வடிவியலும், பின்னல் அணியும் இப் பகுதியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.]

வடிவ கணித மூலப் பொருள்களைத் தேர்ந்தளித்தல்

1. பழக்க வழக்கங்கள் மூலமாகவும், சோதனை முறைகள் மூலமாகவும் அறியப்பட்ட பல செய்திகளையும், அவை அறியப் பட்ட முறை அல்லது வரிசைப்படியே அறிமுகப்படுத்தினால்தான் மாணவர்கள் அவற்றில் நல்ல தேர்ச்சிபெற முடியும்.

2. முடிந்த வரையில், எளிதான பகுதிகளைக் கற்றுக் கொடுத்த பின்னரே கடினமான பகுதிகளைக் கற்றுத்தர வேண்டும்.

3. வடிவ கணிதம் வளர்ச்சியுற்ற நிலைகளைத் தழுவியே பாடப் பகுதிகளை அமைக்கவேண்டும்.

4. அறிவுச் செய்திகள் வாழ்க்கைத் தொடர்புடையதாக இருந்தால் மாணவர்கள் முழு அக்கறை காட்ட வழியுண்டு. ஆகவே, அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுவதும், மாணவர்களுக்கு அவசியமானதும், தாங்களாகவே பயன்படுத்துவதுமான உண்மை களை முதலில் கற்றுத்தர வேண்டும்.

5. எண்கணித முறையைப் போலவே, வடிவ கணித முறை களையும் படிப்படியாகவும், நிதானமாகவும் கற்றுத் தர வேண்டும்.

6. கூடுமானவரை வடிவகணிதத்தை மற்றப் பாடங் களுடனும் இயற்கையில் காணப்படும் உண்மை நிகழ்ச்சிகளுடனும் தொடர்புபடுத்திக் கற்பித்தல் வேண்டும்.

7. தருக்க அடிப்படையில் மட்டுமன்றி, உளவியல், மனநிலை அடிப்படையிலும் பாடத்தை வரிசைப்படுத்திக் கற்பித்தல் வேண்டும்.

கணிதப் பாடத்தின் வளர்ச்சி நிலையை நோக்கும்போது வடிவ கணிதத்திற்குப் பின்னரே இயற்கணிதம் வளர்ந்தது என அறிகிறோம். ஆகவே, வடிவ கணிதக் கல்வியை முதலில் தொடங்குவதே மன வளர்ச்சிக்கு ஏற்றதாகும்.

அடிப்படை வடிவ கணிதத்தின் தொடக்க கால வளர்ச்சி

எளிய முறையில் எழுதப்பட்ட வடிவப்படங்கள், வரைவு படங்கள் (designs) ஆகியவற்றின் மூலமாகவே வடிவகணிதம் தொடங்கியதாகக் கணித வரலாற்று ஆசிரியர்கள் கூறுகின்றனர். இவ் வுருவங்களைப் பொதுவாக அலங்காரங்களுக்காகப் பயன் படுத்தி வந்தனர். அலங்காரங்களுக்காகப் பயன்படுத்தப்பட்ட கரடுமுரடான வடிவச் சித்திரப் படங்களை மெக்சிகோ, சைனு, எகிப்து, இந்தியா முதலிய நாடுகளிலுள்ள பண்டைக்கால நினைவுச் சின்னங்களில் காணலாம். இவ் வலங்காரப் படங்கள், துணிகளிலும், தொங்கு சீலைகளிலும், கம்பளங்களிலும்கூடப் பயன்படுத்தப் பட்டன. முதலில் இணைகோடுகளை மட்டுமே பயன்படுத்தி இவ் வடிவப் படங்கள் போடப்பட்டாலும், போகப் போக நாற்கர வடிவங்கள், வட்ட வடிவங்கள் மற்றும் பலதர வடிவங்களும் சிறந்த முறையில் பயன்படுத்தப்பட்டன. இவ் வளர்ச்சி படிப்படி யாக இருந்தாலும், ஒரே சீரான முன்னேற்றம் இருந்ததாகத் தெரிகின்றது. வடிவ கணிதம் எகிப்து, கிரேக்க நாடுகளில் படிப் படியாக முன்னேற்றம் அடைந்துவந்தது.

ஆதலால், எளியமுறையில் அலங்காரப் படங்கள், வடிவ வண்ணப்படங்கள் முதலியவற்றை அமைப்பதற்கு முதலில் மாண வர்களைப் பழக்கப்படுத்தி அதன்பின் படிப்படியாக வடிவகணி தத்தை வளர்ப்பது சிறந்த பயனளிக்கும்.

முக்கோணங்கள், இணைகரங்கள், வட்டங்கள் முதலிய தள வடிவங்கள் கொண்ட வடிவ வண்ணப்படங்களைக் குழந்தைகள் மிகுந்த ஆர்வத்துடனும், விருப்பத்துடனும் வரைவதை நாம் இன்றும் கண்கூடாகக் காணலாம். வரைகோலையும், காம்பஸ் முதலியவற்றையும் பயன்படுத்திப் பலதள வடிவங்களை வரைவ தால், இந்த வடிவங்களின் பல பண்புகளையும் அறியும் வாய்ப்பு இருக்கிறது. படிப்படியாக வடிவகணித முறையும் மாணவர்கள் மனத்தில் பதிகின்றது. இப்படியே அவர்கள் வடிவகணிதத்தின்

அனுபவ முறைகளிலும், பயன்களிலும் ஆர்வம் கொள்கின்றனர். எகிப்தியரும், பாபிலோனியரும் வடிவகணித முறையை முதன் முதலில் பயன்படுத்தியதாகத் தெரிகின்றது. கிட்டத்தட்ட கி.மு. 4000-லேயே இம் முறைகளில் பலவற்றையும் எகிப்தியர்கள் பயன்படுத்திக் கோவில்களேயும், கூர்க்கோபுரங்களேயும் திட்டமிட்டுக் கட்டினர். ஏறத்தாழ கி.மு. 1800-லேயே நில அளவை, தளப்படுத்தல் (levelling), மற்றும் வெவ்வேறு அளவு முறைகளே யும் பயன்படுத்தி, நீர்ப்பாசன வசதிகளுக்குத் தேவையான பற்பல விரிவான செயல்முறைகளேயும் செய்ததாகத் தெரிகின்றது. மேலும், நிலங்களே அளந்து பிரித்து அவற்றின் உடமையாளரிடமிருந்து நிலவரி வசூலிக்கும் வகையில் நில அளவை முறைகளேயும் கி. மு. 1300-லேயே அறிந்திருந்தனர். ஆகவே, பெரும்பாலும் செயல் முறைத் தேவைகளே முன்னிட்டே வடிவகணிதம் வளர்ந்ததாகத் தெரிகின்றது. பற்பல வடிவ கணித மெய்ம்மைகள் (Geometrical facts), பார்த்து அறிந்து கொண்டபின் சோதனே முறைகளால் சரிபார்க்கப்பட்டன.

இவ்விதம் பெற்ற கணித முறைகள் சமயத் தலேவர்களால் கவனமாகப் பாதுகாக்கப்பட்டு நாளாவட்டத்தில் வேறு நாட்டின் கல்வியறிவாளர்களிடம் கொடுக்கப்பட்டது. செவ்வகங்கள், நாற்கரங்கள், முக்கோணங்கள், வட்டம் ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளேக் கணிக்கும் சூத்திரங்களே 'ஆமஸ் பாபிரஸி'ல் (Ahmes papyrus-1650 B. C.) பார்க்கலாம். பெரிய ஒழுங்கற்ற நிலங்களேச் சிறுசிறு பாகங்களாகப் பிரித்து அவற்றின் பரப்பை அளப்பதற்கு எகிப்தியர் அறிந்திருந்தனர். பிதாகரஸின் தேற்றத்தையும், பிதாகரஸின் காலத்துக்கு முன்பே இவர்கள் அறிந்திருந்தனர். கூர்க்கோபுரங்களேக் (pyramid) கட்டும் காலத்திற்கு முன்பே சமச்சீர் வடிவமான படங்களால் கவர்ச்சிமிக்க முறையில் அலங்காரங்கள் செய்ய அறிந்திருந்தனர். இத்தனே நடைமுறை வடிவகணித அறிவு பெற்றிருந்தாலும் தத்துவ நிலேயான (theoritical) விதத்தில் இவர்களுக்கு ஆர்வம் இல்லாததால் வடிவ கணிதம் ஓர் அளவுக்குமேல் வளராமலே இருந்தது. இவர்களுடைய வடிவகணிதத்தில் தேற்றங்களோ, மெய்ப்பிக்கும் முறைகளோ இல்லே. அடிப்படை உண்மைகளும் அவற்றைப் பயன்படுத்தும் தத்துவ முறைகளும் அவர்கள் அறியாதவை. ஆகவே, எகிப்தியர் பயன்படுத்திய வடிவ முறைகள், கணித முறைகள் என்பதைவிட நடைமுறை (practical) அல்லது இயல் முறை (physical) வடிவ கணிதம் எனலாம்.

எகிப்தியர்களுக்கு முற்றிலும் மாருன விதத்தில் கிரேக்கர்கள் ஆற்றல் வாய்ந்த சிந்தனேயாளராய் விளங்கினர். ஆகவே, எகிப்

தியரின் நடைமுறை வடிவகணிதம் கிரேக்கர்கள் கைக்கு மாறியதும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்று இருந்த பல வடிவ கணித உண்மைகளை முறைப்படுத்தி அவற்றை வருமெய்ம்மைகள் (propositions) வாயிலாகத் தத்துவ முறையில் விளக்கினர். புள்ளி, கோடு, தளம் முதலிய கருத்தியலான (abstract) வடிவங்களை ஆதாரமாகக்கொண்டு, அவற்றைச் சார்ந்த ஆதாரக் கொள்கைகளையும் அவற்றின் மூலம் தருக்கிக்கும் முறையையும் ஏற்படுத்தினர். இவ்விதம் முறைப்படுத்தித் தொகுக்கப்பட்ட வடிவகணித உண்மைகள் கிரேக்கக் கணித மேதை யூக்ளிட் (Euclid) என்பவரின் பெயரால் வழங்கப்பட்டு வந்தன. இப்போது நாம் வடிவ கணிதத்தில் பயன்படுத்தும் புள்ளிகள், நேர்க்கோடுகள், வளைகோடுகள், கோணங்கள், தளங்கள் யாவும் கிரேக்கர்களிடமிருந்தே நமக்கு வழிவந்தவை. இவற்றைக் கணக்கியல் வடிவ கணிதத்தின் மூலத்தத்துவங்கள் (Elements of Mathematical Geometry) எனலாம்.

வடிவ கணிதம் கற்பிப்பதில் முதற் படி: வடிவகணிதம் கற்பிக்கும் முதற்படியில் மாணவர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டும் வகையில், நடைமுறையில் தேவைப்படும், அல்லது அழகுணர்ச்சியைத் தூண்டப் பயன்படும் கருத்துகளை முடிந்தவரை மாணவர்களே கண்டறியும் விதத்தில் தொடங்கவேண்டும். பல விதமான வடிவங்களையும் வரையும்படி பழக்கப்படுத்தவேண்டும்.

நேரிலே பார்த்தோ அல்லது கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்குத் தகுந்த முறையிலோ கோணமானி, காம்பஸ் முதலியவற்றைப் பயன்படுத்தி வடிவங்களை வரைந்து அவற்றை அளக்கவும் கற்க வேண்டும். அகத்திற உணர்வு (intuitive) வடிவ கணித அறிவு நம் அன்றாட வாழ்க்கை அனுபவத்தைச் சார்ந்து வளர்வதாகும். இது வகுப்பறையையும் நம் சுற்றுப்புறத்தையும் பொறுத்தது. தொடர்ந்து கணிதத்தைக் கற்றாலும் அல்லது கற்காவிட்டாலும், இம் முறைகள் ஒவ்வொருவருக்கும் தேவையானதாகும். இவ்வித வடிவியற் கருத்துகளைச் சந்தேகமறக் கற்பது ஒருவகைத் தனி அனுபவம் எனலாம்.

அகத்திற உணர்வு வடிவியல் (முதற் படி)

நோக்கம்

1. சாதாரணமாக நம் அன்றாட வாழ்வில் காண்கின்ற, பயன்படுத்துகின்ற வடிவியல் உருவங்களை மாணவர்களுக்கு அறிமுகப்படுத்தவேண்டும். இவ்வித உருவங்கள் எங்கெங்கு இருக்கின்றன என்று பார்க்கும் விதத்தில் அவர்களைப் பழக்க வேண்டும். வட்ட வடிவமான முழுநிலா, செவ்வக வடிவமான மேசை, உருளை வடிவமான பென்சில், கோளவடிவமான பந்து, கனச் செவ்வக வடிவ

மான செங்கல், தீப்பெட்டி முதலியவற்றை உதாரணமாகக் கூறலாம்.

2. மேற்கண்ட பொருள்களின் கலைச்சொற்களை மாணவர் களுக்கு அவ்வப்போது அறிவிக்கவேண்டும்.

3. வடிவியல் உருவங்களின் அழகை, இயற்கைச் சூழ்நிலை, கலைப்பொருள்கள், தொழிற் கூடங்கள், கட்டடங்கள் முதலிய வற்றில் பார்த்துப் புரிந்துகொள்ளப் பழக்கவேண்டும்.

4. முப் பரிமாண வடிவங்களைப்பற்றிக் கற்பனை செய்து பார்க்கப் பழக்கவேண்டும்.

5. தருக்க முறையில் மெய்ப்பிக்கும் பழக்கம் படிப்படியாக வளரவும் அதில் விருப்பம் ஏற்படும் வண்ணமும் வடிவ கணிதம் கற்பிக்கப்படவேண்டும்.

6. நேர்முக, மறைமுக முறைகளில் அளக்கும் ஆற்றலை வளர்க்கவேண்டும்.

பாட உட்பொருள் (Content)

1. வடிவியல் கருத்துகள் : வெகுவாக வடிவியலில் பயன் படும் கருத்துப் பொருள்களான புள்ளி, நேர்க்கோடு, தள உருவங் களின் பகுதிகள் (segments), கோண வகைகள், கோண முனை, கோண அளவுகள், முக்கோணங்கள், நாற்கரங்கள், சுற்றளவு, விட்டம், வட்டத்தின் சுற்றளவு, இணைகோடுகள், செங்கோடுகள், பரப்பளவு, கன அளவு, விகிதம், விகிதப்படி பிரித்தல், முற்றிசைவு (congruency), வடிவொப்பு, சமச்சீர் அமைப்பு முதலியவற்றைப் பற்றிய அடிப்படைக் கருத்துகளை அறியவும், அவற்றை வரைய வும், அளக்கவும், ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும், வகைப்படுத்தவும், உருவங்களுக்கு எழுத்துகள்மூலம் பெயர் அமைக்கவும் மாணவர் களைப் பழக்கவேண்டும்.

2. படம் வரைதல்—இரண்டு மூன்று பரிமாண வடிவங்களைக் கருவியின்றி வரையவும், கருவிகள் கொண்டு அளவுப்படி வரைய வும், வரைபடம் வரையவும் கற்பிப்பது இன்றியமையாதது.

3. வடிவியல் பட வரைமுறை—முக்கோணங்கள், பல கோணங்கள் முதலியன கொடுத்த அளவிற்கு வரைதல், கோணங் கள், தளப்பகுதிகளைச் சம கூறுபடுத்துதல், இணைகோடுகள், செங் கோடுகள் வரைதல் முதலியவற்றில் பழக்கப்படுத்துதல்.

4. அடிக்கோள்கள் (axioms and postulates) பற்றி அறி வித்தல்.

5. நிரப்புக் கோணங்கள், மிகை நிரப்புக் கோணங்களைப் பற்றியும், இணைகோடுகளைக் குறுக்கு வெட்டி வெட்டுவதால் ஏற்படும் கோணங்களைப்பற்றியும் விளக்கி அறிவிக்கவேண்டும்.

6. வட்டத்தின் சுற்றளவு, பரப்பளவிற்கான சூத்திரங்கள், மற்றும் நாம் அடிக்கடி பார்க்கக் கூடிய, தள உருவங்களின் பரப்பளவுகளும், கன உருவங்களின் கன அளவும் கணிக்கும் சூத்திரங்களைப்பற்றியும் அறிவிக்கவேண்டும்.

7. எளிதாகச் செய்யக் கூடிய சில கன வடிவ மாதிரிகளைச் செய்யும் விதத்தையும் கற்றுத் தரவேண்டும்.

வடிவியல் கருத்துகளை வளர்த்தல்: வடிவ கணிதம் கற்பிப்பதில் விதிவருமுறையே (inductive approach) விரும்பத்தக்கது. புதுக் கருத்துகளைச் செய்முறையின் இறுதியில் எடுத்துக் கூறுவது நல்ல பலனைத் தரும். முடிந்தவரை, வகுப்பறைச் சூழ்நிலையிலேயே, நேர்க்கோடு, வட்டம், கோணம், கூர்க்கோபுரம் (pyramid), பட்டைக் கோபுரம் (prism) கோளம்முதலியவற்றிற்கு உதாரணங்கள் கூறி மாணவர்கள் மனத்தில் அவற்றை நன்றாகப் பதியச் செய்யலாம்.

வரையறைகளையும் (definitions), புதிய கருத்துகளையும் மாணவர்கள் மனனம் செய்வதைவிடப் புரிந்து கற்பதே சிறந்தது என்பதை வற்புறுத்த வேண்டும். கருத்துகளை இயல்பாகக் கற்பது சிறந்த பயனளிக்கும். மெய்ம்மைகளைச் சம்பிரதாய முறைப்படி கூறி அவற்றை நிரூபிப்பதை, முடிந்தவரை தவிர்க்க வேண்டும்.

இரண்டாம் படி—காரணங்களுடன் எடுத்துக்கூறல் (Informal reasoning stage)

பயன்முறை வடிவியலை விடுத்துக் கருத்துகளை ஆதாரங்களுடன் எடுத்துரைக்கப் பழக்கவேண்டும். இவ்விதம், பயன்களைக் கருதாது, தத்துவமுறைகளைப் பயன்படுத்துவதால் வடிவ கணிதம் ஓர் அறிவியல் நிலைக்கு உயர்கிறது என்று பிதாகரஸ் அறிந்தார். முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை, செங்கோண முக்கோணத்தில் பக்கங்களுக்குள்ள தொடர்பு, இணைகோடுகள், சர்வசம முக்கோணங்களில் சில கருத்துகள் ஆகியவற்றைத் தருக்க முறையில் மெய்ப்பித்தார். வடிவியல் வரைமுறைகள் சிலவற்றையும் இவர் செய்து காட்டினர்.

நோக்கம்

வடிவங்களைக் கூர்ந்து கவனித்தும்; அவற்றைச் செய்தும், வரைந்து பார்த்தும்; அளந்து சரிபார்த்தும் தெரிந்துகொள்ளுதல்

இவற்றின் நோக்கமாகும். இரண்டாம் படியில், இயல்பான முறையில் ஆதாரங்களுடன் கருத்துகளை உறுதிப்படுத்தக் கற்றுக் கொடுக்காவிட்டால், மூன்றும் நிலையில் மாணவர்கள் வாத முறையில் கருத்துகளை நிலைநாட்டுவதற்கு வேண்டிய ஆற்றலும் மன நிலையும் இல்லாது போகின்றது. முதல் நிலைக்கும் மூன்றும் நிலைக்கும் பாலம் அமைத்ததுபோல் இரண்டாம் நிலை அமைய வேண்டும். கருத்துகளை வாதித்து விளக்குவதற்கு மாணவர்கள் திறமை பெற்றவுடன், அத் திறமையைப் பயன்படுத்தும் முறையில் கணக்குகள் கொடுக்கவேண்டும். இந்தத் திறமை முறைப்படி வளர்க்கப்பட்டால், வடிவங்களை வரைந்து அளந்து சரிபார்ப்பதைக் காட்டிலும் தருக்க முறை எளிதாகவும், நயமாகவும் இருப்பதை மாணவர் அறிந்து தருக்க முறையைப் பின்பற்ற முனைவர். முந்தைய படிகளிலுள்ளவற்றைக் காட்டிலும் கடினமான ஆழ்ந்த கருத்துகளைப் படிப்பதற்கு மாணவரைப் பழக்கவேண்டியது அவசியம். அகத்திற உணர்வு முறையில் கற்பதைப் படிப்படியாகத் தருக்க முறைக்கு மாற்றவேண்டும்; அல்லது தருக்க முறையையும் சேர்த்தே கற்றுத்தர வேண்டும். அப்போதுதான் மாணவர்களின் பகுத்தாய்வும் திறனை வளர்க்க முடியும். முதல் இரண்டு நிலைகளும் அநேகமாக எல்லோருக்கும் அன்றாட வாழ்க்கையில் தேவைப்படும் கருத்துகளையே அடிப்படையாகக் கொண்டவை. இவை மாணவர்களுக்கும் நிச்சயம் தேவைப்படும்.

பாடப்பொருள்

1. முக்கோணங்கள், வட்டம் இவற்றைப்பற்றிப் படித்த கருத்துகளைத் திரும்பப் பார்க்கவும், பயன்படுத்தவும் மாணவர்களுக்குப் போதிய வாய்ப்பளிக்க வேண்டும்.

2. வரைகோல், கோணமானி, காம்பஸ் முதலியவற்றின் உதவியால் கோடுகளையும் கோணங்களையும் வரையவும், அளந்தறியவும் பயிற்சியளித்தல் வேண்டும். ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்களை அறிமுகப்படுத்தலாம்.

3. வடிவியலில் முக்கியமாகத் தேவைப்படும் சர்வசம வடிவங்கள், உருவொத்த வடிவங்கள், அளவுப்படி வரைதல் ஆகிய கருத்துகளை அறியும்படி செய்யவேண்டும்.

செயல்முறைப் பயன்கள் (Applications)

சர்வசம முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தித் தூரங்களையும், கோணங்களையும் மறைமுகமாக அளத்தல் (மரங்கள், கோபுரங்

கள் முதலியவற்றின் உயரங்களைக் கணித்தல், ஆறு, ஏரிகளின் அகலத்தைக் காணுதல்).

மூன்றும் நிலை அறிமுறை வடிவியல் (Demonstrative Geometry)

யூக்ளிடின் (Euclid—*300* B. C) முறைப்படி வடிவ கணிதம் கற்பித்தல் மூன்றும் நிலையெனலாம். இவர் அகத்திறஉணர்வு முறை அல்லது இயல் முறை வடிவகணித முறையை விடுத்து, வடிவியலில் தெரிந்த உண்மைகளை, இணைத்து ஒன்றுபடுத்தி ஒரே சீரான தருக்க முறையில் அவற்றை அமைத்தார். ஒவ்வொரு கருத்தையும் மெய்ப்பிக்க வேண்டும் என்று வலியுறுத்தினர். அமைப்புகளைக்கூட மெய்ப்பித்த பின்னரே பயன்படுத்த வேண்டும் என்று நம்பினர். இதன் பயனாக, ஆதார உண்மைகளும், கொள்கைகளும், மற்றும் இவற்றைச் சார்ந்த மெய்ம்மை விளக்கங்களும், தேற்றங்களும், சிக்கல்களும் தருக்க முறையில் ஒழுங்குடன் அமைக்கப்பட்டன. ஆகவே, இப்போது நடைமுறையில் பயிலும் வாத முறை வடிவ கணிதம் யூக்ளிடின் வடிவ கணிதம் எனலாம்.

நோக்கம்

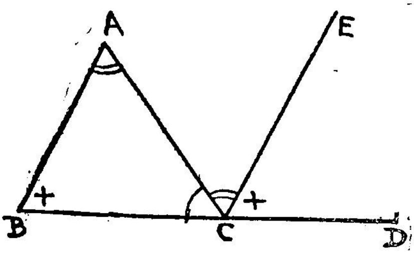
தருக்க முறை அல்லது வாத முறைக் கணிதம், தெரிந்த கருத்துகளைத் திரும்பவும் மாணவர்களுக்குச் சொல்லித் தருவதற்கன்று; அவற்றைத் தருக்க முறைப்படி நிரூபிப்பதற்குள்ள வழிகளை உணர்த்துவதற்கேயாகும். இம் முறையினல் மாணவர்கள் புதிய கருத்துகளைத் தெரிந்துகொள்ள வாய்ப்பு இருப்பினும், முறைப்படி தருக்கிக்கவும், கொடுக்கப்பட்ட நிலையைப் பாகுபடுத்தி அறிந்து பயிற்சிகளைச் செய்யவும் பழக்க வேண்டுவது முக்கியமாகும். இவ்விதம் பழக்கப்பட்ட மாணவர், புதுப்புது நிரூபண முறைகளையும் புதிய கருத்துகளைக்கொண்ட சிக்கல்களை விடுவிக்கும் முறைகளையும் ஆர்வத்துடன் செய்வர். வாத முறைத் திறமையை வளர்ப்பதற்கும், தத்துவ முறைப்படி அமைந்த விளக்கங்களை அறிவதற்கும் மாணவர்களைப் பழக்குவதே இம் முறையின் நோக்கமாகும்.

மாணவர்களுக்கு நிரூபண முறைகளைப் பழக்கப்படுத்துதல்:

படித்த தேற்றங்களைத் திரும்பவும் மாணவர்களுக்கு நினைவு படுத்த வேண்டும்.

தேற்றம்

முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டு செங்கோணங்களுக்குச் சமம்.



படம் 58

கொள்கை

ABC ஒரு முக்கோணம்

நிரூபிக்க

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

அமைப்பு

BC-ஐ D-க்கு நீட்டி, C-ன் வழியே, CE என்ற நேர்க் கோட்டை AB-க்கு இணையாக வரைக.

நிரூபணம்

கூற்று	சான்று அல்லது காரணம்
$\angle ACE = \angle A$ ....*(1)*	CE ∥ BA (அமைப்பு), AC குறுக்கு வெட்டி. ∴ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $\angle ACE = \angle BAC$
$\angle ECD = \angle B$ ....*(2)*	CE ∥ BA, BC, குறுக்கு வெட்டி, ∴ ஒத்தகோணங்கள் $\angle ECD = \angle ABC$
(1)-ம் *(2)*-ம் கூட்டினல் $\angle ACE+\angle ECD = \angle A+\angle B$	
$\angle C$ஐ இரண்டு பக்கமும் கூட்டினல் $\angle ACE+\angle ECD+\angle C = \angle A+\angle B+\angle C$	$= \angle ACD+\angle C = 180^\circ$
$\angle ACE+\angle ECD+\angle C = 180^\circ$	$\angle ACE+\angle ECD+\angle C$ ஏனெனில், ஒரு கோட்டின் மேலிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் மற்ருெரு நேர்க்கோடு நிற்பதால் ஏற்படும் கோணங்கள் இரண்டு செங்கோணங்களுக்குச் சமம்.
ஆதலால் $\angle A+\angle B+\angle C = 180^\circ$	

இம்மாதிரி ஒழுங்கு படுத்தப்பட்ட நிரூபணம் மாணவர்கள் கவனத்தைக் கவர வேண்டும். ஒவ்வொரு கூற்றுக்கும் காரணம் அல்லது சான்று கூற வேண்டியதன் அவசியத்தை மாணவர்கள் உணர வேண்டும். இவ்வாறு சான்று அல்லது காரணம் கொடுக்கப்படாத கூற்றுகள் ஒப்புக்கொள்ள முடியாதவை. இவ்விதச் சான்றுகள் முன்னே நிரூபித்த அல்லது கொடுத்த கருத்துகள், வரையரைகள், அடிப்படை உண்மைகள், அமைப்பு அல்லது தேற்றங்களைச் சார்ந்தே இருக்கவேண்டும்.

நிரூபணங்களை மனனம் செய்து எழுதுவது சாதாரணமாக எல்லோரும் செய்யும் தவறு. இதை ஆசிரியர்கள் கவனத்துடன் கண்டிக்கவேண்டும்.

குறிப்பு

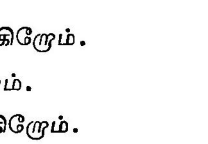
1. துணைப்பயிற்சி (Riders): தேற்றத்தை நேர் முறையில் பயன்படுத்திச் சில சிக்கல்களை விடுவிக்கலாம்.

2. புதிர்க் கணக்குகள் (Problems): இவற்றைத் தீர்க்க அமைப்புகளும் (construction) கணிப்பு முறைகளும் தேவைப் படலாம்.

வடிவ கணிதத்தில் பார்வைக் குறியீடுகள் (Visual symbols)

பொதுவாகக் கணிதப் பாடங்களிலும், முக்கியமாக வடிவ கணிதத்திலும் படங்கள், வடிவங்கள் ஆகியவை மிகுந்த பயனுள்ளவையாகக் கருதப்படுகின்றன. பார்வைத் தோற்றக் குறிகள் சாதாரணக் குறியீடுகளைக் காட்டிலும் அதிகத் தெளிவாயிருக்கின்றன. உதாரணமாக:

1. முக்கோணத்தை △ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.
2. வட்டத்தை ○ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.
3. இணைகோடுகளை || என்று குறிப்பிடுகிறோம்.
4. ஒரு முக்கோணத்தில் வெளிக் கோணத்தின் அளவு, உள் எதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்பதை அடியிற்கண்டவாறு குறிக்கலாம்.
5. தேற்றத்தைப் பார்வைக் குறியீட்டின் மூலம் நிரூபித்தல் :



படம் 59

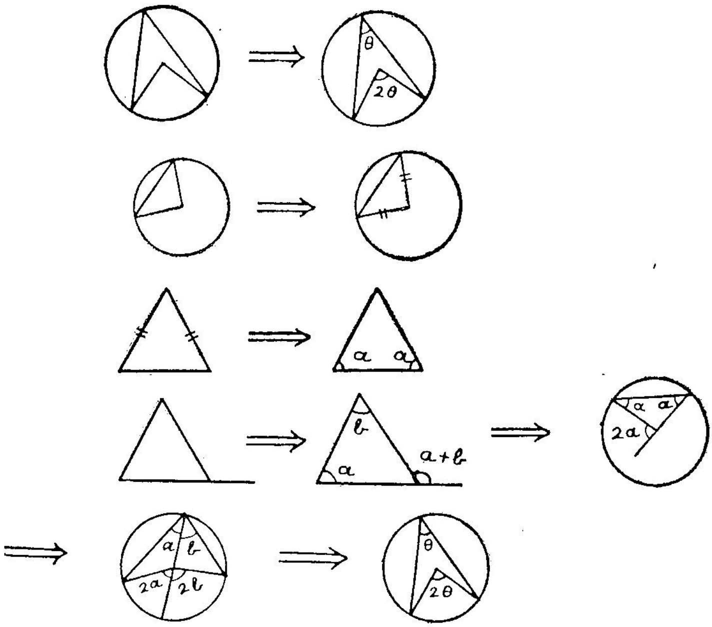
குறிப்பு: ══▷ சுட்டிக்காட்டி.

◁══▷ இருவழிச் சுட்டிக் காட்டி.

தேற்றம்

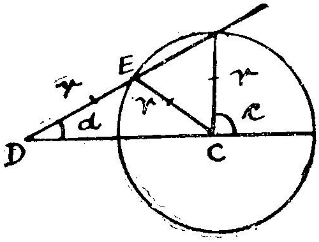
ஒரு வட்டவில் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தாங்கும் கோணத்தைப்போல் இரண்டு மடங்கு என்பதை,

நிரூபணம்



படம் 60

இது சொல்முறை நிரூபணத்தைவிட எளிதா, கடினமானதா என்பது தனிப்பட்டவர்களின் விருப்பு வெறுப்பைப் பொறுத்தது.



படம் 61

துணைப்பயிற்சிகள் (Riders)

படத்தின் மூலம் விளக்கிக் காட்டுதல்.

படத்தில், வட்டத்தின் மையம் C.

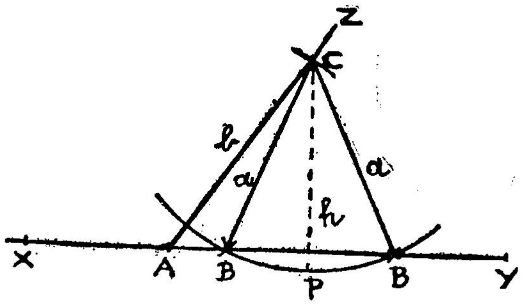
ED = வட்டத்தின் ஆரம் *r*.

C = 3*d* என்று நிரூபி.

முக்கியமான வடிவியல் அமைப்பு ஒன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வரைதல் : இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றில் ஒரு பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணமும் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணத்தை அமைக்கும் முறை.

வரைமுறை : கொடுக்கப்பட்டவை A,a,b ($a<b$, $a>h$) △ ஒரு குறுங்கோணம்.



படம் 62

XY என்ற நேர்க்கோடு வரைந்து அதில் A என்ற புள்ளியைக் குறி. A-ல் <YAZ = <A என்ற அளவில் ஒரு கோணம் வரை. AZ-ல் AC = b என்ற நீளத்தை அளந்து குறி.

C-ஐ மையமாகவும் a ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்ட வில் வரை. a-யானது b-ஐக் காட்டிலும் குறைவாகவும் h-ஐக் காட்டிலும் அதிகமாகவும் இருப்பதால் இந்த வில் XY-ஐ இரண்டு புள்ளிகளில் (படத்தில் காட்டியபடி) வெட்டும். இவை முறையே B, B^1 என்றால், ABC, AB^1 C இரண்டும் வேண்டிய முக்கோணங்களாகும்.

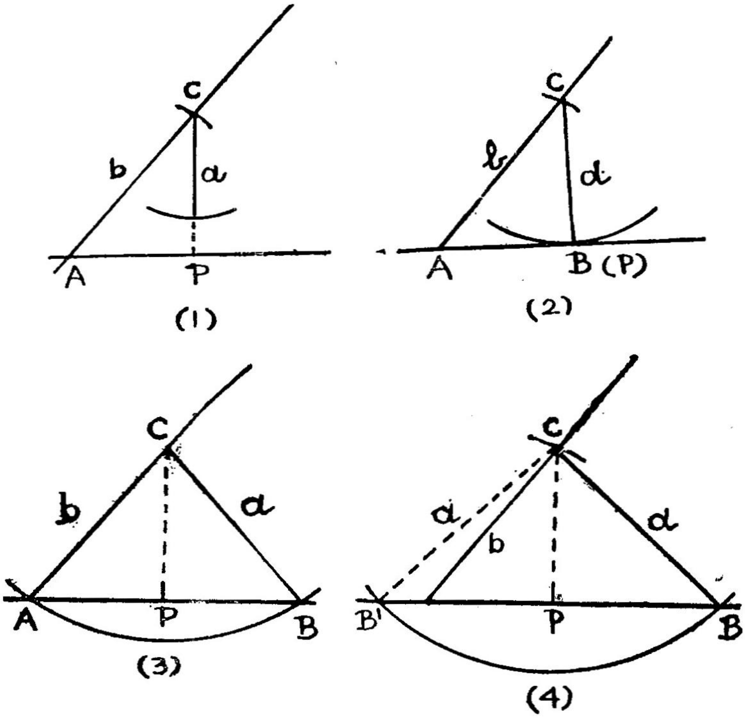
பொதுவாக, முக்கோண அமைப்புகளில் முக்கோணத்தின் ஏதேனும் மூன்று உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் ஒரு முக்கோணம் வரையலாம். ஆனால், மேற்கண்ட அமைப்பில் இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கின்றன. இது A,a,b அளவுகளின் தொடர்பைப் பொறுத்ததேயாகும். A,a,b அளவுகளின் மற்றத் தொடர்புகள் எவ்வித முக்கோணங்களைக் கொடுக்கின்றன என்பது படத்துடன் (படம் 63) விளக்கப்பட்டுள்ளது.

படம் 63. (i) : இதில் $a<b$, $a<h$. இதில் ABC முக்கோணம் வரைய முடியாது. ஆகவே இதற்குத் தீர்வு (solution) இல்லை.

படம் 63. (ii) : இதில் $a<b$, $a=h$. இதில் ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

படம் 63. (iii) : இதில் $a = b$, $a > h$. இதில் ABC ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணமாக அமைகின்றது.

படம் 63. (iv): இதில் $a > b$, $a > h$. இதில் ABC, AB^1C என்னும் இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைத்தாலும் △ ABC மட்டிலுமே கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகின்றது. ஆகவே, இது மட்டிலுமே தீர்வாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றது.



படம் 63

குறிப்பு : <A செங்கோணமாகவோ அல்லது விரிகோண மாகவோ இருப்பின் △ ABC எவ்விதம் வரைய முடியும்?

நியமப் பாதை (Locus)

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு நகர்ந்து செல்லும் புள்ளியின் பாதைக்கு நியமப் பாதை என்று பெயர்.

பொதுவாக நியமப்பாதையின் கருத்தை மாணவர்கள் தெளிவாகப் புரிந்துகொள்வதில்லை. நியமப் பாதையைப்பற்றிய பாடக் குறிப்பை இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) நியமப்பாதை என்றால் என்ன?

(2) இதன் பயன்கள்.

நியமப் பாதையைப்பற்றிப் பல எடுத்துக்காட்டுகள் கூறினாலன்றி, எவ்வளவு திட்டவட்டமாக வரையறை செய்து கூறினாலும் இது மாணவருக்குத் தெளிவாகாது. பின்வரும் உதாரணங்கள் மாணவருக்குப் பயன்படும்.

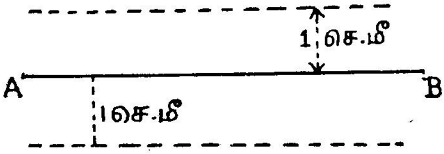
(அ) தளமான ஒரு நேர்பாதையில் சுழன்று செல்லும் ஒரு சக்கரத்தின் மையப் புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன? (சைக்கிள் சக்கரத்தின் அச்சுச் செல்லும் பாதை)

(ஆ) ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் ஒரு கல்லைக் கட்டிக் கொண்டு அடுத்த முனையைப் பிடித்துச் சுழற்றினால், கல்லின் பாதை என்ன?

(இ) கடிகார முட்களின் முனைகளின் பாதை என்ன?

மேலும் சில உதாரணங்கள்

(அ) AB என்ற ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து எப்போதும் 1 செ.மீ. தூரத்தில் நகர்ந்து செல்லும் ஒரு புள்ளியின் பாதை என்ன?



படம் 64

(ஆ) O என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து 1 செ. மீ. தூரத்தில் நகர்ந்து செல்லும் புள்ளியின் பாதை என்ன?

(இ) கொடுக்கப்பட்ட A,B என்ற இரண்டு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து எப்போதும் சமமான தூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் பாதை என்ன?

(ஈ) ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு நிலையான நேர்கோடுகளிலிருந்து எப்போதும் சம தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் பாதை என்ன?

நியமப் பாதைபற்றிய தேற்றங்களில் பின்வரும் இரண்டு நிபந்தனைகளையும் நிரூபிக்கவேண்டும்.

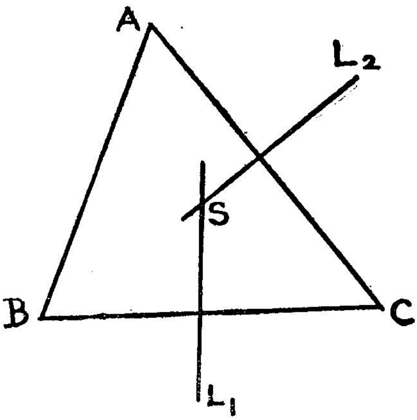
1. நியமப் பாதையில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் கொடுத்துள்ள நிபந்தனைப்படி அமையவேண்டும்.

2. கொடுத்துள்ள நிபந்தனைக்குட்படும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் நியமப் பாதையில் இருக்கவேண்டும்.

நியமப் பாதைகள் வெட்டும் புள்ளி

பல நியமப்பாதைகள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொண்டால் இப் புள்ளி, வெட்டிக்கொள்ளும் நியமப் பாதைகளின் நிபந்தனைகள் எல்லாவற்றிற்கும் உட்பட்டிருக்கும்.

உதாரணம் 1 : கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் △ ABC-ல், முனைகள் A, B, C-க்குச் சம தூரத்திலிருக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.



படம் 65

படத்தில், B,C முனைகளுக்குச் சம தூரத்திலிருக்கும் புள்ளியின் நியமப் பாதை L_1—இது BC-ன் மையக் குத்துக் கோடு.

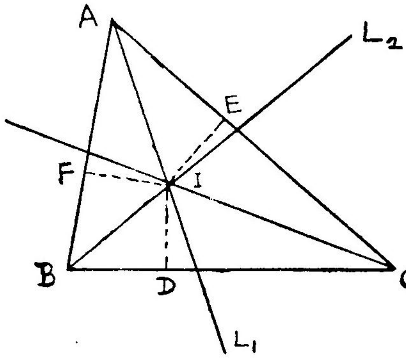
A,C முனைகளுக்குச் சமதூரத்திலிருக்கும் புள்ளியின் நியமப் பாதை L_2—இது AC-ன் மையக் குத்துக்கோடு.

L_1, L_2 இரண்டும் S என்ற புள்ளியில் வெட்டிக்கொண்டால் SA = SB = SC. ஆகவே, S என்ற புள்ளி இரண்டு நிபந்தனைகளுக்கும் உட்பட்டிருக்கின்றது.

குறிப்பு : SA = SB = SC = R என்றால், Sஐ மையமாகவும், Rஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் A, B, C முனைகள் வழியாகச் செல்லும். இது △ABC-ன் சுற்று வட்ட மையம்.

2. △ABC-ல் AB, BC, CA பக்கங்களுக்குச் சம தூரத்திலிருக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

படத்தில், AB, AC இரண்டிற்கும் சம தூரத்திலிருக்கும் புள்ளியின் நியமப் பாதை $L_1 - \angle BAC$-ன் உள் இருசம வெட்டி. BA, BC இரண்டிற்கும் சம தூரத்திலிருக்கும் புள்ளியின். நியமப் பாதை $L_2 - \angle ABC$-ன் உள் இரு சம வெட்டி. L_1, L_2 இரண்டும் I என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொண்டால், I-லிருந்து BC, CA, AB-க்கு வரையப் பட்ட செங்குத்துக்கோடுகள் ID=IE=IF. I என்ற புள்ளி இரண்டு நிபந்தனைகளுக்கும் உட்பட்டிருக்கும்.

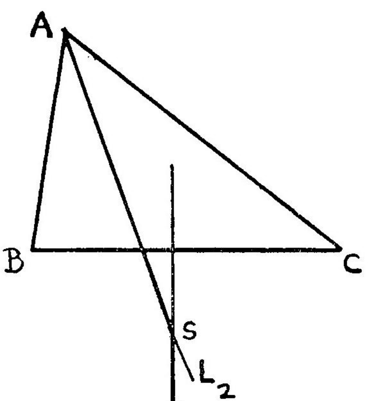


படம் 66

குறிப்பு: ID = IE = IF = *r* என்று கொண்டால், I மையமாகவும் *r* ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்பட்ட வட்டம் மூன்று பக்கங்களையும் உட்பக்கத்தில் தொடும். ஆகவே, I, முக்கோணத்தின் **உள் வட்ட மையம்.**

இதே போல் மூன்று வெளி வட்ட மையங்களையும் எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பாய்?

3. ABC முக்கோணத்தில் B,C முனைகளுக்குச் சம தூரத்திலும், AB, AC பக்கங்களுக்குச் சம தூரத்திலும் இருக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.



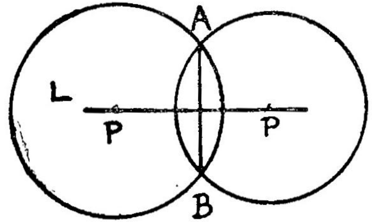
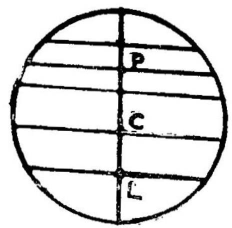
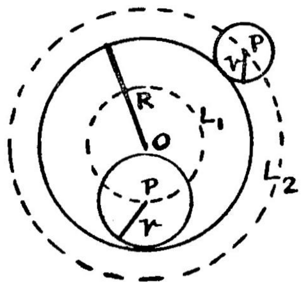
படம் 67

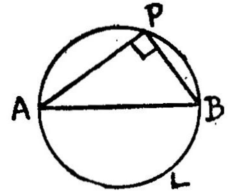
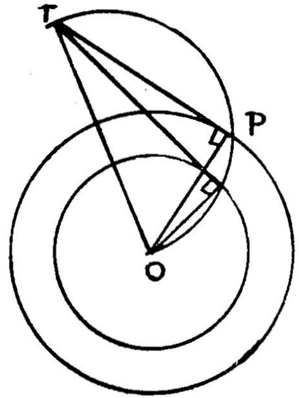
L_1 – BC-ன் மையக் குத்துக் கோடு.

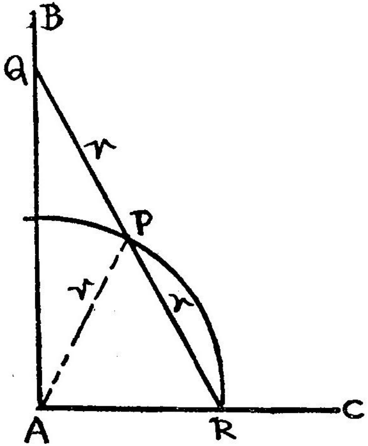
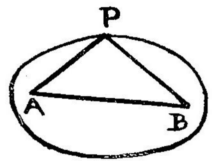
$L_2 - \angle BAC$-ன் உள் இருசம வெட்டி.

S – தேவையான புள்ளி; L_1 L_2 இரண்டும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி.

சிலமுக்கிய நியமப் பாதைகள் : P நகரும் புள்ளி

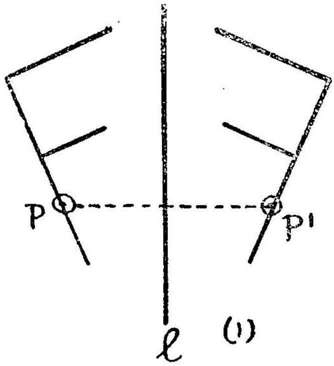
நிபந்தனை	விளக்கப்படம்	நியமப் பாதை
1. A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டங்களின் மையப்புள்ளிகள் (P).	 படம் 68	AB-ன் மையக் குத்துக்கோடு L.
2. கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் இணை நாண்களின் மையப் புள்ளி P. (C வட்டத்தின் மையம்)	 படம் 69	நாண்களின் மையப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு — வட்டத்தின் விட்டம் L.
3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நிலையான வட்டத்தின் மையப் புள்ளி O. அதன் ஆரம் R. இந்த வட்டத்தைத் தொடும் r ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையப் புள்ளி P.	 படம் 70	நிலையான வட்டத்தை உள்ளேயோ வெளியேயோ தொடலாம். நியமப்பாதை, இரண்டு வட்டங்கள் — மையம் O, ஆரங்கள் முறையே $R-r$ (L_1), $R+r$ (L_2).

4. AB ஒரு நிலையான நேர்கோடு. $\angle APB = 90°$ என்று இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளி P.	 படம் 71	ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்.
5. T என்ற நிலையான புள்ளியில் இருந்து கொடுக்கப்பட்ட பொது மைய வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளின் தொடு புள்ளி P.	 படம் 72	பொது மையம் O என்றால், OTஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்.

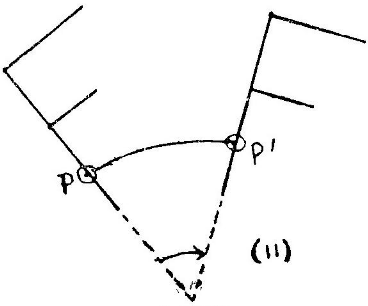
நிபந்தனை	விளக்கப்படம்	நியமப் பாதை
6. AB, AC இரண்டு நிலையான சட்டங்கள்; $AB \perp AC$, QR என்ற மற்ெருரு சட்டம் அதன் முனைகள் முறையே AB, AC-ல் இருக்குமாறு நகர்கின்றது. QR-ன் மையப் புள்ளி P.	 படம் 73	படத்தில், AP = QP = PR = QR சட்டத்தின் நீளத்தில் பாதி. (= *r* என்க.) எனவே, நியமப் பாதை, Aஐ மையமாகவும் *r* ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.
7. A,B என்பன நிலையான புள்ளிகள். PA + PB = 2*a* (ஒரு மாறிலி) யானுல், P என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை.	 படம் 74	A, Bஐ ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் (foci) கொண்ட ஒரு நீள் வட்டம்.

வடிவியல் உருமாற்றம் (Geometric Transformation)

1. பிரதிபலிப்பு (Reflection) : படத்தில் 'F' என்பது வடிவத்தையும் 'ꟻ' என்பது, l என்ற கோட்டில் அதன் பிரதிபலிப்பையும் காட்டுகின்றன. P, P¹ இரண்டும் ஒத்த புள்ளிகள் (corresponding points). PP¹-க்குப் பிரதிபலிப்புக் கோடு l, மையக் குத்துக் கோடாகும்.



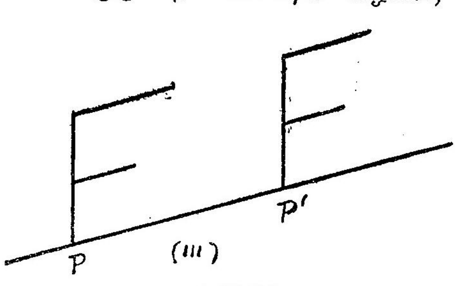
படம் 75 (i)



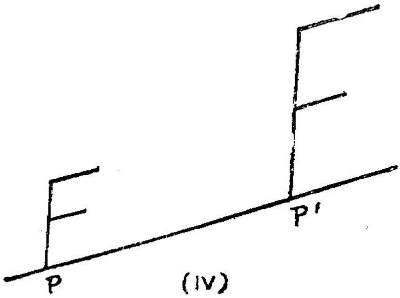
படம் 75 (ii)

2. சுழற்சி (Rotation) : படத்தில் F என்பது O என்ற புள்ளியைச் சுற்றி F சுழன்றதைக் காட்டுகின்றது. F-ன் எல்லாப் புள்ளிகளும் ஒரே அளவு கோணத்தில் சுழல்கின்றன.

3. இடப்பெயர்ச்சி (Translation) : சுழற்சியின்றிக் கொடுக்கப்பட்ட திசையில் (ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே) இடம் மாறுவதற்கு இடப்பெயர்ச்சி என்று பெயர். F-ன் எல்லாப் புள்ளிகளும் ஒரே தூரம் நகருகின்றன.



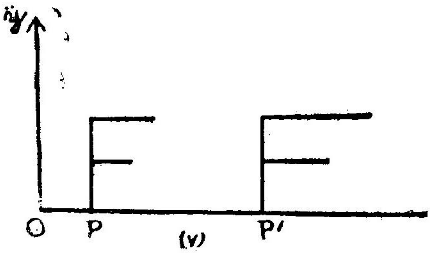
படம் 75 (iii)



படம் 75 (iv)

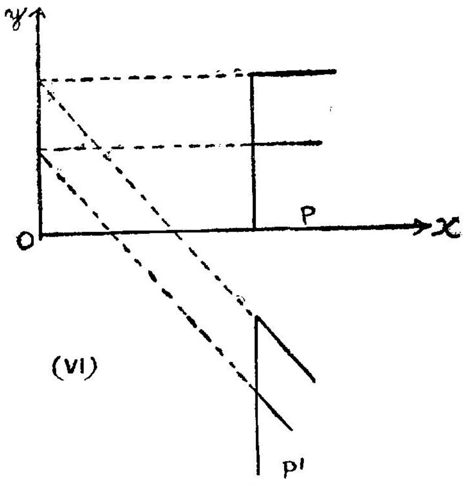
4. உருப்பெருக்கம் (Magnification): கொடுக்கப் பட்ட வடிவம் ஒரு குறித்த விகித முறையில் பெரிதாக்கப்படுவதற்கு உருப் பெருக்கம் என்று பெயர்.

5. நீட்டுதல் (Stretch): ஒரு குறித்த திசையில் உருப் பெருக்கம் செய்வதற்கு நீட்டுதல் என்று பெயர். படத்தில், நீட்டு அச்சு oy-லிருந்து உள்ள செங்குத்துத் தூரங்கள் மட்டும் இரண்டு மடங்காக நீட்டப்பட்டிருக்கின்றன.



படம் 75 (v)

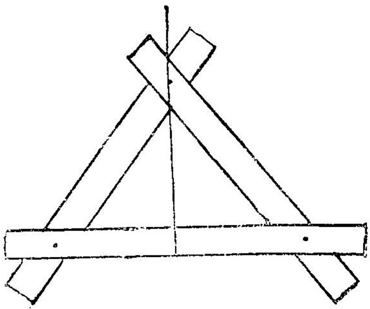
6. சறுக்குப் பெயர்ச்சி (Shear): அழுத்தம் காரணமாகப் பொருள்களின் மெல்லடுக்குகளில் ஏற்படும் ஒத்திசைவான மாற்றம். படத்திலிருந்து இது எளிதாக விளங்கும்.



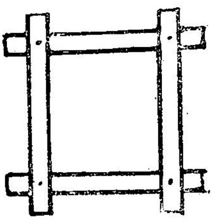
படம் 75 (vi)

முக்கோணத்தின் கட்டுறுதிப் பண்பு அல்லது விறைப்பு (Rigidity of a triangular frame)

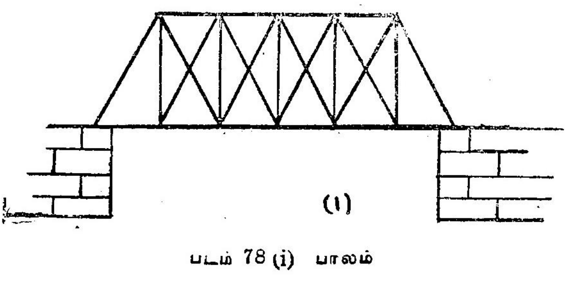
மூன்று சட்டங்களை எடுத்து அவற்றைப் படத்தில் காட்டியிருப்பதுபோல் ஒரு முக்கோண வடிவத்தில் சேர். சட்டங்களை உடைக்காமல் இந்த முக்கோணத்தின் வடிவத்தை மாற்ற முடியுமா என்று பார். △ A B C-ன் பக்கங்களை மாற்றாமல் அதன் கோணங்களை மாற்ற முடியுமா? இச் சோதனையின்மூலம், கொடுக்கப்பட்ட மூன்று சட்டங்களைக் கொண்டு ஒரே முக்கோணம்தான் அமைக்கமுடியும் என்று தெரிகின்றது. இப்படிப்பட்ட அமைப்பை விறைப்பான (rigid) அமைப்பு என்று கூறலாம். இதுபோல் நான்கு சட்டங்கள் அல்லது அதற்குமேல் எடுத்துப் படத்தில் காட்டியபடி ஒரு செவ்வகம் அல்லது பலகோணம் அமை. செவ்வகத்தின் நான்கு சட்டங்களைக் கொண்டு ஓர் இணைகரம் அமைக்கமுடியும் அல்லவா? அல்லது இந்தச் செவ்வகத்தையே உருச்சிதையச் (deform) செய்யலாம் அல்லவா? இதை விறைப்பாக மாற்ற என்ன செய்யலாம்? முக்கோணத்தின் கட்டுறுதிப் பண்பினைப் பலவாறு பயன்படுத்தியுள்ளனர். முக்கியமாகப் பாலங்களிலுள்ள கட்டமைப்புகள் முக்கோண வடிவச் சட்டங்களாயிருப்பதைக் காணலாம். சில உதாரணங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



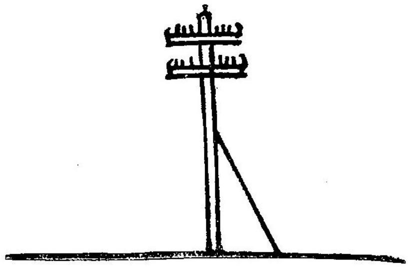
படம் 76



படம் 77

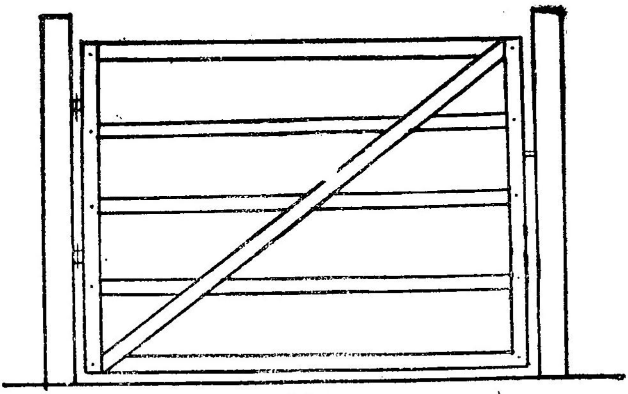


படம் 78 (i) பாலம்



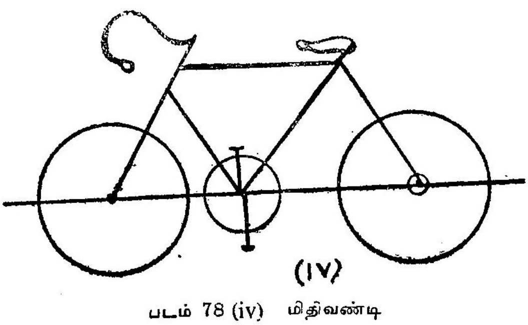
(ii)

படம் 78 (ii) தந்திக் கம்பம்



(iii)

படம் 78 (iii) வாசல் கதவுச் சட்டம்



(iv)

படம் 78 (iv) மிதிவண்டி

இயற்கையில் நாம் காணும் சில வடிவியல் உருவங்கள்

இயற்கையில் பல வடிவியல் உருவங்கள் காணப்படுகின்றன. மாணவர்கள் உலகில் உள்ள பல பொருள்களைப் பார்த்து அவை வடிவியல் உருவங்களில் அமைந்துள்ளன என்பதை அறிந்து கொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக, ஒரு குழந்தை அல்லது மாணவன் ஒரு கிண்ணத்திலிருந்து மண்ணைக் கீழே தரையில் கொட்டும்பொழுது அவன் ஒரு கூம்பை அமைக்கிறான். மரத்தின் அடிப்பாகம் ஒழுங்கற்ற உருவமாகவும் மேற்பகுதி குறுகியும் இருந்தபோதிலும் உருளை அமைப்புக்கொண்டதாக இருக்கிறது. மரத்தின் அடிப்பாகத்தை நேராக வெட்டும்பொழுது வட்டம் ஏற்படுகிறது. அம் மரத்தைச் சாய்வாக வெட்டும்பொழுது நீள் வட்டம் ஏற்படுகிறது. ஒரு பந்தை உதைத்தால் அந்தப் பந்து செல்லும் பாதை ஒரு பரவளைவு வடிவில் அமைகிறது. ஆகாயத்தில் உள்ள சூரியனும் முழுமதியும் வட்டமாகத் தோன்றுகின்றன. சக்கரங்கள் வட்ட வடிவத்திலேயே அமைக்கப்படுகின்றன. உப்புப் படிகங்கள் கனசதுர வடிவத்தில் அமைந்துள்ளன. இந்தப் பல்வேறு வடிவியல் உருவங்களைக் காணும்பொழுது கணித உருவங்கள் இயற்கையைச் சார்ந்துள்ளன என்பதை அறிகிறோம்.

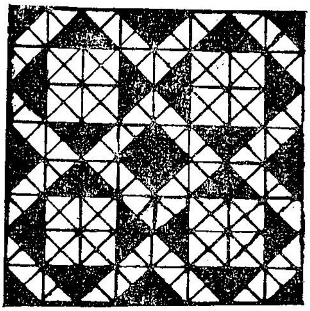
கைகளால் செய்யப்பட்ட கலைத்திறன் அமைந்த வேலைப்பாடுகளில் வடிவியலின் உருவங்கள்

எல்லாக் கலைத்திறன் அமைந்த வேலைப்பாடுகளுக்கும் வடிவியல் உருவங்களைப்பற்றிய அறிவு மிக முக்கியமானதாகக் கருதப்படுகிறது. உதாரணமாக, நெசவுத் தொழிலில் செவ்வகம் ஓர் இயற்கை உருவமாக அமைந்துள்ளது. கட்டட அமைப்பாளர்கள் அமைக்கும் உருவங்கள் எல்லாம் வடிவியல் உருவங்களின் அமைப்பை ஒட்டியே இருக்கின்றன. கோவில்களில் உள்ள தூண்கள் உருளை வடிவமானவையாகவும், அறுகோணப் பட்டக வடிவத்திலும் அமைந்துள்ளன. இயந்திரங்கள் செய்யும் வேலைகளுக்குத் தகுந்தாற்போல் அவை குறிப்பிட்ட வடிவியல் உருவங்களில் செய்யப்படுகின்றன. உதாரணமாக, பாலங்களுக்கு ஆதாரமான எஃகு கட்டுமானச் சட்டங்கள் (trusses) முக்கோண வடிவில் அமைந்துள்ளன. ஏனெனில், அவை வலுவுள்ளவையாக இருக்கின்றன.

இணைகரங்களும் இணைகோடுகளும் அனேகச் செயல்முறைகளுக்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. உதாரணமாக, உருவ அமைப்பிலும், நில அளவைகளிலும், இயற்பியலிலும் இவை பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவற்றின்மூலம் வடிவியலின் கருத்தையும், வடிவியலின் முக்கியத்துவத்தையும் நன்கு உணரலாம்.

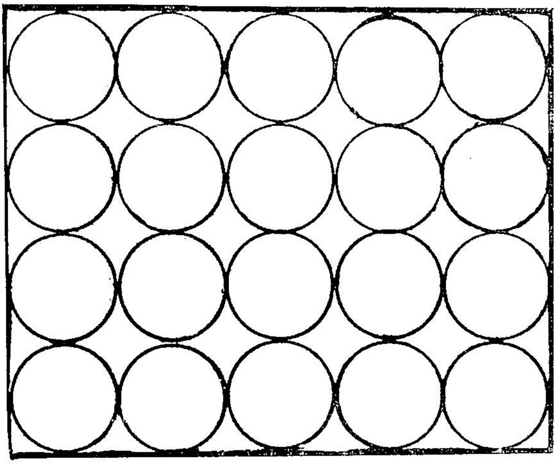
வடிவியலும் கலையும்

ஓவியம், கட்டடக்கலை, ஒப்பனை, சிற்பக்கலை ஆகிய இக் கலைகளில் வடிவியலின் பங்கை வரையறுக்க முடியாது. வடிவியல் இக் கலைகளுக்குத் தேவையான மூலப் பொருள்களையும் முறைகளையும் அளிக்கிறது. மேலும், பொருள்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைப் படத்தில் காட்ட வடிவியல் முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது. நவீன காலத்தில் பரவளையம், நீள்வட்டம், அதிபர வளையம் ஆகியவை கட்டடக் கலைகளிலும், மற்ற அலங்காரப் பொருள்களிலும் பயன்படுகின்றன. ஏனெனில், அவற்றின் தோற்றங்கள் அழகுடையவையாக இருக்கின்றன. நேர் கோடுகள் அல்லது வட்டவிற்கள் அல்லது இவ்விரண்டையும் உபயோகித்துப் பல சிறந்த உருவங்களைப் பெறலாம்.



படம் 79 (i)

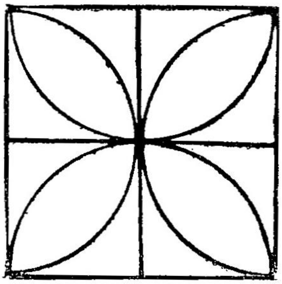
கோவிற் கதவுகளிலும் சன்னல்களிலும் பலவகை அலங்காரங்கள் செய்ய வடிவியல் உருவங்கள் உபயோகிக்கப்படுகின்றன.



படம் 79 (ii)

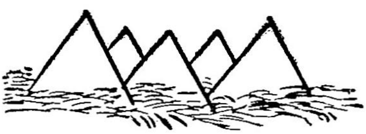
நாகரிகப் பாங்கில், புதுமுறை ஓவியங்களிலும் (cubism), வண்ணம் பூசுவதிலும் வடிவியல் உருவங்கள் பயன்படுகின்றன. இப் பாணியில் இயற்கையில் காணப்படும் உருவங்களை அப்படியே

வரைவதில்லை. அவற்றை முக்கோணங்களாகவும், செவ்வகங்களாகவும், உருளைகளாகவும், கூம்புகளாகவும், கனசதுரங்கள் போன்ற வடிவிலும் வரைகின்றனர். பிக்காஸோ (Picasso) என்ற ஓவியர் வரைந்த மனித ஓவியம் இந்த வடிவியல் உருவில்தான் அமைந்தது.



படம் 79 (iii)

இவ் வோவியப் பாணி, இயற்கைப் பொருள்களை வரைவதற்கு ஓவியர்களுக்கு அதிகச் சுதந்திரத்தைக் கொடுத்துள்ளது. உதாரணமாக, மலைகளை அவர்கள் பல கூம்புகள் கொண்ட உருவங்களாக வரைந்தார்கள். கட்டடக் கலையில் நன்கு தெரிந்த பல வடிவியல் உருவங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. 'ரோமர் கோலோசியம்' உருளை வடிவ அமைப்பைக் கொண்டதாகும். மற்றொரு ரோமர் கட்டடமான 'பாந்தியானும்' (Pantheon) வட்ட வடிவ அமைப்பைக் கொண்டதாகும். இதன் முகடு கோளத்தின் ஒரு பகுதியாகும்.

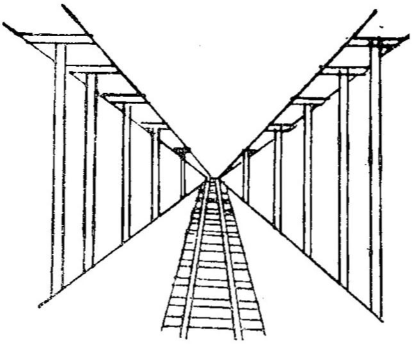


படம் 80

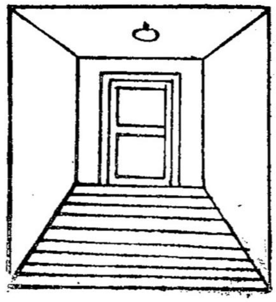
கடைசியாக, ஓவியங்களில், பொருள்களுக்கிடையே காணப்படும் தூரத்தினைப்பற்றி இங்குக் குறிப்பிட வேண்டும். ஓர் ஓவியனின் முக்கியப் பிரச்சினை, மூன்று பரிமாணமுள்ள பொருள்களைத் தளமான முரட்டுத் துணியில் உருவமாதிரியாக அமைத்தல் ஆகும். இயற்கைக் காட்சி ஓவியத்தில், அருகில் உள்ள ஆறுகளையும், தூரத்தில் உள்ள மலைகளையும் குறிக்க வேண்டுமானால் அவன் அப் பொருள்கள் இயற்கையில் எவ்வாறு தோன்றுகின்றனவோ அவ்வாறே வரையவேண்டும். ஓவியனை இவ்வாறு வரையும்படி செய்யும் விதி (பொருள்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைப் படத்தில் காட்டுவது), 'தொலைவுத் தோற்றத்தின் விதி' (laws of perspective) எனப்படும். இது முழுவதும் வடிவியலைச் சார்ந்ததாகும்.

உதாரணம் 1: படத்தில் உள்ளபடி இருப்புப் பாதையையும், டெலிபோன் கம்பத்தையும் எடுத்துக் கொள்வோம். காட்சியாளர் பார்க்கும் இணைகோடுகள் பின்னே சென்று ஒரே புள்ளியில் கூடுகின்ற மாதிரி தோன்றுகின்றது. எல்லா இணைகோடுகளும் சேரும் இடம் ஒரு புள்ளியாக அமைந்துள்ளது. இப் புள்ளிக்குக் 'கூடு முனை' (vanishing point) என்று பெயர். காட்சியாளரை

விட்டுத் தொலைவில் செல்லச்செல்லச் சரிசமானத் துண்டுகள் மிகச் சிறியனவாக வரையப்பட்டுள்ளன.



படம் 81 (i)

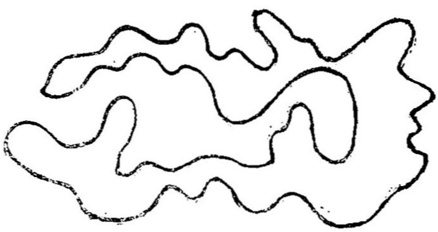


படம் 81 (ii)

உதாரணம் 2 : ஓவியன் ஒருவன் ஒரு நீண்ட அறையின் கதவின் வழியாக அந்த அறையை நோக்குகின்ருற்போல் அறையை வரைய வேண்டுமாளுல் படத்தில் உள்ளபடி அறையை வரைய வேண்டும். அந்த அறையின் தரையும் சுவர்களும் செவ்வகமாக இருந்தபோதிலும் அவை படத்தில் உள்ளபடி டிரபீஸியம்போல் அமையும். இத் தொலைக்காட்சி விதிகள் பதினைந்தாம் நூற்ருண்டில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டவையாகும்.

நெகிழ்வடிவியல்
(Topology)

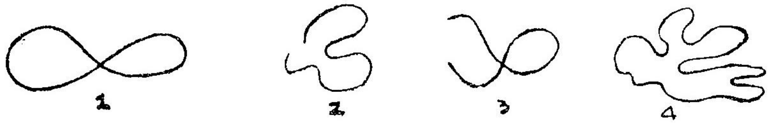
'நெகிழ்வடிவியல்' என்பது நிலையான அளவோ உருவமோ இல்லாத வடிவங்களைப்பற்றிய கணிதமாகும். தொய்வுடைய பொருளால் (உ-ம்.: Rubber) செய்யப்பட்ட சில வடிவங்களை நீட்டியும் முறுக்கியும் அவற்றின் வடிவத்தையே அடியோடு மாற்றுதல் கூடும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வட்டம், அதன் வட்ட வடிவத்தை இழக்குமாளுல் படத்தில் உள்ளதுபோல் காணப்படும். வட்டத்திற்கும் இதற்கும் உள்ள ஒரே ஒற்றுமை வட்டத்தைப் போலவே இதற்கும் ஓர் உட்புறமும், ஒரு வெளிப்புறமும் உண்டு என்பதேயாகும், இதில் எது உட்புறம், எது



படம் 82

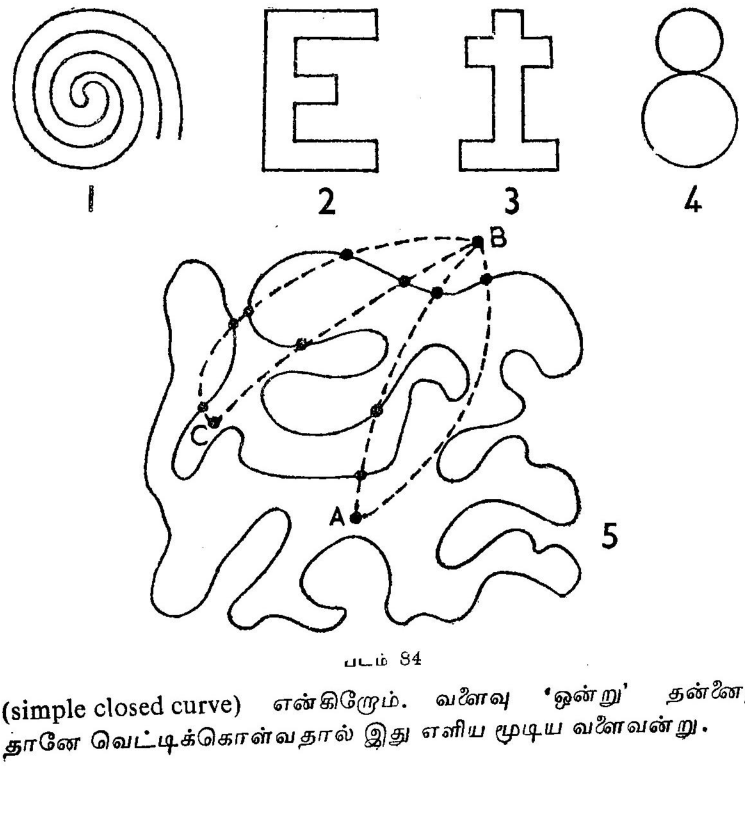
வெளிப்புறம் என்று கண்டறிவது சிறிது கடினமே என்பதும் இங்குக் குறிக்கத்தக்கது.

கீழ்க்கண்ட வளைவுகளைக் கவனிக்கவும். 1-ம், 4-ம் மூடியவை (closed); 2-ம், 3-ம் திறந்தவை (open). ஆனால், 1-ல் வரையானது வெட்டிக்கொள்கிறது. 4-ல் வரையானது வெட்டிக் கொள்ளவில்லை. இவ் வளைவுகள் பின்வருமாறு பாகுபடுத்தப்



படம் 83

பட்டுள்ளன. மூடிய வளைவு எந்தப் புள்ளியிலிருந்து தொடங்கப் பட்டதோ அந்தப் புள்ளியிலேயே முடியும். அது தன்னைத்தானே வெட்டிக் கொள்வதில்லை. எனவே, அதனை எளிய மூடிய வளைவு



படம் 84

(simple closed curve) என்கிறோம். வளைவு ‘ஒன்று’ தன்னைத் தானே வெட்டிக்கொள்வதால் இது எளிய மூடிய வளைவன்று.

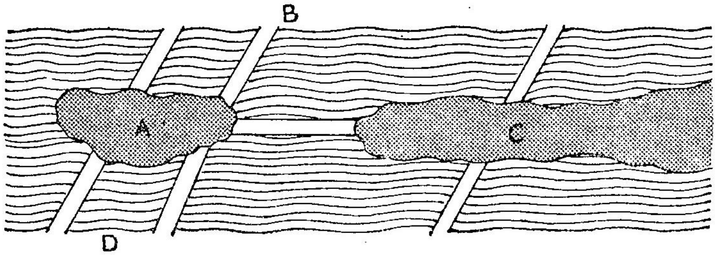
படம் 84-ல் (1) எவை மூடிய வளைவுகள்? (2) எவை எளிய மூடிய வளைவுகள்? வடிவம் 5, ஒரு மூடிய வளைவு. A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் முறையே உள்ளும் புறமும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுப் பலவித வழிகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வோர் இணைப்பு வழியும் எத்தனை முறை வளைவைக் கடந்து செல்கிறது எனக் கணக்கிட்டால் அவை ஒவ்வொன்றும் வளைவை ஒற்றை எண்ணிக்கையில் வெட்டுகின்றது எனக் காணலாம். அதே போல் B, C என்னும் புள்ளிகளை வளைவுக்கு வெளியே தேர்ந்தெடுத்து அவற்றை இணைக்கவும். ஒவ்வொரு கோடும் வளைவை இரட்டை எண்ணிக்கையில் வெட்டுகிறது எனக் காணலாம். எனவே, (1) புள்ளிகள் A-யையும், B-யையும் சேர்க்கும் கோடு, வளைவை ஒற்றை எண்ணிக்கையில் வெட்டுகின்றது என்றும்; (2) புள்ளிகள் B-யையும், C-யையும் சேர்க்கும் கோடு வளைவை இரட்டை எண்ணிக்கையில் வெட்டுகின்றது என்றும் தெரிகிறது.

காமிலி ஜார்டன் (Camille Jordan, 1838—1922) என்னும் ஃபிரெஞ்சுக் கணித மேதை வளைவுகளைப்பற்றிய அடிப்படைத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடுகிறார். 'ஒரு சமப் பரப்பின் மீதுள்ள மூடப்பட்ட வளைவானது அப் பரப்பை உட்பக்கம், வெளிப் பக்கம் என இரண்டாகப் பிரிக்கின்றது. அச் சமப்பரப்பு, தொய்வுடைய பொருளாலாகி நீட்டுதல், சுருக்குதல், முறுக்குதல் (கிழித்தலைத் தவிர) ஆகியவற்றால் உருமாறக்கூடியதாயிருந்தாலும் இது பொருந்தும். ஓர் எளிய மூடிய வளைவு நெகிழ்வினால் எவ்வாறு உருமாறினாலும் அது மூடிய வளைவாகவே இருக்கும்.' (வளைவு என்பதில் முக்கோணங்கள், செவ்வகங்கள், பல்கோணங்கள் ஆகியவையும் அடங்கும்.)

நெகிழ்வடிவியல் 100 ஆண்டுகட்கு முற்பட்டதேயாயினும் அதற்கு முன்பாகவே இப் பகுதியைப்பற்றிய கண்டுபிடிப்புகள் இங்குமங்குமாக ஒன்றிரண்டு காணப்படுகின்றன. குறிப்பாக, லியான்ஹார்ட் ஆயிலர் (Leonhard Euler, 1707—1783) என்னும் சுவிட்சர்லாந்து நாட்டுக் கணித மேதையின் கண்டுபிடிப்பு இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது. இவர் கோனிக்ஸ்பர்க்கிலிருக்கும் (Koenigsberg) ஏழு பாலங்களைப்பற்றிய புதிருக்கு விடை கண்டார். இது நெகிழ் வடிவியலின் அடிப்படைகளுள் ஒன்று எனலாம்.

அக் காலத்தில் பெயர்பெற்றிருந்த அப் புதிர் வருமாறு: ப்ரேகெல் (Pregel) என்னும் ஆற்றுப் பிளவுக்கிடையில் இருந்த ஒரு தீவை ஏழு பாலங்கள் இணைத்தன. கோனிக்ஸ்பர்க் நகர மக்கள் (இரண்டாம் உலகப் போரில், ஜெர்மனியில் இருக்கும் இப் பகுதி

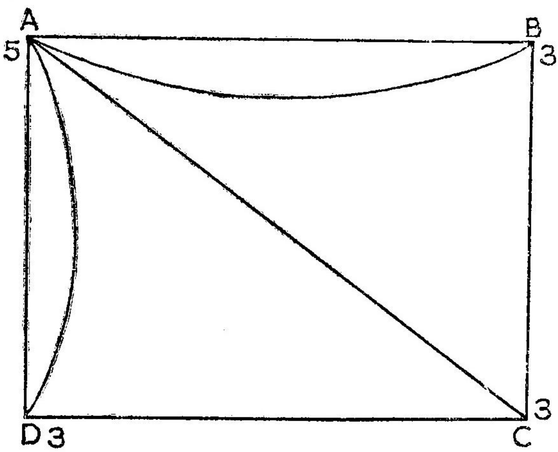
ரஷ்யர்களால் கைப்பற்றப்பட்ட பிறகு, கலினின்கிராட் என வழங்கப்படுகிறது) இப் பாலங்களின் மீது நடப்பதை ஒரு வேடிக்கையாகக் கருதினர்களாம். ஏதாவது ஓர் இடத்திலிருந்து புறப்பட்டு ஒவ்



படம் 85 (i)

வொரு பாலத்தையும் ஒரேமுறை கடந்து புறப்பட்ட இடத்தையே அடைவது என்பது முடியும் என்று சிலரும், முடியாது என்று சிலரும் கூறினர். இந்தச் சிக்கலைத் தீர்க்க ஆயிலர் விழைந்தார்; ஒரு முடிவும் கண்டார்.

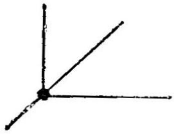
நான்கு நிலப்பரப்புகளை A,B,C,D என்ற 4 புள்ளிகளால் குறித்தார். இந்த நான்கு இடங்களையும் இணைக்கும் பாலங்களைக் கோடுகளால் இணைத்தார். A என்ற இடத்தை இணைக்க 5 பாலங்களும் B,C,D என்ற இடங்களை இணைக்க ஒவ்வொன்றுக்கும் 3



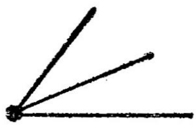
படம் 85 (ii)

பாலங்களும் கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அதாவது, தீவை இணைக்க 5 பாலங்களும், மற்ற நிலப் பகுதிகள் ஒவ்

வொன்றையும் இணைக்க மூன்று பாலங்களும் இருக்கின்றன. இந்தச் சிக்கலைப் பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம். தாளிலிருந்து கையெடுக்காமல், பின்னே போகாமல், ஒரு கோட்டை ஒரு முறையே பயன்படுத்தி இப் படத்தை [படம் 85(ii)] வரைய முடியுமா? முடியாதா? இதைத் தீர்க்க ஆயிலர் கீழ்க்கண்ட கணிதக் கோட்பாட்டினை உருவாக்கினர். ஒரு வடிவத்தில் ஒவ்வொரு சந்திப்பிலும் வந்துசேரும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் மேலே கூறிய பிரச்சினையைத் தீர்க்கலாம். (ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டை எண்ணாக இருந்தால்



அதை இரட்டைச் சந்திப்பு என்றும், ஒற்றை எண்ணாக இருந்தால்



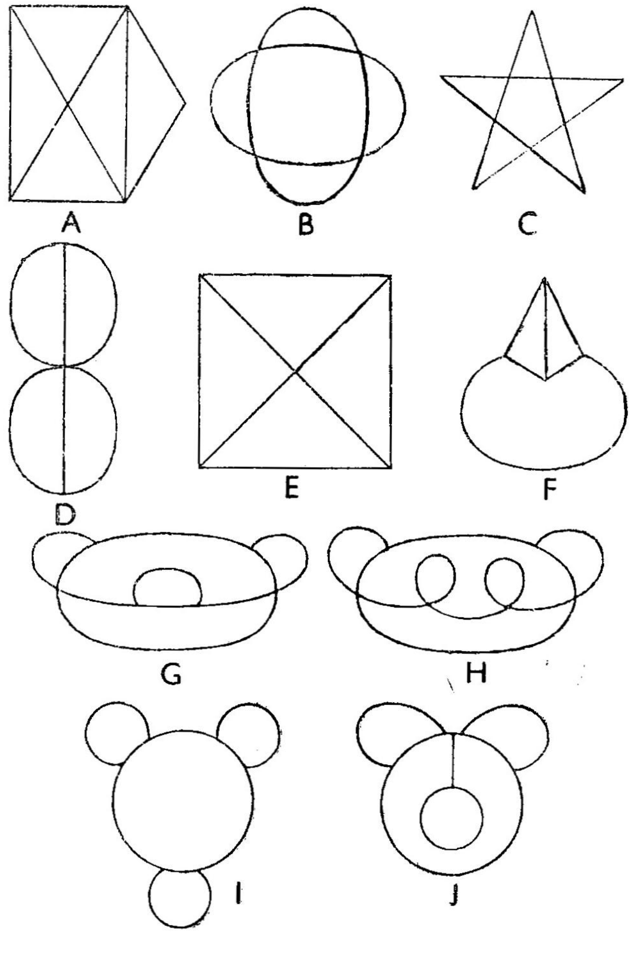
அதை ஒற்றைச் சந்திப்பு என்றும் கொள்ளலாம்.) வடிவத்தில் இரண்டு ஒற்றைச் சந்திப்புகள் இருந்தால் இது இயலும். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட ஒற்றைச் சந்திப்புகள் இருப்பின் இயலாது. (ஒற்றைச் சந்திப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண்ணாக உள்ள வடிவமே இல்லை.)

மேற்கூறிய கோனிக்ஸ்பர்க் பாலங்களைப் பொறுத்தவரை 4 ஒற்றைச் சந்திப்புகள் காணப்படுகின்றன. எனவே, ஒரு பாலத்தையாவது இரண்டு முறை கடக்காமல் புறப்பட்ட இடத்திற்கே வந்துசேருதல் என்பது இயலாத காரியம் (இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஒற்றைச் சந்திப்புகள் உள்ளன). எனவே, கோனிக்ஸ்பர்க் நகரமக்கள் தங்கள் நேரத்தை வீணாக்கிக் கொண்டிருந்தனர் எனக் கூறலாம்.

பின்னல்கள்
(Unicursal network)

பின்வரும் சில மாதிரிப் படங்கள் பின்னல்கள் எனப்படும். இம் மாதிரியான படங்களை, ஒரே கோட்டின்மீது இருமுறை வரையாமலும், காகிதத்திலிருந்து கையை எடுக்காமலும் வரைய முடிகிறதா எனப் பார்க்கலாம். (ஆரம்பிக்கப்பட்ட இடத்தில்

முடிய வேண்டும் என்பதும் நிபந்தனை இல்லை.) காகிதத்தினின்று வரைகோலை எடுக்காமல், ஒரேபோக்கில் வரையக்கூடிய பின்னல்



படம் 86

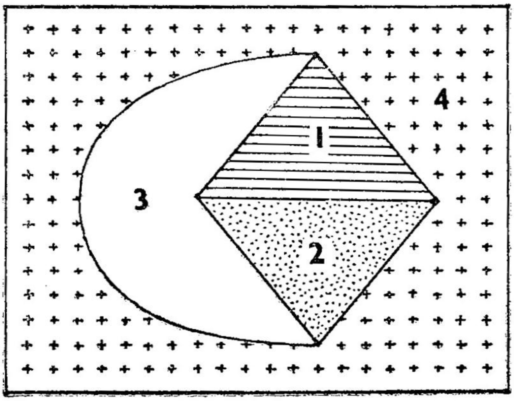
களை 'ஒரே வீச்சில்' வரையக்கூடியவை (traversable) என்று கூறுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட பின்னல்களைப் பார்த்து அடுத்துள்ள அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்க.

அட்டவணை

பின்னல்கள்	ஒற்றைச் சந்திப்புகளின் எண்ணிக்கை	இரட்டைச் சந்திப்புகளின் எண்ணிக்கை	ஒரே வீச்சில் வரைய முடியுமா?
A	2	4	முடியும்
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			

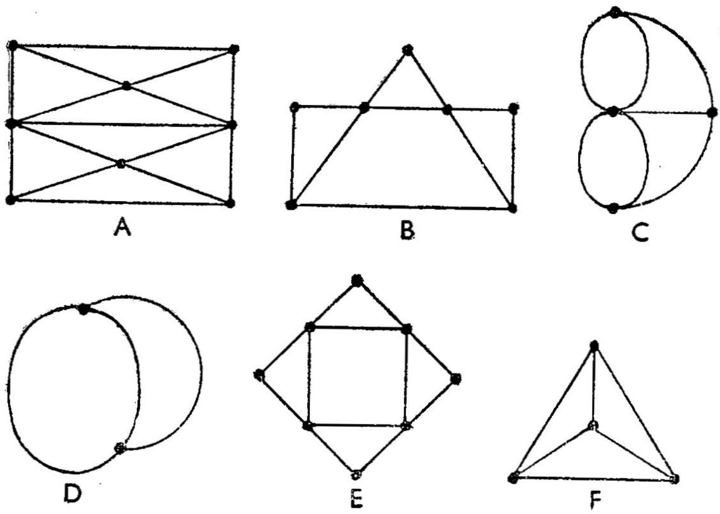
ஒரு சுவையான கண்டுபிடிப்பு

இப் படத்தில் உள்ள பின்னலில் 4 பரப்புகள் (regions) உள்ளன. மேலும், இப் பின்னலில் 6 வழிகளும், 4 சந்திப்புகளும்



படம் 87

உள்ளன. கீழே சில பின்னல்களின் மாதிரிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றில் உள்ள பரப்புகளையும், சந்திப்புகளையும், வழிகளையும் கவனித்து, அவற்றுக்கிடையே தொடர்பு ஏற்படுத்த முடியுமா எனப் பார்க்கலாம்.



படம் 88

அட்டவணை

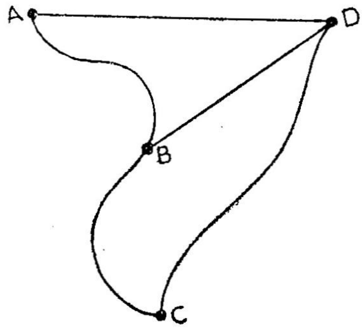
பின்னல்	சந்திப்புகள்	பரப்புகள்	வழிகள்
A	8	9	15
B	7	5	10
C	4	5	7
D	2	3	3
E	8	6	12
F	4	4	6

மேற்காணும் அட்டவணையிலிருந்து,

சந்திப்புகள் + பரப்புகள் — வழிகள் = 2 எனத் தெரிகிறது. (இதில் பின்னலுக்கு வெளியே உள்ள பரப்பையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.) F என்ற படத்தை ஒரு தளத்திலோ அல்லது கோளத்தின்மீதோ வரைந்தாலும் இந்த உறவு மாறாது. நெகிழ்வடிவியல் முறைப்படி இது ஒரு நான்முகத் திண்மத்திற்குச் (tetrahedron) சமானம்.

பின்னல் அணி
(The matrix of a network)

நான்கு நகரங்களின் இருப்பிடங்களையும் அவற்றை இணைக்கும் வழிகளையும் குறிப்பிடும் வரைபடம் ஒன்று கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 89

நகரங்களை இணைக்கும் வழிகள் நேரிடையானவையா அல்லது மற்றொரு நகரத்தின் வழியாகச் செல்கின்றனவா என்பதைக் காட்ட ஓர் அட்டவணை எழுதலாம். நகரங்களுக்கிடையே நேரிடையான ஒரு வழி இருந்தால் 1 எனவும், இரண்டு வழிகள் இருந்தால் 2 எனவும், இல்லையெனில் 0 எனவும் குறிப்பிட்டு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

	A	B	C	D
A	—	1	0	1
B	1	—	1	1
C	0	1	—	1
D	1	1	1	—

இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

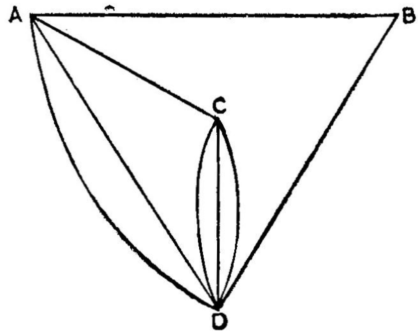
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

இது '4×4' அணி என்று சொல்லப்படும் (நான்குக்கு நான்கு அணி அல்லது four by four matrix). இந்த அணி ஒரு சதுரவடிவானது. இதில் மூலகங்கள் (elements) மூலை விட்டத்திற்குச் சமச்சீராக இருக்கும்.

குறிப்பு: அணி மூலகங்கள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அடுத்த புள்ளிக்குச் செல்லும் நேர்வழியைக் குறிக்கும்.

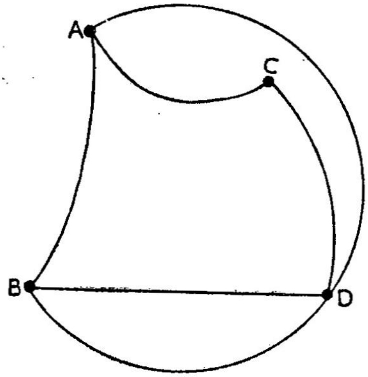
1. ஓர் (4×4) அணியும் அதற்குப் பொருத்தமாகப் புனையப்பட்ட பின்னலும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



படம் 90

2. ஒரு பின்னலும் அதற்குப் பொருத்தமான அணியும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 91

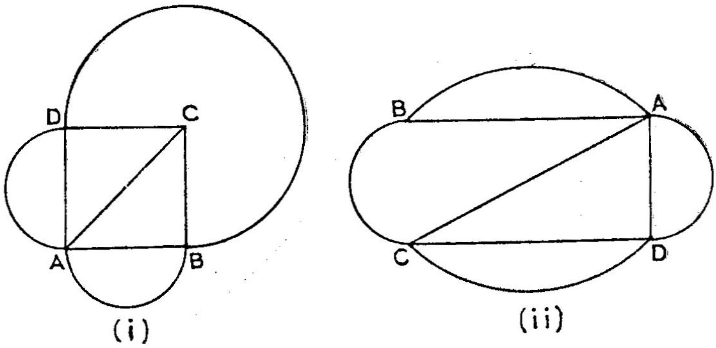
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி

I பின்வரும் அணிகளுக்குத் தகுந்த பின்னல்கள் புனைக.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

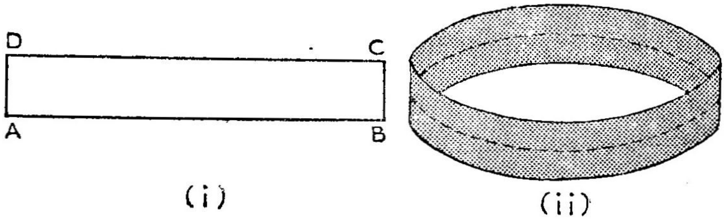
II கீழே கொடுக்கப்பட்ட பின்னல்களுக்குப் பொருத்தமான அணிகளைத் தருக.



படம் 92

மொபயஸ் வளையம் (Moebius strip)

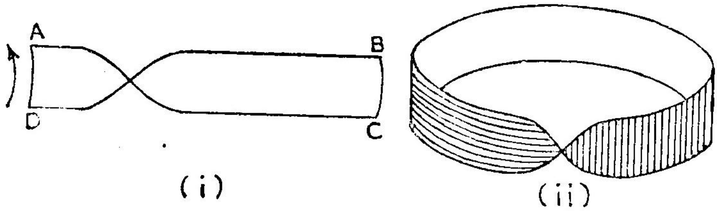
ABCD என்ற நீள் சதுரக் காகிதத்துண்டை வெட்டியெடுத்துக் கொண்டு அதன் இரு முனைகளையும் A, B-யும், D, C-யும் பொருந்துமாறு படத்தில் காட்டியிருப்பதுபோல் ஒட்டவேண்டும். இது ஒரு வளையமாக அமையும். துண்டின் நடுவில் படத்தில் காட்டியபடி ஒரு கோடு வரையவேண்டும்.



படம் 93

வரையப்பட்ட கோட்டின் வழியாக வெட்டினால் என்ன கிடைக்கும்? இதே போன்ற மற்றொரு காகிதத் துண்டை எடுத்துக் கொண்டு காகிதத்தில் ஒரு முறுக்கு (twist) ஏற்படுத்தவேண்டும். காகிதத்தின் ஒரு முனையை அரைச் சுற்றுச் சுற்றி இம் முறுக்கை ஏற்படுத்தலாம். (படத்தில் காட்டப்பட்டதுபோல்.) இப்போது இரு முனைகளையும் சேர்த்து ஒட்டவேண்டும். அதாவது A, C-யும், D, B-யும் பொருந்துமாறு ஒட்டவேண்டும். இதுவும் ஒரு வளையமாக அமையும்.

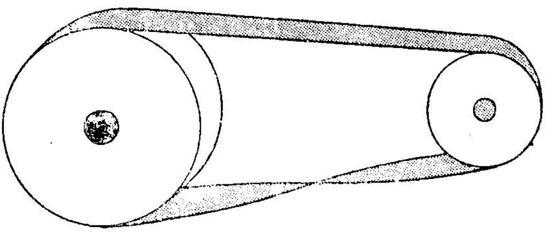
இதற்கு எத்தனை பக்கங்கள் இருக்கின்றன? இதை அறிவதற்கு இத் துண்டின் நடுவழியே ஒரு கோடு வரையவேண்டும். அதாவது இத் துண்டில் ஏதாவது ஓர் ஓரத்திற்கு இணையாக அதன் அகலத்தின் பாதித் தூரத்தில் இக் கோடு வரையப்படவேண்டும்.



படம் 94

1. இந்தக் கோட்டின் வழியே வெட்டினால் என்னவாகும்?

2. இதேபோல் $\frac{1}{3}$ தூரத்தில் ஓரத்திற்கு இணையாக வெட்டினால் என்னவாகும்?



படம் 95

இந்த வளையத்தின் தன்மைகளைக் கண்டறிந்த ஜெர்மானியக் கணித மேதை மோபயஸ் (1790-1868) என்பவரின் பெயரில் இந்த வளையம் வழங்கப்படுகிறது.

படத்தில் காட்டியபடி மோபயஸ் வளையத்தைப் பயன்படுத்திச் சில இயந்திரங்களில் பட்டைகள் உபயோகப்படுத்துவதற்குக் காரணம் எதுவாக இருக்க முடியும்?

இயற்கணிதம்

வரலாறு

கணித வரலாற்றில், இயற்கணிதத்தின் வளர்ச்சியை மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

முதற் படி— முதலில் கருத்துகளை சொற்களால்—use of words-குறிப்பிட்டனர்.

இரண்டாம் படி— வார்த்தைகளுக்குப் பதில் அவற்றின் சுருக்கங்களைப்பயன் படுத்தினர். {use of abbreviations of words.

மூன்றும் படி—குறியீட்டு முறை ஏற்பட்டது—use of symbols.

முதற் படி

வடிவியல் போலவே இயற்கணிதமும் மிகவும் பழைமை வாய்ந்தது. ஏறத்தாழ கி.மு. 1700-ல் ஏமஸ் (Ahmes) என்பவரின் காலத்திலேயே, ஒரு தெரியாத ராசியைக் கொண்ட சொல்வடிவான (verbal) சாதாரணச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் அளவிற்குக் கணிதம் வளர்ந்திருந்தது. சுருக்க முறைகளோ, குறியீடுகளோ (symbols) கையாளப்படவில்லை. விடைகளைச் சரி பார்ப்பதற்கும், தவறுகளைக் கணக்கிட்டுத் திருத்துவதற்கும், இம் முறை பயன் படுத்தப்பட்டது. போதிய அளவு குறியீடுகள் வளர்ச்சியடையாத காரணத்தால் எகிப்தியர் இதற்குமேல் தொடர்ந்து ஒன்றும் செய்யவில்லை. அதன்பின் இயற்கணிதம் மிக மந்தமாக வளர்ந்ததாகத் தெரிகின்றது.

இரண்டாம் படி

யூக்ளிட் தம்முடைய வடிவியல் நூலை வெளியிட்டு ஏறத்தாழ 300 முதல் 500 ஆண்டுகள் சென்ற பின்னரே திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தப்பட்ட சொற்களுக்குக் கிரேக்கர்கள் சுருக்கக் குறிகளை எடுத்தாளத் தொடங்கினர். கி. பி. 300-ல் அலெக்சாண்டிரியாவில் வாழ்ந்துவந்த டயஃபண்டஸ் (Diophantus) என்ற கிரேக்கக் கணித மேதை இயற்கணிதத்தில் பல சுருக்கக் குறிகளைக் கையாண்டதாகத் தெரிகின்றது. தெரியாத ஒரு பொருளுக்கு ஒரு குறியீட்டையும், எண்களுக்கு, சுருக்கக் குறிகளையும், இவர் பயன்படுத்தினலும் செய்கைகள் (operations) எழுத்தாலேயே குறிப்பிடப்பட்டன. கணித முன்னேற்றத்தில் அதிகம் பங்கு கொண்ட அராபியரும்கூட 'டயஃபண்டஸ்' கையாண்ட முறையிலேயே செய்கைகளைக் குறிப்பிட்டனர். 13ஆம் நூற்றுண்டு வரை அதிகமான மாற்றங்கள் ஒன்றும் ஏற்படவில்லை.

மூன்றுவது படி

டயஃபண்டஸ் வாழ்ந்து கிட்டத்தட்ட 1,000 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னரே இயற்கணிதத்தில் குறியீட்டு முறை அதிகமாகப் பயன் படுத்தப்பட்டது.

ஆயினும், ஐரோப்பியக் கணக்கியலார்கள் இந்தக் குறியீடு களையும், செய்கைகளுக்குரிய குறியீடுகளையும் விளங்கி அறிவதற் குள் பதினேழாம் நூற்றாண்டின் பாதிவரை முடிந்துவிட்டது.

ரிகார்ட் (Recorde) என்பவர் சமன்பாட்டுக் (=) குறியையும், ஆட்ரெட் (Oughtred) என்பவர் பெருக்கல் (×) குறியையும், லிபினிட்ஸ் (Leibnitz) என்பவர் பெருக்கலுக்கு (·) குறியையும் முதன்முதலில் பயன்படுத்தினர்.

நாம் x என்ற ஆங்கில எழுத்தைத் தெரியாத பொருளுக்கோ, அளவுக்கோ பயன்படுத்துவதுபோல் டயஃபண்டஸ் ஒரு கிரேக்க எழுத்தைப் பயன்படுத்தினார்.

வியட்டா (Vieta) என்னும் கணக்கியலார் அளவுகளை எழுத்து களால் முதன்முதலில் குறிப்பிட்டார்; தெரியாத அல்லது மாறும் அளவுகளை உயிரெழுத்துகளாலும், தெரிந்த அளவுகளை மெய் யெழுத்துகளாலும் குறிப்பிட்டார். இதற்குப் பிற்காலத்தில் தோன்றிய டெகார்டே (Descartes) என்பவர் இப்போது பழக்கத் திலிருக்கும் முறையை ஏற்படுத்தினார். அதாவது, ஆங்கில மொழி யெழுத்துத் தொகுதியின் ஆரம்ப எழுத்துகள் மாறிலிகளைக் குறிக்கவும், இறுதியிலுள்ள எழுத்துகள் மாறிலிகளை அல்லது தெரியாத அளவுகளைக் குறிக்கவும் பயன்படுத்தினார். எதிர்மறை எண்களின் (negative numbers) கருத்துருவாக்கம் கணித வர லாற்றில் மற்றொரு முக்கிய நிகழ்ச்சியெனலாம். டயஃபண்டஸ் சமன்பாடுகளின் மூலங்களாக நேர் மூலங்களை (Positive roots) மட்டிலுமே விடுவித்தார். நம் நாட்டுக் கணிதவியலார் பாஸ் கராச்சாரியார் (1114ஆம் ஆண்டு) எதிர்மறை மூலங்கள் (negative roots) இருப்பதை அறிந்ததாகத் தெரிகின்றது; ஆனால், அவற்றைப் பயனற்றவையென்று தள்ளிவிட்டார். டெகார்டே எதிர்மறை எண்களை நேர்மறை எண்களுக்கொப்பாக வரை படத்தில் குறித்துக் காட்டினார். எதிர்மறை எண்கள் கொண்டு கணிக்கும் முறைகளை நிறைவுபடுத்தினார்.

அடுக்குக் குறி (exponent) மெதுவாகவே பழக்கத்திற்கு வந்தது. எண்களுக்குப் பதில் எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தியதால் இம் முறை சிறிதுசிறிதாக வளர்ந்தது. உதாரணமாக $(x-y)$-ன் 6ஆம் அடுக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு விரித்து எழுதப்பட்டது.

$xxxxxx - 6xxxxxy + 15xxxxyy \ldots \ldots\ldots + yyyyyy$. இப்படி யாக, இயற்கணிதம் மிக மெதுவாக வளர்ந்துவந்தது. சொல் வடிவிலிருந்து, சுருக்கக் குறியீட்டு முறை வளர்வதற்கு 2,000

ஆண்டுகளும் அதிலிருந்து குறியீட்டு இயற்கணிதம் (symbolic Algebra) இன்றைய நிலையை அடைவதற்கு மற்றுமோர் ஆயிரம் ஆண்டுகளும் ஆயின. எனவே, இன்றுள்ள இயற்கணிதம் ஏறத் தாழ 300 முதல் 400 ஆண்டுகளுக்கு உட்பட்டது எனலாம்.

பொதுவாகக் கணித வரலாறும், முக்கியமாக இயற்கணித வரலாறும் கணித ஆசிரியர்களுக்கு ஒரு கலங்கரை விளக்காகும். சிக்கல்களை விடுவிப்பதன் மூலமாகவே தோன்றி வளர்ந்த இக் கணிதப் பாடப்பகுதி புதுப்புது வகையான செய்முறை வழிகளைத் தோற்றுவிப்போருக்கு இன்றும் ஓர் உறுதுணையாகவே உள்ளது.

இயற்கணிதம் கற்பிப்பதன் குறிக்கோள்கள்

இயற் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகளைத் தெள்ளத் தெளிய அறியவேண்டும் என்பது இப் பாடம் சிறிய வகுப்புகளி லேயே கற்றுத்தரப்படுவதற்கான முக்கியமான காரணங்களில் ஒன்றாகும். சிக்கல்களை விடுவிப்பதற்குச் சூத்திரங்களைப் பயன் படுத்துவதால் இந்த முறை தெளிவாகின்றது. சதவீதம், வட்டி வீதம் முதலியவற்றில் உள்ள கணக்குகள் இயற் கணித முறையை மேலும் வலியுறுத்துகின்றன.

இயற் கணிதம் கற்பிப்பதன் முதற்படி: ஒரு தெரியாத ராசியை எழுத்தின் மூலம் குறிப்பதும், சொற்களைக் குறியீட்டுக் கூற்று களாக அமைப்பதும் இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைகளாகும். சூத்திரங்களின் பொருளை அறிந்து அவற்றைத் தக்க முறையில் பயன்படுத்த அறிதலும், ஒருபடிச் சமன்பாட்டின்மூலம் தெரி யாத ராசி ஒன்றைக் கண்டுபிடிப்பதும், அவ்விதச் சமன்பாட்டைப் புனையக் கற்பதும் இதற்குத் துணைபுரிகின்றன.

இதில் நல்ல தேர்ச்சி பெறுதலும், கணக்குகளில் சார்பு நிலை யைக் கண்டுணர்ந்து, அதை முறைப்படி எழுதி இயன்றவரை இவற்றை வரைபடத்தில் அமைத்தலும் இன்றியமையாதனவாம்.

இரண்டாம்படி: ஒருபடிச் சமன்பாட்டினைக் கற்பதோடு இருபடிச் சமன்பாட்டினையும் அதன் தொடர்ச்சியாகக் கற்றுத் தர வேண்டும். திசையெண்களைப்பற்றிய கருத்தை இந் நிலையில் மாணவர்கள் அறியச் செய்யலாம். $(a+b)^2$ போன்ற முற் றொருமைகளின் விரிவுகளையும், பல்லுருக் கோவையை ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கும் முறையையும் கற்க மாணவர் பக்குவ நிலையிலிருப்பர்.

மூன்றாம்படி: மேற்கண்ட அறிவும், ஆற்றலும் தொடர்ந்து வளர வழிசெய்ய வேண்டும், முதலாம், இரண்டாம்படிக்

கோவைகளோடு மூன்ரும்படிக் கோவைகளும் எடுத்தாளப்பட வேண்டும். முடிந்தவரை, மென்மேலும் கடினமான கணக்குகள் செய்யவேண்டி வரும்போது கோவையின் படிகளை ஒன்ருென்ருக அதிகப்படுத்தலாம். வடிவகணிதத்தில், பரப்பளவிலிருந்து, கன அளவுக்கு மாறும்போது மூன்ரும்படிக் கோவையின் தேவை யைக் கூறலாம்: பரப்பளவுகளை கணிக்கும் இருபடிச் சமன்பாடு களும் சார்பலன்களும், மூன்ரும்படிச் சமன்பாடுகளோடு சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தப்பட வேண்டும். கன அளவு சார்பாகப் பயன்படும் சூத்திரங்கள்.

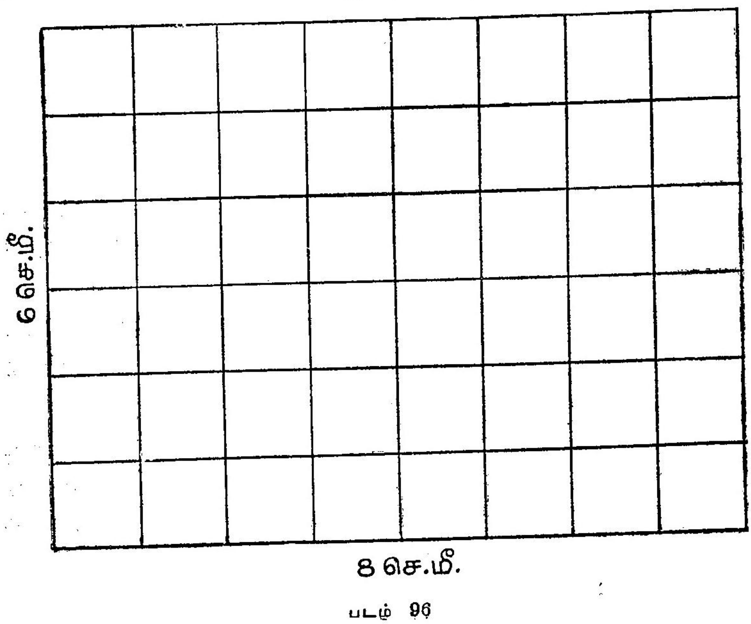
$V = a^3, V = abc, V = \frac{4}{3}\pi r^3, V = \pi r^2 h.$ முதலியன.

இயற்கணிதம் கற்பிக்கும் முறை

விதிகள், சூத்திரங்கள் மூலமாக இயற்கணிதத்தை ஆரம்பிப் பதே சாலச் சிறந்ததாகும்.

8 அலகுகள் நீளமும், 6 அலகுகள் அகலமும் கொண்ட ஒரு செவ்வகம் வரைந்து அதை ஓரலகு சதுரங்களாகப் பிரித்தபின் கீழ்க் கண்டவாறு மாணவர்களைக் கேள்விகள் கேட்க வேண்டும்.

1 படத்தில் எத்தனை சிறிய சதுரங்கள் உள்ளன? ஒன்ருென் ருகக் கூட்டிப் பார்க்காமல் இதைச் சுருக்க முறையில் அறிய



படம் 96

முடியுமா? மொத்தச் சிறிய சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = நீளப் பக்கத்திலுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கை × அகலப் பக்கத்து அலகுகளின் எண்ணிக்கை என்ற உண்மையை மாணவர்களிடம் கேள்வி கேட்டு வெளியிடச் செய்க. இதுபோன்று இன்னும் இரண்டு மூன்று செவ்வகங்கள் வரைந்து, அவற்றின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையை அறியச்செய் – சிறிய செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கை செவ்வகத்தின் பரப்பளவாகும்.

1. பகுப்பாராய்ச்சி: (Analysing): தனிப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து பொதுவிதியைப் பகுத்தாய்தல், முதற் படி.

செவ்வகத்தின் பரப்பு = நீளத்தின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை × அகலத்தின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை.

2. குறியீட்டுமுறைப்படுத்துதல் (Symbolising): குறியீட்டு முறையினால், சொற்றொடர்களால் கூறப்பட்ட பல விதிகளைச் சுருக்கமாக வசதியான முறையில் கூற முடிகின்றது. இவற்றை நினைவில் வைத்துக் கொள்வதும் எளிது.

செவ்வகத்தின் பரப்பு S என்க.

செவ்வகத்தின் நீளம் a அலகுகள் என்க.

செவ்வகத்தின் அகலம் b அலகுகள் என்க.

ஆகவே, $S = a \times b$ சதுர அலகுகள்.

அதாவது, $\mathbf{S = ab}$ ச. அலகுகள்

ab என்பது நீள அகலங்களை மட்டுமன்றி இவற்றின் பெருக்கல் தொகையையும் குறிக்கின்றது என்பதை ஆசிரியர் வலியுறுத்த வேண்டும். $S = ab$ என்பது ஒரு சூத்திரம்.

முதன்முதலாக சொற்றொடருக்குப் பதில் குறியீட்டுமுறை பயன்படுத்தப்படுவதால் இதில் பொருட் சிறப்பையும், குறியீட்டு முறைச் சிறப்பையும் மாணவர்க்கு எடுத்துரைக்க வேண்டும்.

$S = ab$ என்பது செவ்வகத்தின் பரப்பளவு. இது விதியின் சுருக்கெழுத்துமுறை என்று குறிப்பிடுக. சூத்திரங்கள் முதன் முதலில் எண்கணிதத்தின் வாயிலாக மாணவர்களுக்கு அறிமுகமாகின்றன. மேலும் சில உதாரணங்கள்:

$$C = 2\pi r; \quad A = \pi r^2; \quad A = \tfrac{1}{2}\, b \cdot h; \; I = \frac{PNr}{100}$$

3. விளக்கம் (Interpretation): சூத்திரங்களைக் கண்மூடித்தனமாகக் கற்பது தவிர்க்கப்படவேண்டும். படித்த சூத்திரத்தை விளக்கவும், பயன்படுத்தவும் மாணவர் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக:- $C = 2\pi r$, $I = \frac{PNr}{100}$ என்ற இரு சூத்திரங்களிலும் 'r' என்பது எதைக் குறிக்கும்?

4. பிரதியீடு (Substitution): கொடுக்கப்பட்ட பாடப்பயிற்சியில் மாணவர் கணக்குகளைச் செய்ய முனையும்போது முதலில் சூத்திரத்தை எழுதிக் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட பல்வேறு அளவுகளுக்கும் சூத்திரத்தில் பிரதியீடு செய்யவேண்டும். அதன்பின் சூத்திரத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள செயல்முறையைச் செயற்படுத்த வேண்டும்.

ஆகவே, சூத்திரத்தைப் புனைந்து பயன்படுத்துவதற்குக் கீழ்க் கண்ட நான்கு செய்ம்முறைகளும் அவசியம்.

(a) கொடுத்த கணிதத்தின் இயல்பையறிந்து, பாகுபாடு செய்து அதனைச் செய்யும் விதிகளைத் தீர்மானிக்கப் பழகுதல்.

(b) பாகுபாடு செய்து, தீர்வு செய்த முடிவைக் குறியீட்டு முறைப்படுத்துதல்.

(c) கொடுத்திருக்கும் குறியீடுகளை விளக்கப் பழகுதல்.

(d) பொருள் பிரதியீடு செய்து பழகுதல்.

இவற்றில், முதலிரண்டும் சூத்திரத்தை முறைப்படுத்தும் திறன் என்றும், பிற்றைய இரண்டும் சூத்திரத்தைக் கையாளும் திறன் என்றும் கூறலாம்.

சூத்திரங்களின் உருமாற்றம்

சூத்திரத்தில் கண்டுள்ள அளவுகள் பலவற்றிற்குமுள்ள தொடர்புகளை அறிந்துகொள்ள இம் முறை மிகவும் பயன்படுகின்றது. உதாரணமாக:

(a) $s = vt$ (தூரம் = வேகம் × காலம்)

$\therefore t = \frac{s}{v}$, $v = \frac{s}{t}$ அதாவது, இந்தச் சூத்திரத்தில் கண்டுள்ள மூன்று அளவுகளுள் ஏதேனும் இரண்டு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மூன்றாவதைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

(b) வட்டி $I = \frac{Pnr}{100}$ [P = அசல், n = காலம், r = வட்டி வீதம்]

$\therefore\ r = \frac{I \times 100}{P \times n}$ முதலியன.

இயற்கணிதத் திறமையின் பண்புகள்

1. சூத்திரங்களைப் புரிந்துகொள்ளும் திறன்.

2. சமன்பாடுகளை எடுத்தாளும் திறன்.

3. சிக்கல்களை விடுவிக்கும் திறன்.

1. சூத்திரங்களைப் புரிந்துகொள்ளும் திறன் : குறியீடுகளின் பொருளை மேற்பார்வையிலேயே அறிந்து அது கையாளப்பட வேண்டிய இடத்தையும் முறையையும், எந்தவித அலகுகள் (units) பயன்படுத்த வேண்டுமென்பதையும், தெள்ளத் தெளியத் தீர்மானித்தல், சரியான விடைகாண முதற்படியாகும்.

2. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் திறன்

(a) தேவைக்கு ஏற்பச் சமன்பாடுகளை மாற்றியமைத்துக் கொள்ளுதல்.

(b) விடுவித்தல்.

உதாரணமாக : தீர் :

$$5x + 6 = 3x + 10$$
$$5x - 3x = 10 - 6$$
$$2x = 4 \qquad \therefore\ x = 2$$

சரிபார்த்தல் :

$$(5 \times 2) + 6 = (3 \times 2) + 10$$
$$10 + 6 = 6 + 10$$
$$\therefore 16 = 16$$

3. சிக்கல் விடுவிக்கும் திறன்: ஒரு மனிதனின் வயது அவன் மகன் வயதைப்போல் மூன்று பங்காகும்; ஆனால் 10 ஆண்டுகளுக்கு முன் அவன் வயது, அவன் மகனின் வயதைப்போல் 5 பங்காக இருந்ததென்றால், இப்போது அவர்கள் வயதினைக் கணி.

முதற்படி : மகனின் வயதை x எனக் கொள்.

இரண்டாம்படி : அடுத்துவரும் அட்டவணையில் 1, 3 பத்திகளில் குறி.

அட்டவணை

பெயர்கள்	தற்போதைய வயது 1	சரிபார்த்தல் 2	10 ஆண்டுகளுக்கு முன் வயது 3	சரிபார்த்தல் 4
தந்தை	$3x$	60	$3x-10$	50
மகன்	x	20	$x-10$	10

மூன்றும் படி : கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் நிபந்தனைப்படி

$$3x-10=5(x-10)$$

நான்காம் படி : $3x-10=5x-50.$

$$2x=40$$

$$x=20$$

விடை : மகன் வயது 20
தந்தை வயது 60

சரிபார்த்தல் : 10 ஆண்டுகளுக்கு முன் மகன் வயது 10
தந்தை வயது 50

அதாவது தகப்பன் வயது மகன் வயதைப்போல் 5 மடங்கு. [2ஆம் பத்தி சரியாக இருந்தால் 4ஆம் பத்தியும் சரியாக இருக்கும்.] சொல் வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட சிக்கல்களை இயற் கணித முறைப்படி விடுவித்தல்.

புதிர்களை விடுவிக்கும் ஆற்றல் பெறுவதே இப் பாடமுறையின் முக்கிய நோக்கமாகும். சமன்பாடுகள் பல காரணங்களுக்காகக் கற்பிக்கப்படுகின்றன.

(1) பள்ளிப் பாடங்களில் பல வினாக்களில் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வுகாண வேண்டியுள்ளது.

(2) அன்றாட வாழ்க்கையில் எதிர்ப்படும் பல பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாணச் சமன்பாடுகள் பயன்படுகின்றன.

ஆகவே, பாடத்திட்டத்தில் சேர்க்கப்படும் கருத்துகள் மேற் கண்ட பயன்களைக் கொடுக்கும் முறையில் தேர்ந்து எடுக்கப்பட வேண்டும்.

அன்றாட வாழ்க்கையில் கொடுக்கல் வாங்கல் பழக்கத்திற்கும், அறிவியல், அளவைகள் போன்ற பாடப்பகுதிகளில் அமைந்த

கல்வி முறைக்கும் ஏற்றவாறு சிக்கல்கள் புனைய வேண்டும். மேலும் இவ்விதப் படிப்பு, சமுதாய வாழ்க்கைக்குத் தேவையான ஒழுக்கப் பயிற்சியின் பிரதிபலிப்பாக அமைதல் நன்று. ஆகவே, சொல் வடிவக் கணக்குகள் கொடுக்கும்போது கீழ்க்கண்ட செயல் வகைகள் வற்புறுத்தப்படவேண்டும்.

1. கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை அறிந்து அவற்றைக் குறியீட்டு முறைப்படுத்துதல்.

2. தொடர்புகளைத் தெளிவாக்கிக் குறியீட்டு முறையில் எழுதுதல்.

3. கொடுக்கப்படாத ஆனால் தேவையான தொடர்புகளை மாணவர்களே சேர்த்துக்கொள்ளுதல்.

4. தேவையான சூத்திரங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

5. கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரங்களில் பிரதியீடு செய்து சமன் பாடுகளைச் சரிபார்த்தல்.

இவற்றிற்கு ஆதாரமாக, மாணவர்களுக்கு விதிப்படி செயலாற்றும் நுட்பம் தேவை. வாசித்துணரவும், திட்டம் வகுக்கவும், அவ்வப்போது தேவையான தீர்மானங்கள் எடுக்கவும், கருத்தினை ஊகித்து அறியும் திறன்வேண்டும்.

கீழ்க்கண்டவை போன்ற பயிற்சிகளை அவ்வப்போது கொடுக்கலாம்.

	சொல்தொடர்	குறியீட்டு முறை
1.	10 ஆண்டுகளுக்கு முன் A-ன் வயது	$x-10$
2.	20 ஆண்டுகளுக்குப் பின் B-ன் வயது	$y+20$
3.	ஓர் எண்ணோடு ஐந்தைக் கூட்டினால்	$a+5$
4.	இரண்டு எண்களின் கூட்டுத் தொகை 14	$x+y=14$
5.	இரண்டு எண்கள் 4 : 3 என்ற விகிதத்தில் இருக்கின்றன.	$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$
6.	அடுத்தடுத்த இரண்டு முழு எண்களின் கூடுதல் 21	$x+(x+1)=21$
7.	அடுத்தடுத்த இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களின் கூடுதல் 24	$(2x+1)+(2x+3)=24$

சார்பலன்கள், சார்பலனின் கருத்து (Functions and Functions concept)

ஒரு பொருளின் அளவுகள் மற்றொரு பொருளின் அளவுகளைச் சார்ந்திருப்பது சார்பலனாகும். ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு, பரப்பளவு முதலியன வட்ட ஆரத்தின் சார்புகளாகும். சதுரத்தின் பரப்பளவு அதன் பக்கத்தின் அளவைச் சார்ந்தது. ஒரு பெட்டியின் கனஅளவு அதன் நீள, அகல, உயரங்களின் சார்பாகும். நாம் நடந்து செல்லும் தூரம் நேரத்தின் சார்பாகும். காலத்தைப் பொறுத்து மாறும் எல்லாவற்றையும் காலத்தின் சார்பு எனலாம்.

மாறிகளும் மாறிலிகளும் (Variables and Constants)

நாம் தினசரி வாழ்க்கையில் பார்க்கும் எத்தனையோ அளவுகள் மாறாமல் இருக்கின்றன. உதாரணமாக, நம்முடைய கை கால்களின் விரல்களின் எண்ணிக்கை, தண்டவாளங்களுக்கிடையிலுள்ள தூரம், ஊர்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் முதலியன என்றும் மாறாமல் இருக்கின்றன. அவை மாறிலிகள் எனப்படும். ஆனால் விலைவாசிகள், பகல் இரவின் வெப்ப நிலை, குழந்தைகளின் உயரம், எடை முதலியன மாறிக்கொண்டேயிருப்பதால் இவை மாறிகள் எனப்படும். $C=2\pi r$ என்ற விதியில் ஆரம் 'r' மாறும் போது சுற்றளவு C-ம் உடன் மாறுகின்றது. π-மாறாமல் இருக்கின்றது. இதில் C, r இரண்டும் மாறிகள். ஆனால், C-ன் அளவு, r-ன் அளவைப் பொறுத்தே உள்ளதால் r ஐச் சாரா மாறி (independent variable) என்றும், C ஐச் சார்ந்தமாறி (dependent variable) என்றும் கூறலாம்.

சார்பு குறியீடு (Functional Notation)

$C=\pi d$ என்பதில் C-ன் மதிப்பு, d-ன் மதிப்பின் சார்பலன் என்று கூறுவோம். அதாவது, C என்பது function of d என்று கூறுவர். இதை $C=f(d)$ என்று குறிப்பது வழக்கம். சமன்பாடுகளை விடுவித்தல், வரைபடம் வரைதல், சூத்திரங்களின் உதவியால் கணக்குகள் செய்தல் இவற்றிற்கு அடுத்தபடியாகச் சார்பலனைப் பற்றிய கருத்தை மாணவர்களுக்கு உணர்த்தவேண்டும். உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்கள் இக் கருத்தை அறியப் பக்குவம் எய்தியிருப்பர். ஆதலால், கணிதப் பாடத்தில் சார்பலனின் கருத்தை அறிவித்தல் முக்கிய நோக்கமாக அமையவேண்டும். இதை ஜெர்மானியக் கணக்கியலார் கிளின் (Klein) என்பவர் கணிதத்தின் உயிர் என்று கூறுகின்றார்-'Function concept is the soul of Mathematics'.

கீழ்க்காணும் உதாரணங்கள் சார்பலனின் கருத்தின் தனிப் பண்புகளை வலியுறுத்துகின்றன.

I சார்பு நிலையைக் கண்டுணர்தல் (Recognise dependence.)

(i) சொல் வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்புகள் (காலி இடங்களை நிரப்புக)

1. புத்தகங்களின் வாங்கிய விலை, வாங்கிய புத்தகங்களின் ——— ஒரு புத்தகத்தின் ———பொறுத்தது.

2. ஒரு சதுரத்தில், சுற்றளவு அதன் ———அளவைப் பொறுத்தது.

3. ஒரே சீரான வேகத்தில் செல்லும் ஒரு மிதிவண்டி சென்ற தூரம், அது எடுத்துக் கொண்ட———பொறுத்தது.

(ii) சூத்திர வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்புகள்

1. $A = bh$ என்பது, ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு அதன் ——— ———பொறுத்தது எனக் காட்டுகின்றது.

2. $I = (\cdot 08)\ Pn$ என்பது ஓர் அசலுக்கான வட்டி,——— ———பொறுத்தது என்று காட்டுகின்றது.

II குறியீட்டு முறையில் தொடர்பு நிலையை மாற்றியமைத்தல்.

(i) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் அளவுகளுக்குள்ள தொடர்பைக் காணுதல்.

1. சென்டிகிரேட் வெப்பமானிக்கும், பாரன்ஹீட் வெப்ப மானிக்கும் உள்ள தொடர்பு.

2. கிலோ மீட்டருக்கு 10பைசா வீதத்தில், தூரத்திற்கும் பயணக் கட்டணத்திற்குமுள்ள தொடர்பு.

(ii) அளவைப் பட்டியல் வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பைச் சமன் பாடு வடிவில் மாற்றியமைத்தல்.

(1)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

(2)

x	2	3	4	5	6
y	8	27	64	125	216

III சூத்திர வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பை விளக்குதல்.

(i) $V = abc$ என்ற சமன்பாட்டில் a, b, இரண்டும் மாறிலிகளானல், V-க்கும், C-க்குமுள்ள உறவென்ன?

$y = \frac{k}{x}$ என்ற சமன்பாட்டில், k ஒரு மாறிலியானல், y, x-க்கு உறவு என்ன?

IV வரைபடத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிலையைத் தெளிவாக்குதல்.

1. $y = 3x - 7$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடத்திலிருந்து

(a) $x = 2$ என்ருல் y-ன் மதிப்பு என்ன?

(b) $y = 0$ ஆக இருக்கும்போது x-ன் மதிப்பு என்ன?

(c) $3x - 7 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வு என்ன? என்று கண்டுபிடி.

2. $y = x^2 - 5x + 6$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

(a) $x = 2$ என்ருல் y-ன் மதிப்பு என்ன?

(b) $x^2 - 5x + 6$-ன் மூலகங்கள் யாவை?

(c) $x^2 - 5x + 6$-ன் மிகக் குறைந்த (minimum) மதிப்பென்ன? என்று கண்டுபிடி.

வரைபடங்கள்

சூத்திரத்தை நாம் ஒரு விதியின் சுருக்கம் என்போமானல், வரைபடத்தைச் சூத்திரத்தின் படம் என்று கூறலாம்—ஒருவகை இயற்கணிதப் படம் (algebraic picture) என்றும் கொள்ளலாம். சூத்திரத்தின் உதவியால் விதிகள் எளிய நடைக்கு மாற்றப் படுவதுபோல் வரைபடங்களின்மூலம் சூத்திரங்கள் அதிகத் தெளிவு பெறுகின்றன. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினல் எந்த மதிப்பையும் கணக்கிட்டுக் கூற முடியும். ஆனல், வரைபடத்தின் மூலமோ, ஓரளவு தோராயமாகப் பார்த்தவுடனேயே கூறிவிட முடியும்.

சாதாரண, அன்ருட அனுபவத்தில் வரைபடங்களை மாணவர்கள் பார்ப்பதற்கு அதிக வாய்ப்புகளுண்டு. உதாரணமாக, தட்பவெப்பநிலைபற்றிய விளக்க வரைபடங்கள், உற்பத்தி, விற்பனை முதலியவற்றின் விளம்பரப் படங்கள், தானக வரையப்

பட்ட காற்றழுத்த வரைகோடு (barograph) இவற்றை நம் தினசரித் தாள்களில் பார்க்காமலிருக்க முடியாது. வரைபட முறையைக் கண்டுபிடித்த பெருமை டெகார்டே (Descartes) என்ற கணிதவியலாரைச் சேரும்.

ஒன்றையொன்று சார்ந்து மாறும் இரண்டு அளவுகளையோ அல்லது புள்ளிவிவரக் குறிப்புகளையோ, கவர்ச்சியாகவும், தெளிவாகவும் அறிவை வளர்க்கும் விதத்திலும் (informative) எடுத்துக் காட்டுவதற்கு வரைபடங்களைப் போன்ற ஆற்றல் வாய்ந்த முறைகள் வேறு இல்லை. எண் வடிவில் இருக்கும் அட்டவணையை விளக்கப் படமாக மாற்றுவது வரைபட முறையாகும். படத்தின் வாயிலாக விளக்கப்படும் விவரங்கள் பட்டியல் படுத்தப்பட்ட விவரங்களைக்காட்டிலும் நினைவில் நிலைத்துநிற்பதோடு, குறிப்பிட்ட சில (மாறும்) அளவுகள் எவ்விதம் மாறுகின்றன என்பதையும் தெளிவாக அறியத் துணைசெய்கின்றன.

பத்திரிகைகளிலும், பருவ இதழ்களிலும் (Periodicals) விளம்பரங்களுக்காகப் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியியல் வரைபடங்களை எல்லோரும் கவனித்திருக்கலாம். பொதுப்பணித் துறைகளைச் (Government Departments) சார்ந்த விளம்பரங்கள் பலவும் வரைபடங்கள் மூலமாகவே தெரிவிக்கப்படுகின்றன. எவரும் ஏறிட்டுக் கூடப் பார்க்க விரும்பாத சுவையற்ற விவரங்களைக்கூட, வரைபடங்கள்மூலம் கவர்ச்சியுள்ளனவாகச் செய்யலாம்.

அறிவியலாரும், பொறியியலாரும் தாங்கள் மேற்கொண்ட சோதனைகளின் முடிவுகளை வரைபடம் வரைந்து பார்ப்பதன் மூலம் புதிய தகவல்களைத் தெரிந்துகொள்கின்றனர். பொது விதிகளையும் இவற்றிலிருந்து உருவாக்குகின்றனர்.

தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்தி அளவுகள் பொதுவாக வரைபடங்களின் மூலமாகவே காட்டப்படுகின்றன. மருத்துவ மனைகளில் நோயாளிகளின் உடல் வெப்பநிலை மாறுபாடுகளை வரைபடங்கள் மூலமாகவே ஆய்வு செய்கின்றனர்.

தொழில் வளர்ச்சி, மக்கள்தொகைப் பெருக்கம், வேலைவாய்ப்புகளில் முன்னேற்றம் முதலிய பற்பல விவரங்களையும் பார்த்தமாத்திரத்தில் தெரிந்துகொள்வதற்கு வரைபடங்கள் பெரிதும் உதவுகின்றன.

பள்ளிப் பாடத் திட்டத்தில் 'வரைபடங்கள்' சேர்க்கப்பட்டிருப்பதற்கான சில முக்கியக் காரணங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. தற்காலத்தில் வரைபட முறை விளக்கங்கள் வாழ்க்கைத் துறைகள் அனைத்திலும் வெகுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புத்தகங்களிலும், பத்திரிகைகளிலும், பொது அறிவிப்புகளிலும் விளம்பரங்களிலும் வரைபடங்கள் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப் படுவதால் இவற்றைப்பற்றிய அறிவைப் பொது அறிவு (General knowledge) எனலாம்.

2. காட்சிவழிக் கருத்து அறிவிக்கும் முறை மிகச் சிறந்த போதனை முறையாகும். வரைபடங்கள் பார்வையை மிக எளிதில் கவர்வதால் விவரங்களை நினைவில் இருத்திக் கொள்ளவும். அவற்றைத் திறனாய்வு செய்யவும் இவை பயன்படுகின்றன.

3. வரைபட முறையை ஒருவகைக் கண்காட்சி என்று கூற லாம். சிக்கலான அல்லது மிகவும் கவர்ச்சியற்ற தகவல்களையும், கருத்தியலான உண்மைகளையும் ஆர்வம் ஊட்டும்வகையில் வரை படங்கள்மூலம் தெரிவிக்கலாம்.

4. பொதுவாகக் கணிதத்தையும், முக்கியமாக, இயற்கணி தத்தையும் இயந்திரத் தன்மையானவை என்று கருதுவதை இது போக்குகின்றது. இவற்றிற்கு வரைபடங்கள் உயிரூட்டுகின்றன எனலாம்.

5. குறியீடுகளால் குறிப்பிடுகின்ற பல கருத்துகளை வரை படங்கள்மூலம் புலனீடாக அமைத்துக் காட்டலாம்.

6. அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட அளவுகளைப்பற்றி மேலும் அறிவதற்கு வரைபடங்கள் பயன்படுகின்றன. அவற்றை வரை வதற்கு முதலில் நேரம் அதிகமானாலும், அவற்றின் பயன்களுக் காக இந்த நேரத்தைச் செலவிடலாம்.

7. அறிவியல் துறைகள் எல்லாவற்றிலும் வரைபடங்கள் இன்றியமையாதவையாகக் கருதப்படுகின்றன.

8. ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய இரு மாறிகளின் சார்பை விளக்குவதற்கு வரைபடம் போன்ற சிறந்த கருவி வேறில்லை. (உதாரணம்: பயண வரைபடங்கள்.)

9. முன்மதிப்பிடுவதற்கு (predict) இது ஒரு சிறந்த வழி யாகும்.

10. கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளிலிருந்து அவற்றின் இடைப் பட்ட அளவுகளையும் வெளிப்புறமான அளவுகளையும் கணிப்பதற்கு

(interpolation and extrapolation) வரைபடங்களைப் பயன் படுத்தலாம்.

11. $y=mx$ஐச் சார்ந்த வரைபடங்களை, 'நொடி கணிப்பான்' (ready reckoner), அதாவது, அளவுகளை ஓர் அலகு முறையிலிருந்து மற்றதற்கு மாற்றுவதற்கும் பயன்படுத்தலாம். (உதாரணமாக, சென்டிகிரேடிலிருந்து பாரன்ஹீட்டிற்கு மாற்றுவது.)

12. ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளையும் இருபடிச் சமன்பாடு களையும் வரைபடங்கள் மூலம் தீர்க்கலாம்.

'ஒரு விளக்கப்படம் ஆயிரம் சொற்களுக்குச் சமம்' என்ற சீனப் பழமொழி வரைபடங்களுக்கும் பொருந்தும். அட்ட வணைப் படுத்தப்பட்ட அளவுகளை எடுத்துக்காட்டவோ தொடர்பு களை உருவப்படுத்தவோ, மாற்றங்களை விவரிக்கவோ இது போன்ற சிறந்த கருவி வேறில்லை. நல்ல கற்பனைத் திறன் உள்ளவர்கள் கையில் இது ஒரு சக்தி வாய்ந்த கருவியாகும். படவிளக்கங்களின் மூலம் கணிதத்திலுள்ள ஆர்வத்தை வளர்க்கலாம். வரைபடங் களைப்பற்றிய பாடங்கள் உயர்நிலைப்பள்ளிக் கணிதப் பாடத் திட் டத்தில் இடம் பெறுவதற்கு மேற்கூறப்பட்ட சில காரணங்களே போதுமானவையாகும்.

வரைபடம் இருவகைப்படும்.

1. புள்ளியியல் வரைபடம் (Statistical graph);

2. கணிதவியல் வரைபடம் (Mathematical or functiona graph).

புள்ளியியல் வரைபடம்

கீழ்க்கண்ட புள்ளியியல் வரைபடங்களைப்பற்றி எல்லோரும் அறிந்துகொள்வது நம் அன்றாட வாழ்க்கைக்கு அவசியமாகும்.

1. சித்திர விளக்கப்படம் (Picto graph).

2. வட்ட விளக்கப் படங்கள் (Pi—diagrams).

3. பட்டை விளக்கப் படங்கள் (Bar diagrams).

4. நேர்க் கோட்டுப் படங்கள் (Line diagrams).

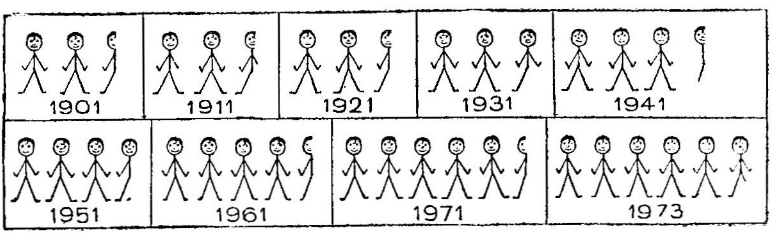
மேலே குறிப்பிட்ட படங்கள் சிறுவர்களும், கல்வியறிவில்லாத வர்களும் அறிந்துகொள்ளும் முறையில் புள்ளி விவரங்களை எளிதில் அறிவிக்கின்றன.

உதாரணமாக, 1901ஆம் ஆண்டு முதல் 1973ஆம் ஆண்டு வரை, பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒருமுறை எடுக்கப்பட்ட மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பிலிருந்து சேகரிக்கப்பட்ட நம் நாட்டின் மக்கள்தொகை விவரங்களும் அவற்றிற்கான சித்திர வடிவ விளக்கப் படமும் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

மக்கள்தொகை விவரம்

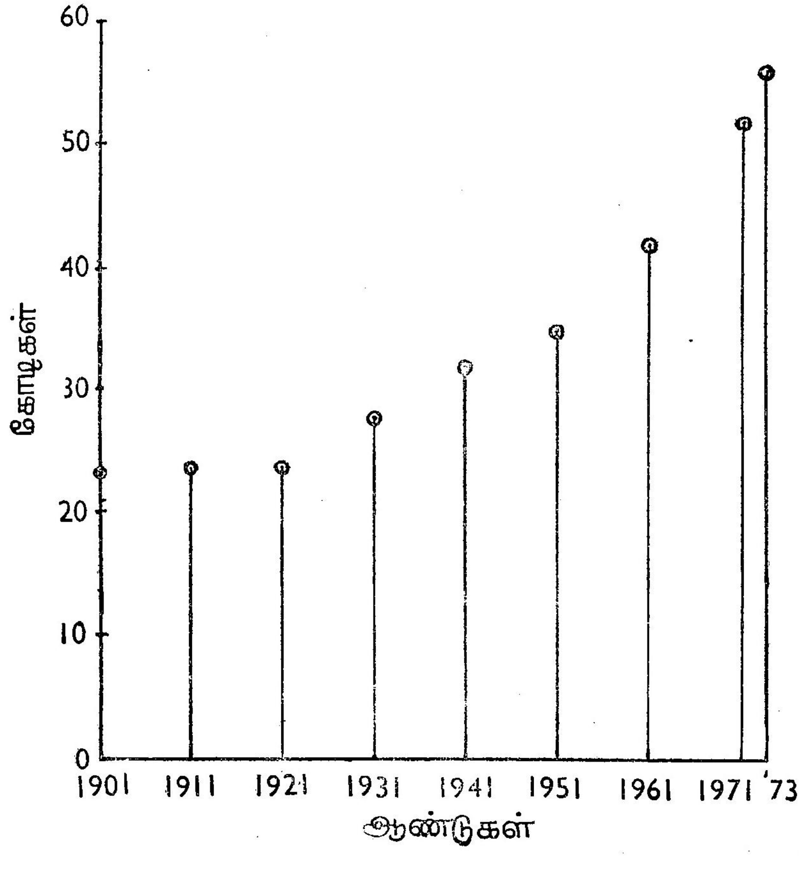
ஆண்டு	மக்கள் தொகை
1901	23,83,40,000
1911	25,20,10,000
1921	25,12,40,000
1931	27,88,70,000
1941	31,85,40,000
1951	36,09,50,000
1961	43,90,70,000
1971	54,70,00,000
1973	57,72,00,000

சித்திர வடிவ விளக்கம் (அளவுத் திட்டம்  = 10 கோடி)



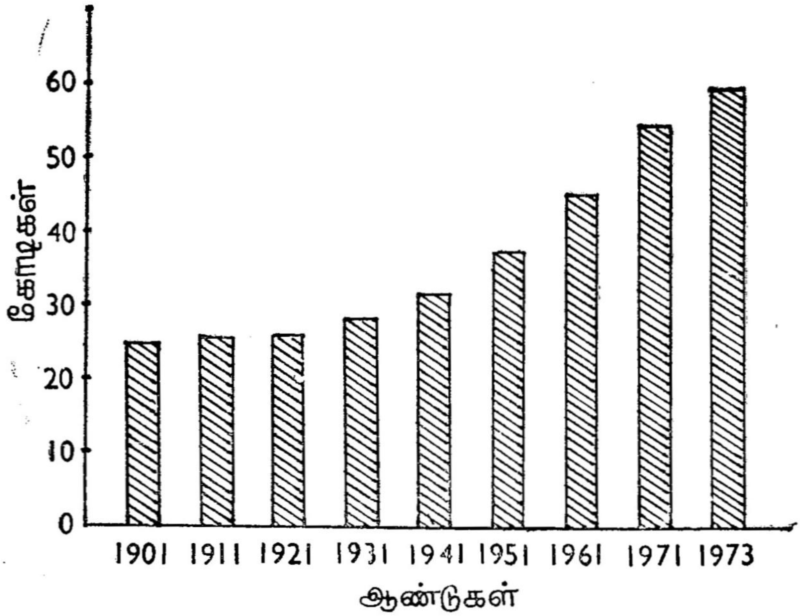
படம் 97

நேர்க் கோட்டு விளக்கப் படம். மேலே கொடுக்கப்பட்ட மக்கள் தொகை விவரத்திற்கான நேர்க்கோட்டு விளக்கப் படம்.



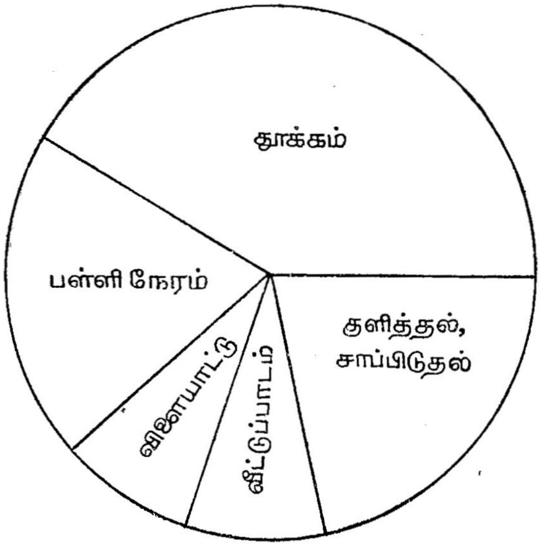
படம் 98

இதற்கான பட்டை விளக்கப்படம்



படம் 99

பத்து வயது மாணவன் ஒருவனுடைய அன்றாட நடவடிக்கைகளைக் காட்டும் வட்ட விளக்கப்படம் (Pi—diagram).



படம் 100

கணிதவியல் வரைபடங்கள்

இவை $y = mx$, $y = mx + C$, $y = an^2$ முதலிய சமன்பாடுகளுக்கான வரைபடங்கள் கணிதவியல் வரைபடங்களாகும். புள்ளியியல் வரைபடங்கள் மெய்விவரங்களை எடுத்துக்காட்டுகின்றன. ஆனால், கணிதவியல் வரைபடங்கள் குறிப்பிட்ட விதிகளை விளக்கும்.

அளவைகள்
(Measurement)

ஆதி முதற்கொண்டே மனிதன் தான் பயன்படுத்தும் பொருள்களை அளந்தறிய விரும்பினான். நேரம், எடை, நீளம் முதலியவை நாம் பார்க்கும் பொருள்கள் எல்லாவற்றையும் (quantities) அளந்தே யறியப்படுபவை. அளவுகோலும் மற்ற முகத்தல் அளவை முறைகளும் கண்டுபிடிக்கப்படுவதற்கு முன், மனிதர்கள் பொருள்களை அளந்தறிவதற்குத் தங்கள் கை, கால்களைப் பயன்படுத்தினர். இதன்மூலம் தோன்றிய அளவுகளே சாண், முழம் (cubit) கைப்பிடி (handful) முதலியவையாகும். கண்ணுக்குப் புலப்படாத அணு முதற்கொண்டு பல்லாயிரம் மைல்களுக்கப்பாலுள்ள விண்மீன்கள் வரை எல்லாவற்றையும் அளந்துதான் அவற்றைப்பற்றி அறியமுடியும். அன்றாட வாழ்க்கைக்குத் தேவையான பற்பல உணவுப் பொருள்களின் அளவுகள், அவற்றை விளையச் செய்யப் பயன்படும் நிலங்கள், வசிக்கும் வீடுகள் முதலியவற்றின் நீள அகல உயரங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அளவுகள் பயன்படுகின்றன. நுட்பமாக அளந்தறிய வேண்டியது, தச்சு வேலை, கட்டட வேலை, அறிவியல், பொறியியல், தொழில் துறைகள் முதலிய எல்லாத் துறைகளிலும் எத்துணை தேவை என்பதை மாணவர்களுக்கு எடுத்துரைக்க வேண்டும்.

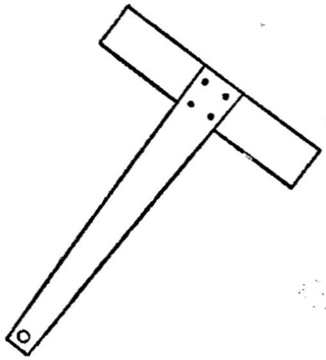
அளக்கும் கருவிகள்

அளக்கும் வடிவியல் சார்பான கருவிகள் சிலவற்றையும், அளக்கும் முறைகள் சிலவற்றையும் இங்கே ஆராயலாம். வடிவியலில் சாதாரணமாகப் பயன்படும் அடிப்படை அளவு கருவிகள்: வரைகோல், காம்பஸ், வரை சட்டங்கள் முதலியவை.

மற்ற வடிவியல் கருவிகள்

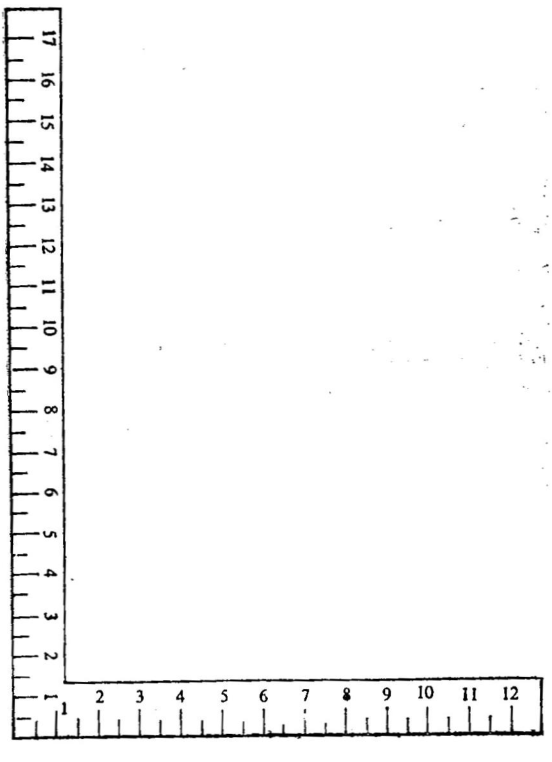
கீழே கூறப்பட்டுள்ள கருவிகளின் பயன்களை மாணவர்கள் அறியவும் அவற்றைப் பயன்படுத்த அவர்கள் அறிவதும் அவசியம்.

1. T சட்டம்: நேர்கோடுகள், இணை கோடுகள் வரைவதற்கு இது மிகவும் இன்றியமையாதது.

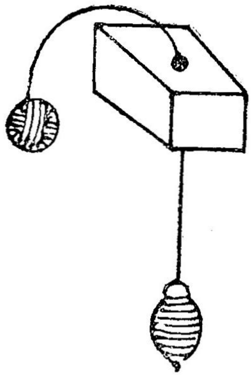


படம் 101 (i)

2. தச்சனின் சட்டம் (Carpenter's square): கட்டைகளின் விளிம்புகளுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும் செங்கோணங்களைச் சரிபார்க்கவும் பயன்படுகின்றது.



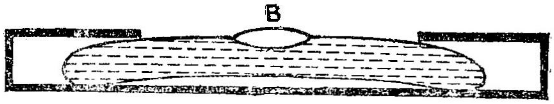
படம் 101 (ii)



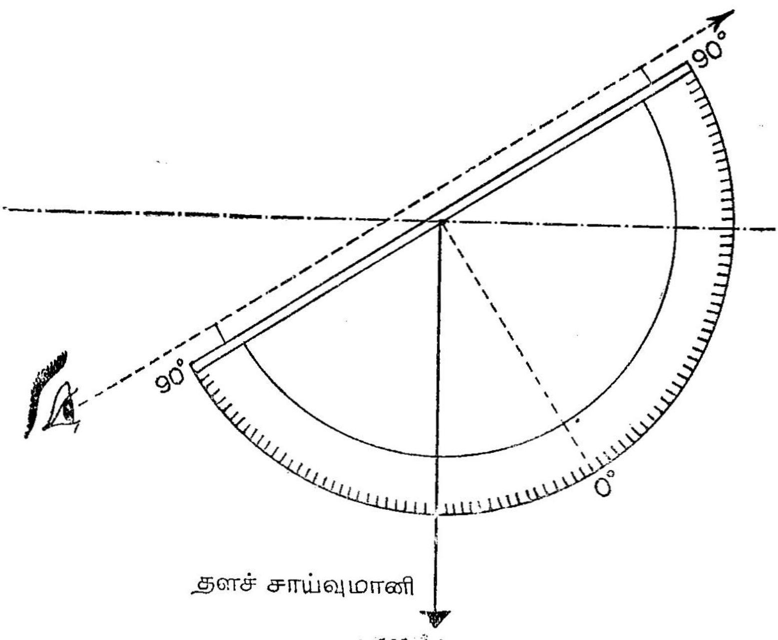
படம் 101 (iii)

3. தூக்கு நூல் (Plumb line): கொத்தன் பயன்படுத்தும் தூக்கு நூலின் உதவியால் ஒரு கோடு அல்லது தளம் செங்குத்தாக இருக்கிறதா என்று அறியலாம்.

4. குமிழி மட்டம் (Spirit level): தச்சரும், கொத்தர்களும் தளங்களின் கிடைநிலையை (horizontal) அறிவதற்குக் குமிழி மட்டத்தைப் பயன்படுத்துகின்றனர். இதில் சாராயம் ஒரு சிறிய குழாயில் அடைக்கப்பட்டு, ஒழுங்கான சட்டத்தில் பொருத்தப்பட்டிருக்கும். இதற்குள் உள்ள சிறிய காற்றுக் குமிழியின் நிலையை வைத்து ஒரு தளம் ஒழுங்கான கிடைநிலையில் உள்ளதா என்று அறிகிறார்கள். கிடைத் தளத்தில் இருக்கும்போது, B என்ற குமிழி குழாயின் மத்தியில் இருக்கும்.



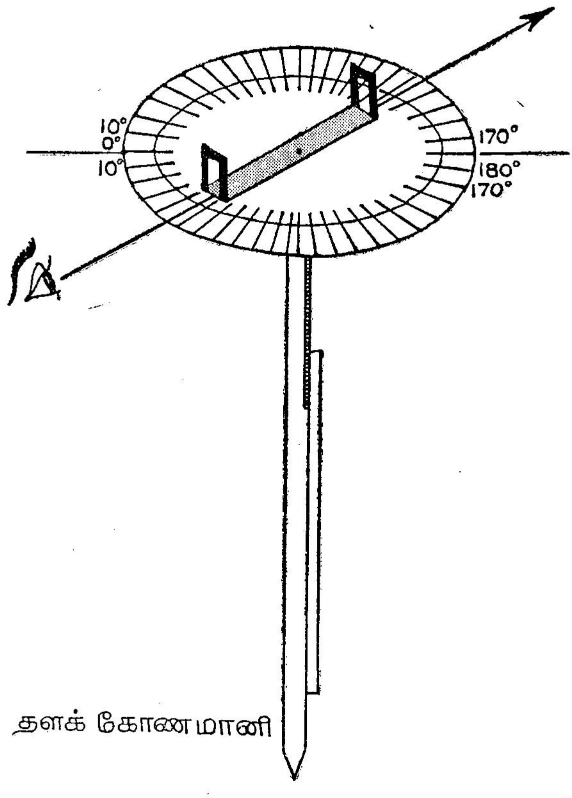
படம் 101 (iv)



படம் 101 (v)

5. தளச் சாய்வுமானி (Clinometer): இந்தக் கருவியின் உதவியால் ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்களை அளந்து அறியலாம்.

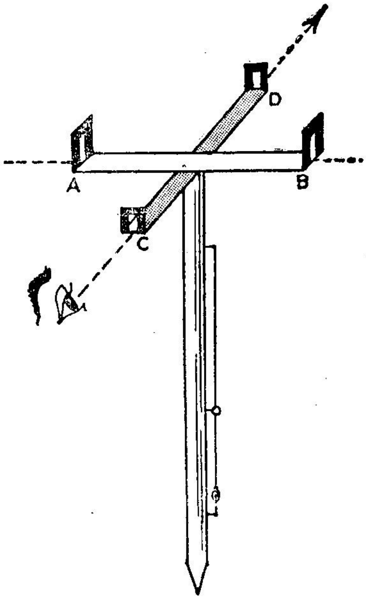
6. தளக் கோணமானி: இது ஒரு முழுவட்டக் கோணமானி. படத்தில் காட்டப்பட்டிருப்பதைப் போன்று இது ஒரு கம்பத்தில் கிடைநிலையில் (horizontal) பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றது. இதன் உதவியால் கிடைத்தளக் கோணங்களை (angles in the horizontal plane) அளந்தறியலாம்.



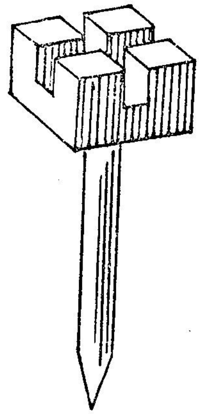
படம் 101 (vi)

7. நில அளவையாளரின் களக்குறிப்பேடு (Surveyer's field book) கிராம அதிகாரிகளும் நில அளவையாளரும் ஒழுங்கற்ற நிலங்களை (வரி விதிப்பதற்காக) அளப்பதற்குப் பின்வரும் முறையைக் கையாளுகின்றனர்.

இவர்கள் குறுக்கு மட்டக்கோல் (cross staff) என்ற ஒரு கருவியைப் (படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது) பயன்படுத்துகிருர்கள்.

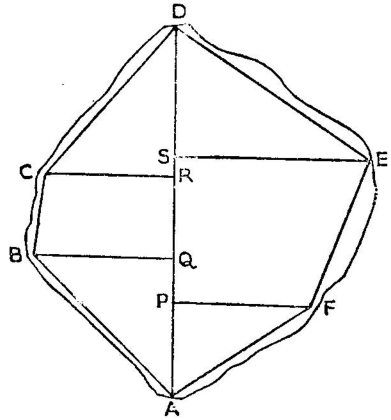


படம் 101 (vii)



படம் 101 (viii)

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு வரித்தடங்கள் அமைக்கப் பெற்ற ஒரு கன சதுரக் கட்டை ஒரு நீண்ட இரும்புக்கம்பியில் படத்தில் காட்டப்பட்டிருப்பதுபோல் பொருத்தியிருக்கும்.



படம் 101 (ix)

குத்தளவு முறை (Method of offsets)

அளந்தறிய வேண்டிய நிலம் ABCDEF எனக் கொண்டால், AD-க்கு அடிப்படைக் கோடு (base line) என்று பெயர். முதலில் குறுக்கு மட்டக் கோலை P என்ற புள்ளிக்கு எவ்வளவு சமீபத்தில் வைக்க முடியுமோ அவ்வளவு சமீபத்தில், ஒருவரித் தடம் AD திசையில் இருக்குமாறுவைக்கவேண்டும். இப்போது குறுக்கு மட்டக்

கோலைப் படிப்படியாக AD-ன் வழியே நகர்த்தி P-ன் சரியான நிலையைக் காணவேண்டும். இப்போது PF-ன் நீளத்தை அளந் தறியலாம். (PF-க்கு அடிப்படைக் கோட்டுக்கு நேர் குறுக்குத் தொலைவு அல்லது குத்தளவு—offset—என்று பெயர்). இதுபோல் Q, R, S என்ற புள்ளிகளையும் காணலாம். அளவுகள் எல்லாம் அடிப்படைக் கோட்டின் வழியோ அல்லது இருபக்கங்களிலும் அதற்குச் செங்குத்தான கோடுகளிலோ எடுக்கப்பட்டு, கீழ்க்கண்ட வாறு அட்டவணைப்படுத்தப்படுகின்றன.

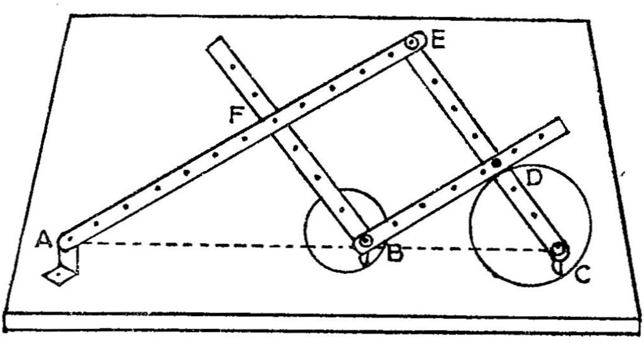
நில அளவையாளரின் களக் குறிப்பேட்டில் பதிவு செய்யப் பட்ட அளவுகள் (மீட்டரில்).

	D-ன் தூரம்	
	104	
C-க்கு 57	89 S	
	85 R	*E*-க்கு 58
B-க்கு 55	74 Q	
	35 P	*F*-க்கு 50
	0	
	A-லிருந்து	

வசதியான ஏதாவது ஓர் அளவுத் திட்டத்தில் (scale) மேற்கண்ட அளவுகளுக்கு நில வரைபடம் வரைந்து நிலத்தின் பரப்பளவு கணிக் கப்படுகின்றது. இம் முறை யில், மொத்தப் பரப்பும், நான்கு செங்கோண முக் கோணங்களாகவும்இரண்டு டிரபீஸியங்களாகவும் பிரிக் கப்படுகின்றன. இவற்றின் பரப்பளவின் மொத்தம், நிலத்தின் பரப்பளவாகும்.

அளவுப் பெருக்கமும் அளவுக் குறைப்பும்

படங்களைப் பெரிதாக்கவோ அல்லது சிறிதாக்கவோ பயன் படுத்தப்படும் கருவிக்குப் பான்டோகிராப் (pantograph) என்று



படம் 102

பெயர். மெக்கானே (meccano) பகுதிகளிலிருந்தும் இதைச் செய்யலாம்.

படத்தில், FE=BD

FB=ED, A, B, C ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

△ AFB ||| △ AEC.

A, நிலையாக இருப்பதால், B வரையும் எந்தப் படத்தையும் C-லுள்ள குறியிடும் கருவி பெரிய அளவில் வரையும். தேசப் படங்களைப் (maps) பெரிதாக்கவோ அல்லது சிறிதாக்கவோ இம் முறை பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

வடிவங்களின் அளவுகளைக் காணும் முறைகளை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

1. நேரடி அளவு (Direct measurement): கொடுக்கப்பட்ட பொருளை அளவு அலகுகளைப் பயன்படுத்தி நேரடியாக அளத்தல்.

2. மறைமுக அளவு (Indirect measurement): பொருள்களின் அளவுகளைச் சூத்திரங்கள் மூலமாகவோ, அளவுப் படங்கள் மூலமாகவோ தீர்மானம் செய்வது.

மறைமுக அளவுகளைக் கற்பித்தல்

பல சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு பொருள்களுக்கு மத்தியிலுள்ள தூரத்தையோ அல்லது ஒரு செங்குத்தான உயரத்தையோ கருவிகளால் நேர் முறையில் அளந்து அறியமுடியாத காரணத்தினல், மறைமுகமாக அறிந்து கணக்கிட வேண்டியிருக்கிறது.

1. பொதுப்படையான பரப்பளவுகளும், கன அளவுகளும்: சதுரம், செவ்வகம், இணைகரம், வட்டம் முதலியவற்றின் பரப்பளவுகள்; கன சதுரம், கன செவ்வகம், உருளை, கூம்பு போன்றவற்றின் கன அளவுகள் நேரடி முறையில் கண்டுபிடிப்பது எளிதன்று. ஆகையால், இவற்றை மறைமுகமாகக் கணிப்பதற்கு வேண்டிய தகுந்த சூத்திரங்கள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

2. அளவுத் திட்டப் படங்கள் (Scale drawings)—

(அத்தியாயம் 6)

3. கோண கணித முறைகளைப் பயன்படுத்துதல்.

மனித நாகரிக வளர்ச்சியில் மறைமுக அளவு முறைகள் மிக முக்கியப் பங்குடையன. பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள தூரங்களை,

அவற்றிற்கு இடையில் செல்லாமலேயே அறியவேண்டிய முறையைக் கணிதவியலார் கண்டுபிடித்தனர். கோடுகள், கோணங்கள், முக்கோணங்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி இவற்றை அறிய முடிந்ததால் இது சாத்தியமாகிறது. கப்பலோட்டி, தான் கலங்கரை விளக்கிலிருந்து உள்ள தூரத்தை அறியவும், விமானம் இயக்குபவர் விமானத்தை ஒழுங்காகச் செலுத்தவும், வான் ஆராய்ச்சியாளர் பல கோள்களுக்கிடையே உள்ள (planets) தூரங்களைக் கணிக்கவும், படை வீரர் தம் எதிரிகளைப் பீரங்கியால் தாக்கவும், மறைமுக அளவு முறைகளையே பயன்படுத்த முடியும்.

அன்றாட வாழ்க்கையில் தேவைப்பட்ட பல அளவு முறைகளுக்கும் பயன்படும்வகையில் எளிய முறைகளைப் பண்டைக் காலத்திலேயே கண்டுபிடிக்க முயற்சித்தனர். 'ஏழு கிரேக்க அறிஞர்களில் ஒருவரா'கக் கருதப்பட்டவரும் 'கிரேக்கக் கணிதப் பள்ளியின் தந்தை' எனப்படுபவருமான 'தேல்ஸ்' (கி.மு. 600) என்ற கணிதமேதை எகிப்திய கூர்க்கோபுரங்களின் உயரத்தை மறைமுக முறையில் கண்டுபிடித்தார்—செங்குத்தாக நடப்பட்ட ஒரு கோலின் நிழலின் நீளம், கோலின் அளவே இருக்கும் அதே நேரத்தில், கோபுரத்தின் நிழலின் நீளத்தையும் அளந்து கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடித்தார்.

நிழல் கணிப்பு முறை (Shadow reckoning)

இம் முறை தேல்ஸ் காலத்தில், பழக்கத்தில் இருந்ததாகத் தெரிகின்றது.

$$\text{தேல்ஸ் முறைப்படி : } \frac{\text{கோபுரத்தின் உயரம்}}{\text{அதன் நிழலின் நீளம்}} = \frac{\text{கோலின் உயரம்}}{\text{கோலின் நிழலின் நீளம்}}$$

இதிலிருந்து கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கணிக்கலாம்.

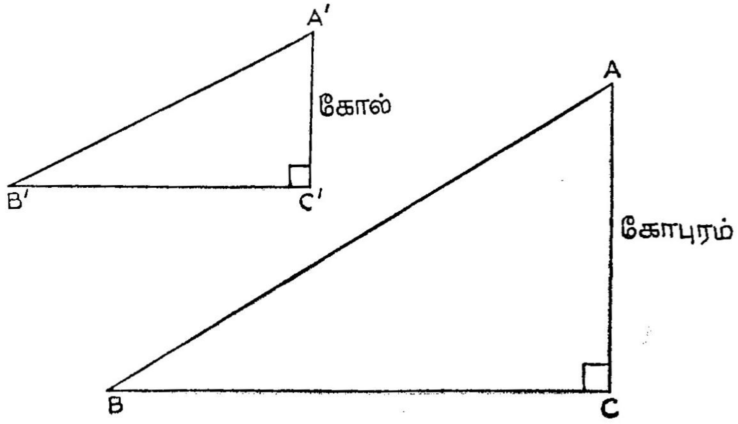
இதைத் தவிர மற்றொரு முறையையும் தேல்ஸ் கண்டுபிடித்ததாகத் தெரிகின்றது. நிழலின் நீளமும், கோலின் நீளமும் சமமாகும் வரை காத்திருப்பது வசதிக் குறைவானதால் கீழ்க்கண்டபடி, வடிவொத்த முக்கோணங்களின் விதிகளைப் பயன்படுத்தினர்.

AC கோபுரம், BC அதன் நிழல்,

A^1C^1 கோல், B^1C^1 அதன் நிழல்,

இவ் விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாதலால்

$$\frac{AC}{A^1C^1} = \frac{BC}{B^1C^1} \text{ அதாவது } AC = \frac{BC}{B^1C^1} \times A^1C^1.$$



படம் 103 (i)

இந்த முறையைப் பயன்படுத்திச் செங்குத்தான எந்தப் பொருளின் உயரத்தையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

அணுக முடியாத தூரங்களை அளந்து அறிதல்

அணுக முடியாத தூரங்களைக் கணிப்பதற்கு முழுதுமொத்த முக்கோணங்களின் விதிகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

தேற்றம் 1 : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணமும், மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்கும், அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணத்திற்கும் முறையே சமம் ஆனால், அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வ சமம் ஆகும்.

AB என்பது ஒரு சதுப்பு நிலத்தில் குறுக்காயமைந்த கோடு என்று கொள்ளலாம்.

AB-ஐக் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

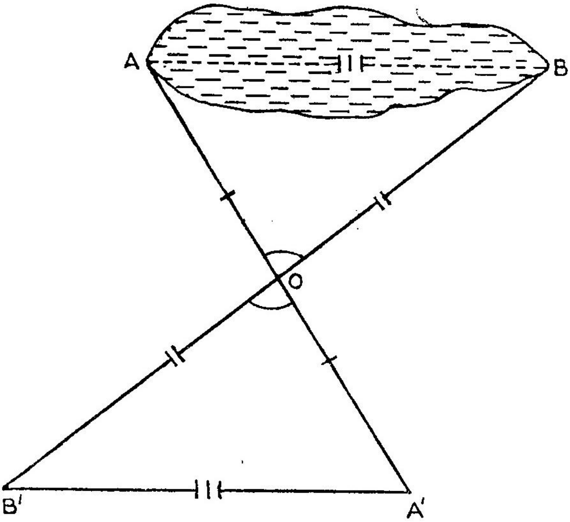
O-என்ற வசதியான ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு, AO, BO-வைச் சேர்க்க. AO-வை A^1க்கு $OA^1 = OA$ என்ற வீதத்திலும் BO-வை B^1க்கு $OB^1 = OB$ என்ற வீதத்திலும் நீட்டி A^1B^1-ஐச் சேர்க்க. முக்கோணங்கள் AOB, A^1OB^1-ல்

$$OA = OA^1, OB = OB^1$$

மேலும் $\angle AOB = \angle A^1OB^1$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்).

∴ முக்கோணங்கள் சர்வ சமம்.

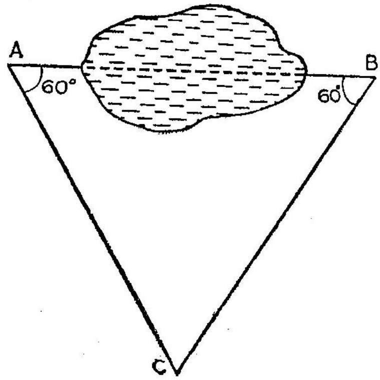
ஆகையால் $AB = A^1B^1$. A^1B^1ஐ அளக்கவேண்டும்.



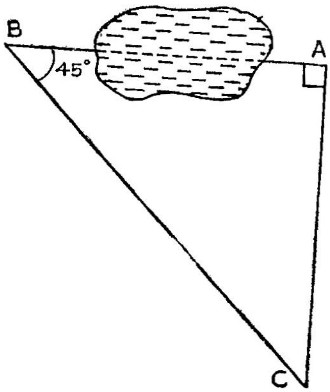
படம் 103 (ii)

A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையில் குளமோ, ஆறோ, கிணறோ இருந்தால், அளவு நாடாவைப் பயன்படுத்தி *AB*-ன் தூரத்தைக் காண இயலாது. ஆகவே, கீழ்க்கண்ட முறைகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

1. *A, B* புள்ளிகளில் $\angle ABC = \angle BAC = 60°$ என்ற அளவிற்கு *C*-ல் வெட்டும்படியாக *AC, BC* நேர்கோடுகள் வரைக. ($\angle BCA = 60°$) ஆகவே $AB = BC$.



படம் 103 (iii)



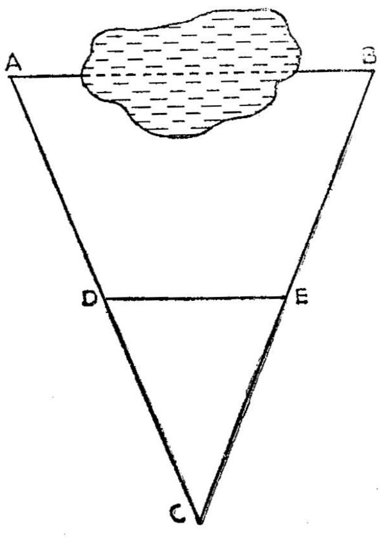
படம் 103 (iv)

2. $\angle BAC = 90°$ யாகவும், $\angle ABC = 45°$ யாகவும் AC, BC என்ற கோடுகள் வரைக.

இவை C-ல் வெட்டிக்கொண்டால். $\triangle CAB$ ஒரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணம்.

$\therefore AB = AC$.

3. A-லிருந்து Bஐப் பார்க்க முடிந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட முறையைப் பயன்படுத்த இயலும். இல்லாவிடில் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பயன்படுத்தலாம். Aஐ B-லிருந்தும், Bஐ A-லிருந்தும்



படம் 103 (v)

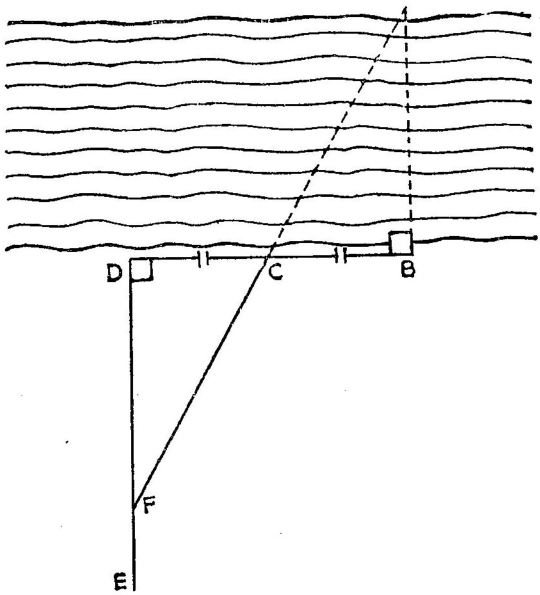
பார்க்க முடியாது. A-யையும், B-யையும் பார்க்கக்கூடிய விதத்தில் C என்ற புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுத்து CA, CB-யை அளக்க. D, E முறையே CA, CB-ன் மையப் புள்ளிகளானுல் $AB = 2$. DE (தேற்றம்) அத்துடன் $DE \parallel AB$ ஆகவே AB-ன் திசையையும் அறியலாம்.

4. *A*, *B* ஓர் ஆற்றின் எதிர்ப்புறங்களிலுள்ள இரு புள்ளிகளானல்,

AB-க்குச் செங்குத்தாக *BD* வரைக.

BD-ன் மையப்புள்ளி *C* ஐக் காண்க.

D-ல் *BD*-க்குச் செங்குத்தாக *DE* வரைக.



படம் 103 (vi)

இதில் *C*, *A* புள்ளிகளுடன் ஓரே நேர்கோட்டில் அமையுமாறு *F* என்ற புள்ளியைக் காண்க.

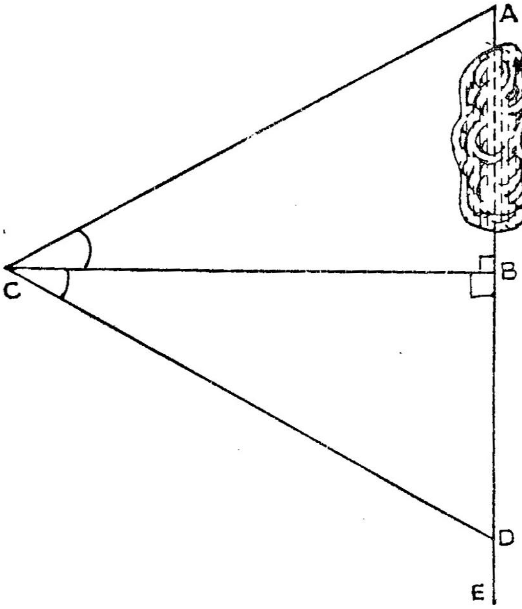
$$\triangle CDF \equiv \triangle ABC$$

$$\therefore AB = DF.$$

5. *AB*-யை *E*-க்கு நீட்டுக. *BC*, *AB*-க்குச் செங்குத்து என்றல் $\lfloor ACB$ ஐ அளந்து $\lfloor BCD = \lfloor ACB$ என்ற அளவில் *CD* என்ற கோடு *AB* ஐ *D*-ல் சந்திக்குமாறு வரைக.

$$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$$

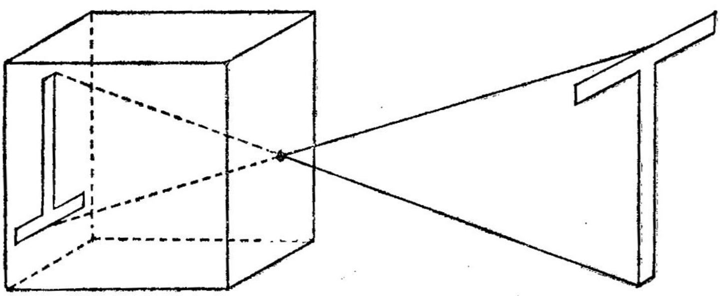
$$\therefore AB = BD.$$



படம் 103 (vii)

விகித முறை அளவுப் படங்கள்

நிழற்படம் எடுக்கும் கருவியினுல் ஒரு பொருளைப் படம் எடுக்கும்போது, கீழே காட்டியிருப்பதுபோல் அப் பொருளின் பல்வேறு பாகங்களும் ஒரே விகிதத்தில் குறைகின்றன. ஆனுல், திருப்பங்களும் கோணங்களும் மாறுவதில்லை. நிழற்படத்



படம் 104

தகட்டில் (film) விழும் உருவம் தலைகீழாக இருந்தாலும் பொருளின் உருவத்தை ஒத்திருப்பதைக் காணலாம்.

நிலப் படங்கள் (map), ஒரு வகையில் விகித முறை அளவுப் படங்கள் என்பது யாவரும் அறிந்ததே.

பயன்கள் : வீடுகள், கட்டடங்களுக்கான உருவரைப்படிவம் (blue print) விகித முறை அளவுப் படங்களின் பயனை வலியுறுத்துகின்றன. எளிய முறையில் சிறிய இடத்தில் கட்டடத்தின் பற்பல அளவுகளையும், அவற்றின் தொடர்புகளையும் விகிதப்படி வரையப்பட்ட கோடுகளினால் குறிக்க முடிகின்றது.

இவ்வித விகிதமுறை அளவுப் படங்களைப் பயன்படுத்தித் தூரங்களையும், உயரங்களையும் அளந்தறியாமலே காணலாம். முன்னமேயே கூறியபடி, (1) உயர்ந்த கட்டடங்கள், கோபுரங்கள், மலைகள் முதலியவற்றின் உயரங்களையும், (2) ஏரி, குளம், நதி முதலியவற்றின் அகலங்களையும் இம் முறையினால் கணிக்கலாம்.

பொருள்களின் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் எந்த விகிதத்தில் படத்தில் மாறியிருக்கிறது என்பதை விகித முறை அளவுப் படங்களிலிருந்து அறியலாம்,

சில வேளைகளில் பொருளைப் பெரிதுபடுத்திக் காட்டவேண்டி வரலாம். உதாரணமாக, அறிவியல், உயிரியல் போன்ற பிரிவுகளில் கண்ணுக்குப் புலப்படாத மிகச் சிறிய பொருள்களையும் கிருமிகளையும் பலமுறை பெரிதுபடுத்தப் படமெடுக்க வேண்டி வரலாம். (16 மடங்கு பெரிதுபடுத்தப்பட்ட ஒரு படத்தில் 0-1 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு புழு எவ்வளவு பெரிதாகத் தோன்றும்?)

கோண கணிதம்—வரலாறும் கற்பித்தல் முறையும் (Trigonometry)

கோண அளவையின் அலகு

நீளம், அல்லது தூரத்தை அளக்க நீட்டல் அளவை இருப்பது போலவும், நிறையை அளக்கப் பலவகை நிறுத்தல் அளவைகள் இருப்பது போலவும், 'சுழற்சியை' அல்லது திசை மாற்றத்தை அளக்க் 'கோண அளவைகள்' உள்ளன.

கோண அளவைக்கு அலகாக ஒரு சுற்று, அதாவது, ஒரு வட்டத்தை அலகாகக் கொள்வது சாலச் சிறந்தது. ஆனால், ஒரு வட்டம் மிகப் பெரிது. ஆகவே 'கால் வட்டத்தை' அலகாகக் கொள்கிறோம். அதாவது, சுழற்சியின் நான்கில் ஒரு பாகத்தை ஒரு 'செங்கோணம்' என்று சொல்லுகிறோம்.

அறுபதின் கூறுன முறை (Sexagesimal system)

இத்தகைய கோண அளவில் 1 செங்கோணத்தின் 90° ஒரு பாகம், 1 டிகிரி அல்லது 1° (1 பாகை). 1 டிகிரி அல்லது 1 பாகையில் 60-ல் ஒரு பாகம் 1 மினிட்டு, 1 மினிட்டில் ஒரு பாகம் 1 செகண்டு.

கோண அளவை வாய்பாடு.

60 செகண்டு — 1 மினிட்டு

60 மினிட்டு—1 டிகிரி

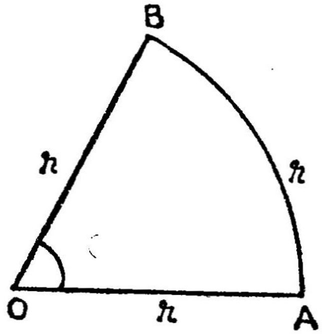
90 டிகிரி—1 செங்கோணம்

15 டிகிரி, 30 மினிட்டு, 20 செகண்டு என்பதை 15°30′20″ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

வட்ட அளவை (Circular measure)

உயர்கணிதத்தில் அறுபதின் கூறுன அளவையைப் பயன்படுத்துவது எளிதன்று. வட்ட அளவையைப் பயன்படுத்தலாம். இதில் கோண அளவையின் அலகு 'ரேடியன் (Radian) எனப்படும்.

ரேடியன் : OA-லிருந்து OB என்று ஓர் ஆரம் சுழல்கிறது. $OA = OB = r$ எனக்கொள்வோம். அப்போது B-ன் பாதை, AB என்னும் வட்டவில்லாகும். AB என்ற வட்டவில் அதாவது $\widehat{AB} = r$ என்ருல் $\angle AOB$-ன் அளவு ஒரு ரேடியன் எனப்படும். ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் நீளமுள்ள ஒரு வட்டவில்லால், அந்த வட்ட மையத்தில் தாங்கப்படும் கோணம் ஒரு ரேடியன் எனப்படும்.



படம் 105

ரேடியனும், டிகிரியும்

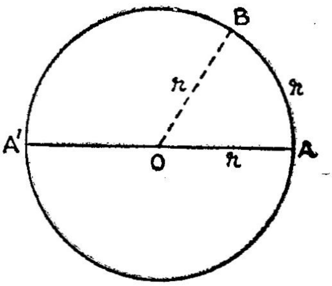
AA^1 வட்டத்தின் விட்டம்.

$\widehat{AB} = r$

$\angle AOB$ = ஒரு ரேடியன் ஆகும்.

$\angle AOB^1 = 180°$.

ஒரு வட்டத்தில் சமநீளம் உள்ள விற்கள் வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்குகின்றன என்பது வடிவியலில் ஒரு தேற்றம். ஆகவே, வில்களால் மையத்தில் தாங்கும் கோணங்களும், வில்களின் நீளங்களும் நேர்விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.



படம் 106

ஆகவே $\angle AOA^1 / \widehat{AA^1} = \angle AOB / \widehat{AB}$

ஆனால் $\widehat{AA^1}$ = அரைவட்டம் $= \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$

$$\therefore \quad \frac{180^\circ}{\pi r} = \frac{1 \text{ ரேடியன்}}{r}$$

$$\therefore \quad 1 \text{ ரேடியன்} = \frac{180}{\pi} \text{ டிகிரி} = 57^\circ\ 17.$$

குறிப்பு: π ரேடியன் $= 180^\circ$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} \text{ ரேடியன்} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ ரேடியன்} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ ரேடியன்} = 60^\circ$$

$$\therefore \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ரேடியன்}$$

$$x \text{ ரேடியன்} = \left(\frac{180}{\pi} \times x\right) \text{ டிகிரி.}$$

பயிற்சி

1. கீழ்வரும் கோணங்களை வட்ட அளவைக்கு (ரேடியன்) மாற்றுக.

   (a) 45° (b) 120° (c) 30°

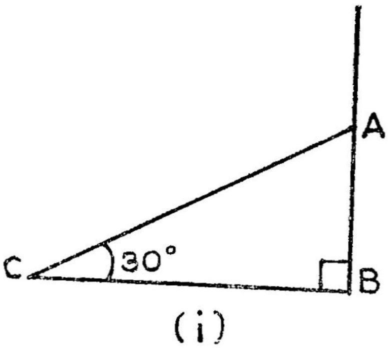
2. கோணங்கள் ரேடியனில் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றை டிகிரியில் கூறுக.

   (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{3}{4}\pi$.

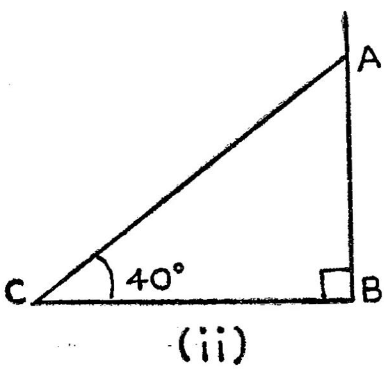
கோண கணிதம் (வரலாறு)

கோண கணிதம் மேல் வகுப்புகளில் கற்கக்கூடிய உயர் கணிதமாகச் சில ஆண்டுகளுக்கு முன் வரையில் கருதப்பட்டு வந்தது. ஆனால், எண்சார்ந்த கோண கணிதத்தைச் (numerical trigonometry) சிறிய வகுப்புகளிலே கற்றுக்கொடுக்கலாம் என்ற எண்ணம் இப்போது வளர்ந்துவருகின்றது. மேலும், தற்காலப் பள்ளி மாணவர்களின் தேவைகட்கு அடிப்படைக் கோண கணித முறைகள் பயன்படும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. இதன் செயல் முறைப் பயன்கள் காரணமாக மாணவர்கள் இதன் முக்கியத் துவத்தைச் சீக்கிரத்திலேயே புரிந்துகொள்கின்றனர்.

கோண கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகள் மூவாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்னமேயே கண்டுபிடிக்கப்பட்டவை. ஆம்ஸ் அல்லது ரைன்ட் பாபிரஸில் (Rhind Papyrus—கி. மு. 1650) இதற்கான சான்றுகள் இருக்கின்றன. உயரங்கள், தூரங்கள், ஏற்ற இறக்கக் கோணங்கள் முதலியவற்றை அளப்பதிலிருந்து கோண கணிதக் கருத்துகள் வளர்ந்ததாகத் தெரிகின்றது. முதன்முதலில் ஹிப்பார்க்கஸ் (கி.மு. 150) என்பவர் தம்முடைய வானியல் ஆராய்ச்சிக்குப் பயன்படுத்துவதற்காகக் கோண கணித அட்டவணைகள் தயாரித்ததாகத் தெரிகின்றது. பள்ளிப் பாடங்களிலும் பயன்முறைகளின் அடிப்படையிலேயே கோணகணிதம் கற்றுக்கொடுக்கப்பட வேண்டும். கோண கணிதம் கற்பதற்கு, முதற்படித் தேவையான வடிவொத்த முக்கோணங்கள், செங்கோண முக்கோணங்கள் இவற்றைப் பற்றி மாணவர்களுக்கு முதற்கண் கற்றுக்கொடுத்துப் பயிற்சியும் அளிக்கவேண்டும்.



படம் 107 (i)

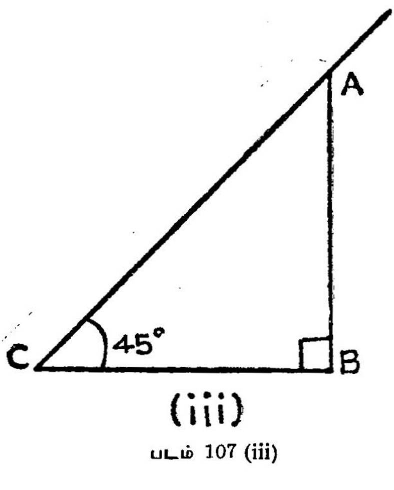


படம் 107 (ii)

கோண கணித ஆரம்பம்

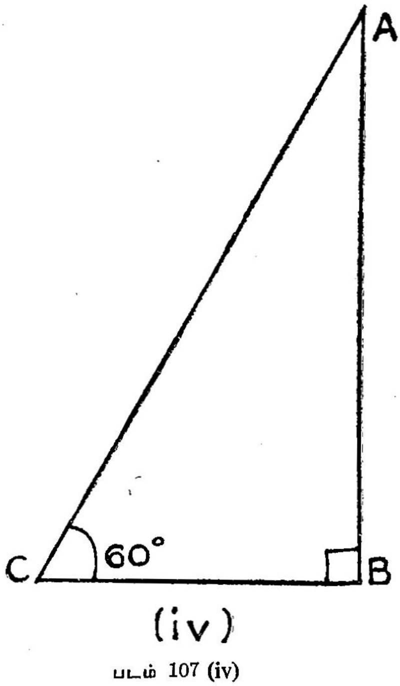
ஒரு வகுப்பில் 40 மாணவர்கள் இருந்தால், இவர்களை 9 குழுக்களாகப் பிரித்துக்

கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு குழுவிலும் 4 அல்லது 5 மாணவர்கள் இருப்பர். முதற் குழு ஒரு குறுங்கோணம் 10° என்று எடுத்து ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரையவேண்டும். அடுத்த குழு ஒரு குறுங்கோணம் 20° என்று எடுத்து ஒரு செங்கோண முக்கோணம்வரைய வேண்டும். இவ்வாறாக 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° என்று வைத்துச் செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைந்து ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் $\angle B = 90^\circ$ என்றால், $\angle ACB$ கொடுத்துள்ள குறுங்கோணம், AC கர்ணமாகும்.



(iii)

படம் 107 (iii)



(iv)

படம் 107 (iv)

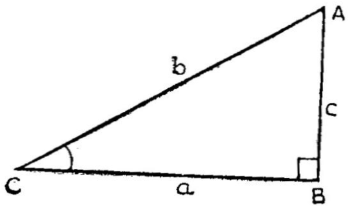
ஒவ்வொரு மாணவனும் அவன் வரைந்த முக்கோணத்தில், செங்கோணங்கள் அடங்கிய பக்கத்தை அளத்தல் வேண்டும். பின் $\frac{AB}{AC}$ என்ற விகிதத்தைக் கணக்கிட வேண்டும். AB, குறுங்கோணத்தின் எதிரேயுள்ள பக்கம், AC குறுங்கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்கம். கவனமாக அளந்து கணக்கிட்டால், ஒரே குறுங்கோணத்துக்கு ஏறக்குறையச் சமமான விகிதங்கள் வந்திருக்கிறதைக் காண்பார்கள். இந்த விகிதங்களுக்குச் சராசரி கண்டுபிடித்து அட்டவணைப்படுத்தவேண்டும்,

அட்டவணை

கோணங்கள்	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°
விகிதம்	0·18	0·36	0·58	0·84	1	1·19	1·732	2·75	5.67

ஊகித்துச் செய்யும் முடிவுகள்

1. குறுங்கோணங்களின் அளவைகள் கூடிக் கொண்டே போகும்போது விகிதமும் அதாவது $\frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ கூடிக் கொண்டே போகிறது.



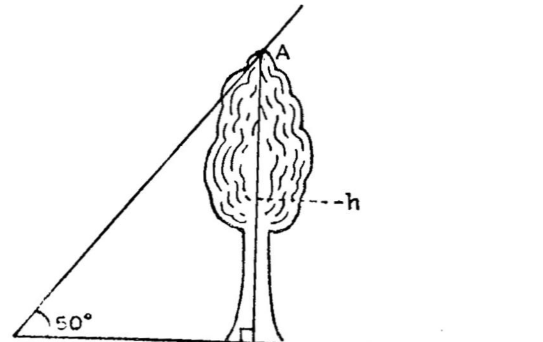
படம் 108

2. குறுங்கோணம் 45° என்றால் இந்த விகிதம் 1. விளக்கம்— *ABC* ஒரு செங்கோண முக்கோணம்; அதில் $\angle C$ ஒரு குறுங் கோணம்.

'*c*' என்பது $\angle C$-க்கு எதிர்ப் பக்கம்.

'*a*' என்பது $\angle C$-க்கு அடுத்துள்ள பக்கம்.

விகிதம் $\frac{c}{a}$, $\angle C$-ன் டான்ஜன்டு விகிதம் (tangent ratio) எனப்படும். அதாவது $\tan C = \frac{c}{a}$. இவ்வாறு மாணவர்களுக்குக்



படம் 109

கோண கணித விகிதத்தைப்பற்றி அறிமுகப்படுத்தவேண்டும். மாணவர் இது வரை, நேரில் அளக்க முடியாதவற்றை அளவுத்

திட்டத்திற்கு (scale drawing) முக்கோணங்கள் அமைத்துக் கண்டு பிடித்தனர். அதாவது, 'உயரங்களும், தொலைவுகளும்' என்ற பாடப்பகுதியில் பிரச்சினைகளை வடிவொத்த உருவங்கள் (similar figures) அமைத்துத் தீர்வு செய்தனர். இப்பொழுது டான்ஜன்டு விகிதம் உபயோகித்து எளிதில் எப்படிக் கண்டுபிடிக்கலாம் என்று உதாரணத்துடன் விளக்குதல் வேண்டும். (உதாரணம்) ஒரு மரத்தின் அடி வாரத்திலிருந்து, 12. மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, மரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 50°. மரத்தின் உயரமென்ன?

படி படம் வரைந்து அளவைகளைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

AC - மரத்தின் உயரம். $\angle ACB = 90^\circ$

$BC = 12$ மீ. AC ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$\angle ABC = 50^\circ$

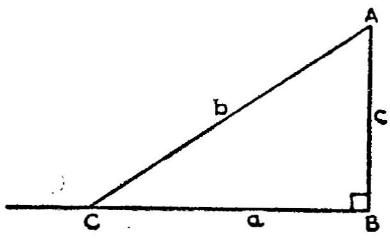
$$\tan 50^\circ = \frac{h}{12}$$

$$\therefore\ h = \tan 50^\circ \times 12$$

$$= 12 \times 1.19 = 14.28 \text{ மீ. (விடை)}$$

ஒரு கோணத்தின் சைன் விகிதமும் (sine ratio — நெடுக்கை) கொசைன் விகிதமும் (cosine ratio — கிடக்கை)

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் டான்ஜன்டு (இருக்கை) விகிதத்தைத் தவிர இன்னும் மற்ற விகிதங்களும் உண்டு என்று மாணவர்களுக்கு விளக்க வேண்டும்.



படம் 110

'b' செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம். $\angle C$-க்கு அடுத்துள்ள பக்கம் 'a', எதிரேயுள்ள பக்கம் 'C'.

1. விகிதம் $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்பது $\angle C$-ன் சைன் விகிதம் எனப்படும்.

இதேபோல் $\angle A$-ன் சைன் விகிதம் $\dfrac{a}{b}$

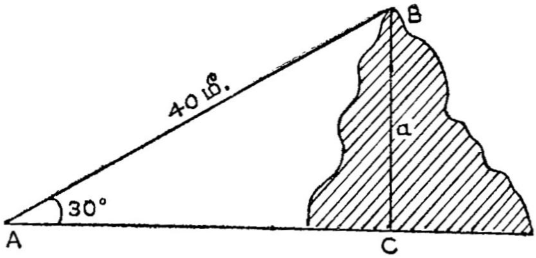
$\therefore$ (a) $\sin \widehat{C} = \dfrac{c}{b}$

(b) $\sin \widehat{A} = \frac{a}{b}$

2. விகிதம் $\frac{a}{b} = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்பதை, ∟C-ன் கொசைன் விகிதம் எனப்படும்.

$\therefore$ (a) $\cos \widehat{C} = \frac{a}{b}$

(b) $\cos \widehat{A} = \frac{c}{b}$



படம் 111

உதாரணம்

BC குன்றின் உயரத்தைக் குறிக்கும். தரை மட்டத்தில் புள்ளி A-லிருந்து குன்றின் உச்சிக்கு ஒரு கயிற்றைக் கட்டினால், கயிற்றின் நீளம் 40 மீ. குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $30°$ என்றால் BC என்ன?

$$\frac{a}{40} = \sin 30°$$

$$\therefore a = 40 \times \sin 30°$$

$$= 40 \times \frac{1}{2} = 20 \text{ மீ. (விடை)}$$

இம் முறையைப் பயன்படுத்துவதால் மாணவர்கள் கல்லூரிக்குச் செல்லு முன்னரே, கோண கணித விகிதங்களை அட்டவணைகளைப் பார்த்துத் தெரிந்துகொள்ளப் பழகிக்கொள்வார்கள்.

9. எண்ணியல்

(Theory of Numbers)

இப் பகுதி முழுவதும், 'எண்' என்ற சொல் ஒரு கூட்டு முழு எண்ணை (positive integer) மட்டிலுமே குறிக்கும், அதனோடு மீதியின்றி வகுக்கப்படும் எண்ணைக் குறிக்கும்போது, 'வகுபடும்' என்றும் குறிப்பிடப்படும்.

a என்ற எண்ணை, b என்ற எண் மீதமில்லாமல் வகுக்குமானுல் b-யானது a-ன் காரணியாகும். அல்லது, a-யானது b-ன் மடங்காகும்.

உதாரணமாக: 12ஐ 1, 2, 3, 4, 6, 12 முதலிய எண்களால் வகுத்தால், மீதி பூச்சியம். ஆதலால் 1, 2, 3. 4, 6, 12 எல்லாம் 12-ன் காரணிகளாகும்.

பகாஎண் : (Prime number) ஓர் எண், அதே எண்ணுலும் ஒன்ருலும் மட்டுமன்றி வேறெந்த எண்ணுலும் வகுபடா விட்டால் அதற்குப் பகா எண் என்று பெயர். (உ.ம்: 7, 11, 23.)

பகு எண் (Composite number): ஓர் எண், அதே எண்ணுலும் ஒன்ருலும் மட்டுமன்றி வேறு எண்களாலும் வகுபடுமேயாகில், அத்தகைய எண் பகு எண் எனப்படும்.

60-க்குக் குறைந்த பகா எண்கள் கீழே உள்ள பட்டியலில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

1	**2**	**3**	*4*	**5**	*6*	**7**	*8*	*9*	*10*
11	*12*	**13**	*14*	*15*	*16*	**17**	*18*	**19**	*20*
21	*22*	**23**	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	**29**	*30*
31	*32*	*33*	*34*	*35*	*36*	**37**	*38*	*39*	*40*
41	*42*	**43**	*44*	*45*	*46*	**47**	*48*	*49*	*50*
51	*52*	**53**	*54*	*55*	*56*	*57*	*58*	**59**	*60*

இதில், பகா எண்கள், பின்வரும் முறைப்படி குறிக்கப் பட்டுள்ளன. (1 சிறப்பு எண்.)

1. இரண்டின் மடங்குகளாகிய (2ஐத் தவிர) 4, 6,8,... என்ற எண்களையும் நீக்கவேண்டும்.

2. பின்னர், 3ஐத் தவிர 3-ன் மடங்குகளாகிய 6,9, 12... என்ற எண்களை நீக்க வேண்டும். (இவற்றில் சில, 2-ன் மடங்காக இருக்கலாம்; ஆகவே, அவை ஏற்கெனவே நீக்கப்பட்டிருக்கும்.)

3. பின்னர், 5ஐத் தவிர 5-ன் மடங்குகளாகிய 10, 15, 20, 25... என்ற எண்களை நீக்கவேண்டும். இவற்றில் 2-ன் மடங்குகளும் ஏற்கெனவே நீக்கப்பட்டிருக்கும்.

இவ்வாறே, 7-ன் மடங்குகளாகிய 14, 21, 28... 11-ன் மடங்குகளாகிய 22, 33, 44... முதலியவற்றையும் நீக்கவேண்டும். அதாவது, ஒவ்வொரு முறையும், 'நீக்கப்படாத எண்களின்' மடங்குகளை நீக்கிக்கொண்டே போனால், அட்டவணையில் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண்களே 1முதல் 60 வரை உள்ள பகா எண்கள் ஆகும். இவை, 2, 3, 5, 7, 11. 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. 47, 53, 59 ஆகும்.

இம் மாதிரிப் பகா எண்களை முடிவில்லாமல் சலித்து எடுக்கும் திட்டத்தை 'இராஸ்ரேஸ் தெனீசின்' சல்லடை (the sieve of Erasthosthenes) அல்லது எண் சல்லடை என்று கூறுவர்.

இராஸ்ரேஸ்தெனீஸ் ஒரு கணித மேதை. இரண்டாம் நூற்றாண்டைச் சேர்ந்தவர். வானநூல் சாத்திரத்திலும் நிலவியலிலும் தேர்ச்சிபெற்றவர். தம்முடைய 80ஆவது வயதில் கண்பார்வையை இழந்ததால் பட்டினியால் இறந்தார். அவருடைய முக்கியமான ஆய்வுக் கட்டுரை நிலவியலைப்பற்றியது.

குறிப்பு: 1. ஒன்று, பகா எண் அன்று.

2. 2ஐத் தவிர மற்றப் பகா எண்கள் எல்லாம் ஒற்றைப் படை எண்களே.

சார்பகா எண்கள்: எடுத்துக் கொண்ட ஏதேனும் இரண்டு எண்களுக்கு ஒன்றைத் (1)தவிர வேறு எந்தப் பொதுக் காரணியும் இல்லையாகில் அந்த இரண்டு எண்களையும், சார்பகா எண்கள் (relative primes) என்கிறோம். உதாரணமாக 12-ம் 35-ம் சார் பகா எண்கள்; 25-ம் 36-ம் சார்பகா எண்கள்.

காரணிகளும் வருக்க மூலமும்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பெண்களைக் காரணிப்படுத்திப் பார்க்கலாம்.

1. $36=12\times3=6\times6=6^2$

36-ன் வருக்க மூலம் 6

$12>6$

$3<6$

2. $48=12\times4=6\times8$

$\sqrt{48}\simeq6.9.$

$8>6.9$

$6<6.9$

ஒரு தொகுப்பெண்ணை இரண்டு காரணிகளாகப் பிரித்தால் அவற்றில் ஒன்று அத் தொகுப்பெண்ணின் வருக்க மூலத்தைவிடப் பெரிதாகவும் மற்றது வருக்க மூலத்தைவிடச் சிறியதாகவும் இருக்கும்; இல்லையேல், இரண்டும் சமமாக இருக்கும் (இது வருக்க மூலம்).

தேற்றம் 1. பல எண்களின் பெருக்கல் தொகையை ஒரு பகா எண் மீதியில்லாமல் வகுக்குமானால், அந்த எண்களில் ஒன்றையேனும் அப் பகா எண் மீதமில்லாமல் வகுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $(5\times8\times12=)480$ என்ற எண்ணைப் பகா எண்ணான 3 மீதியில்லாமல் வகுக்கும். இதன் காரணிகளின் ஒன்றாகிய 12ஐ 3 மீதமில்லாமல் வகுக்கும்.

கிளைத் தேற்றம் 1: a, n என்பவை ஏதேனும் இரண்டு எண்களானால், a^nஐ மீதமில்லாமல் வகுக்கும் பகா எண், a-யையும் மீதமில்லாமல் வகுக்கும்.

உதாரணம்: 1296ஐ 3 மீதமில்லாமல் வகுக்கும்.

ஆனால், $1296=6^4$ அதாவது 6^4ஐ 3 மீதமில்லாமல் வகுக்கும். ஆகவே, 6ஐ 3 மீதமில்லாமல் வகுக்கும்.

கிளைத் தேற்றம் 2: a, b, c என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் p என்ற எண் பகா எண்ணானால் $a\times b\times c$ என்ற எண்ணுக்கும் p பகா எண்ணாகும்.

உதாரணம்: $a=7, b=9, c=11$ என்ருல் இவை மூன்றுக்கும் பகா எண்ணுன 4, $7 \times 9 \times 11$-க்கும் பகா எண்ணுகும்.

கிளைத் தேற்றம் 3: a-ம், b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயின் a^m-ம் b^n-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

உதாரணம்: $a=5, b=8$ என்ருல்
$a^3=125$-ம் $b^4=4096$-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

கிளைத் தேற்றம் 4: பல பகா எண்களால் தனித்தனியே மீதமில்லாமல் வகுபடக் கூடிய ஒரு பகுஎண், இவற்றின் பெருக்கற் பலனுலும் மீதமில்லாமல் வகுபடும்.

உதாரணம்: 25935 என்ற எண்ணை 3, 7, 13, 19 ஆகிய பகா எண்கள் மீதமின்றி வகுக்கும். இவற்றின் பெருக்கல் தொகையான 5187 இந்த எண்ணை மீதமின்றி வகுக்கும்.

கிளைத் தேற்றம் 6: a என்ற ஓர் எண் bc என்ற பெருக்கல் தொகையின் ஒரு காரணியாகவும் b-க்குப் பகா எண்ணுகவும் இருந்தால் அது c-க்குக் காரணியாக இருக்கும்.

$a = 7$. $b = 8$, $c = 21$ என்று கொண்டால்,

a = ஏழானது ($8 \times 21 =$) 168-ன் காரணியாகும்.

ஆனுல் ஏழானது, 8-க்குப் பகாஎண்.

ஆகவே, அடுத்த எண்ணுன 21-ன் காரணியாக இருக்க வேண்டும்.

தேற்றம் 2: பகா எண்கள் எண்ணிறந்தவை. (Numer of primes and infinite)

பின்வரும் பட்டியலைக் கவனி:

$\lfloor 2 = 1.2 = 2$		2ஆல் வகுபடும் எண்
$\lfloor 3 = 1.2.3 = 6$		3ஆல் வகுபடும் எண்
$\lfloor 4 = 1.2.3.4 = 24$		4ஆல் வகுபடும் எண்

ஆகவே, P-யானது $\lfloor P$-ன் காரணி.........(அ)

$\lfloor 2 + 1 = 3$	பகா எண்
$\lfloor 3 + 1 = 7$	பகா எண்
$\lfloor 4 + 1 = 25$	4ஐ விடக் குறைந்த காரணி இல்லை.
$\lfloor 5 + 1 = 121$	5ஐ விடக் குறைந்த காரணி இல்லை.
$\lfloor 6 + 1 = 721$	6ஐ விடக் குறைந்த காரணி இல்லை.
$\lfloor 7 + 1 = 5041$	7ஐ விடக் குறைந்த காரணி இல்லை.

ஆகவே, $\lfloor P + 1$-க்கு, P அல்லது அதற்குக் குறைந்த எண்கள் காரணியா யிருக்கமாட்டா. அதாவது, P-ம் $\lfloor P + 1$-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். (ஆ)

இப்போது, N என்ற எண் எல்லாவற்றிற்கும் பெரிய பகா எண் என்று கொண்டால்,

$\lfloor N + 1$-ம் N-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். ஆகவே, $\lfloor N + 1$ என்ற எண், பகா எண்ணுக இருக்கவேண்டும் அல்லது Nஐக் காட்டிலும் பெரிய பகா எண்ணுல் வகுபடும் எண்ணுக இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே Nஐ விடப் பெரிய பகா எண் ஒன்று இருக்க வேண்டும். (நாம் எடுத்துக்கொண்ட கொள்கை தவறு.) அதாவது, எல்லாவற்றிற்கும் பெரிய பகா எண் என்று ஓர் எண் இல்லை; அல்லது பகா எண்கள் எண்ணிறந்தவை.

கணங்கள்

தற்காலத்தில் பள்ளிகளில் கணிதப் பாட வளர்ச்சியில் வியக்கத்தக்க முன்னேற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. பாடத் திட்டம், பாடப் பொருள், பள்ளியின் எல்லா நிலைகளிலும் கற்பிக்கும் முறைகள் ஆகியவற்றை மாற்றி அமைக்கவேண்டிய அவசியம்பற்றிப் பரிசீலிக்கப்படுகின்றது. அண்மைக் காலம்வரை பல்கலைக் கழகத்திலேயே கற்றுக்கொடுக்கப்பட்டுவந்த பல புதிய கணிதப் பாடங்கள் பள்ளி மாணவருக்கும் பயன்படும் முறையில் பள்ளிகளிலும் புகுத்தப்பட்டுள்ளன. முதல் படியாகக் கணங்களைப்பற்றிய கருத்துகளைப் பாடத் திட்டத்தில் சேர்த்துள்ளனர்.

முதன்முதலில் ஜியார்ஜ் கான்டர் (1845-1918) என்ற கணித மேதையார் கணங்களைப்பற்றிய கருத்தைக் கணக்கியலில் பயன்படுத்தினர்.

திட்டமாக வரையறை செய்யப்பட்ட பொதுப் பண்புடைய பொருள்கள், குறியீடுகள், கருத்துகள் முதலியவற்றைக் கணம் எனலாம்.

ஆட்டு மந்தை, கணிதப் புத்தகங்கள், வெள்ளைப் பூக்கள், நான்காம் படிவ மாணவர்கள், கண்ணுடியணிந்த மாணவர்கள், வாரத்தின் நாட்கள், இரட்டைப் படை எண்கள், 100-க்கு மேற்படாத 3ஆல் வகுபடும் எண்கள், வீட்டு விலங்குகள், காட்டு விலங்குகள் முதலியவற்றைக் கணங்களுக்கு உதாரணமாகக் கூறலாம்.

கணங்களைக் குறித்தல் : பொதுவாகக் கணங்களை இரு தலைப் பின்கீழ்க் குறிக்கலாம்.

நாய், பூனை, மாடு, குதிரை முதலியன வீட்டு விலங்குகளின் கணம். இதை A = { நாய், பூனை, மாடு, குதிரை } என்றோ, அல்லது, A = { வீட்டு விலங்கு } என்றோ குறிக்கவேண்டும். அதாவது கணங்களை A, B, C... என்ற ஆங்கில எழுத்துகளால் குறிப்பது வழக்கம்.

ஆண்டிலுள்ள மாதங்களை B = { ஆண்டின் மாதங்கள் } என்ற வருணனை முறையிலோ (descriptive method), அல்லது B={சித்திரை, வைகாசி......பங்குனி } என்று பட்டியல் (listing) முறையிலோ குறிக்கலாம்.

கண உறுப்புக்கள்

(1) கணத்திலுள்ள பொருள்கள் அல்லது குறியீடுகள் அதன் உறுப்புகள் (elements) எனப்படும்.

(2) கணப் பட்டியலில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரு முறைதான் எடுக்கப்படவேண்டும். உதாரணமாக, $A = \{a, a, b, c, d\}$ என்பதை $A = \{a, b, c, d\}$ என்றுதான் எழுதவேண்டும்.

(3) இதே கணத்தை A = {d, c, a, b} என்றும் எழுதலாம். அதாவது, உறுப்புகள் வரிசைப்படுத்தப்பட வேண்டியதில்லை.

(4) கணக் கட்டட முறை (Set builder notation) : A = { x | x என்பது தமிழ் மாதங்கள்} அல்லது {x:x என்பது தமிழ் மாதங்கள்}. B = {x | x என்பது மந்திரிகள்} அல்லது {x ::x என்பது மந்திரிகள்}. இங்கு x என்பது கணத்தின் பொதுவான ஓர் உறுப்பு என்றால் x-ன் பண்பையும் சேர்த்து மேற்கண்ட முறையில் குறிக்கவேண்டும்.

I பயிற்சி : கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணங்களைப் பட்டியல் படுத்து.

1. கணிதப் பாடம் நடக்கும் வாரத்தின் நாட்கள்.
2. உலகத்திலுள்ள சமுத்திரங்கள்.
3. பூமிக்கும் சூரியனுக்கும் இடையே உள்ள கிரகங்கள்.
4. 10-க்கு மேற்படாத இரட்டைப் படை எண்கள்.

II பின்வரும் கணங்களுக்குத் தகுந்த விளக்கப் பொருள்கள் தருக.

1. A = {1, 3, 5, 7, 9}.
2. B = {வடக்கு, தெற்கு, மேற்கு, கிழக்கு}.

3. C = {வீணை, பிடில், புல்லாங்குழல், மத்தளம்}

4. D = {மிதிவண்டி, உந்துவண்டி, பேருந்து வண்டி}

5. E = {மயில், காகம், குயில், புறு, கிளி}

III கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களில் மற்றுமோர் உறுப்பைச் சேர்.

1. A = {டில்லி. பம்பாய், கல்கத்தா —}
2. $B = \{4, \ 9, \ 16 -\}$
3. $C = \{7, 11, 13, 17, 19 -\}$
4. $D = \{1964, 1968, 1972 -\}$
5. E = {கலீலியோ, நியூட்டன், ஆர்க்கிமிடீஸ், C. V. ராமன் —}

முடிவுறுக் கணங்கள், முடிவுறு கணங்கள் (Infinite set, finite set)

A என்பது முழு எண்களின் வருக்கம் என்றால், அதாவது $A = \{1, 4, 9, 16 ......\}$ என்றால் இதில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறாதது. ஆகவே, இதை முடிவுறுக் கணம் எனலாம்.

$B = \{x \mid x$ என்பது 100-க்கு மேற்படாத முழு வருக்கங்கள்$\}$ என்றால் இதில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அளவிட முடியும். இதனை முடிவுற்ற கணம் எனலாம்.

வெற்றுக் கணம் : உறுப்புகளே இல்லாத கணம் வெற்றுக் கணம் (empty or null set). இதை { } என்றோ ϕ என்றோ குறிப்பது வழக்கம்.

(உ-ம்) {கொம்புடைய குதிரைகள்}

IV கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணங்களின் உறுப்புகள் எல்லாவற்றையும் பட்டியல்படுத்த முடியுமா? முடியாதா?

1. உன் பள்ளி மாணவர்களின் பெயர்கள்.
2. ஒற்றைப் படை எண்கள்.
3. 20-க்குக் கீழே உள்ள மூன்றால் வகுபடும் எண்கள்.
4. புலன்கள்.

V கீழே கொடுக்கப்பட்டவை முடிவுறு கணங்களா? முடிவுறுக் கணங்களா?

1. உன் பள்ளியில் ஆறும் வகுப்பு மாணவர்கள்.

2. 6-ல் வகுபடும் எண்கள்,
3. 10-க்கு மேற்பட்ட ஆனால் 100-க்குக் குறையாத ஒற்றைப் படை எண்கள்.

கணங்களின் உறுப்புகள்

கணம் $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ என்றால் a என்பது கணம். A-ன் உறுப்பு என்பதை $a \in A$ என்று குறிப்பிடலாம். g என்பது கணம் A-ன் உறுப்பு அன்று என்பதை $g \notin A$ என்று குறிப்பிடலாம்.

VI பயிற்சி ; $A = \{a, b, c, d, e\}$-ம் $B = \{p, q, r\}$-ம் ஆனால், கீழே கொடுக்கப்பட்டவை மெய்யானவையா இல்லையா என்று கூறு.

1. $a \in A$ 2. $f \in A$ 3. $k \notin A$ 4. $p \in B$
5. $o \in B$ 6. $a \notin B$ 7. $e \notin B$.

சம கணங்கள் (Equal sets)

A, B என்ற இரு கணங்களின் எல்லா உறுப்புகளும் ஒன்றுயிருந்தால் அவை சம கணங்களாகும்.

A, B கணங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மட்டிலும் சமமாயிருந்தால் அவை சம எண் கணங்கள் (equivalent set), எனப் படும் சண உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பது மரபு. $A = \{a, b, c, d, e\}$ என்றால் எ$(A) = 5$. (இதை, 'எண் $A = 5$' என்று கூறவேண்டும்.)

உதாரணங்கள் :

I a) $A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{c, b, d, a\}$ ஆனால் $A \equiv B$

b) $A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$
$B = \{\bigcirc, \square, \triangle\}$ ஆனால் $A = B$

II a) $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{9, 10, 3\}$ ஆனால், A–ம், B-ம் சம எண் கணங்கள்.

b) A = {அல்லி, மல்லி, தாமரை}
B = {மாடு, யானை, குதிரை} ஆனால், A-ம், B-ம் சம எண் கணங்கள். எ$(A) = 3$ எ$(B) = 3$.

III C என்பது வெற்றுக் கணமானால் $C = \{\ \}$, எ$(C) = 0$

VII பயிற்சி : கீழ்க்கண்ட கணங்கள்,

L = {ஒன்றுக்கும் இருபதுக்கும் இடையிலுள்ள மூன்றின் மடங்குகள்}

M = {10-க்குக் குறைந்த இரட்டைப் படை எண்கள்}

N = {15-க்கும் 25-க்கும் இடையிலுள்ள பகா எண்கள்}

P = {வாரத்தின் நாட்கள்}

என்பவற்றைப் பட்டியல்படுத்தி எ(L), எ(M), எ(N), எ(P)ஐக் கொடு.

இணைப்படுத்து (Match)

1. $A=\{1, 2, 3, 4\}$	$K=\{11\}$
2. $B=\{1, x, x^2\}$	L = {x : 20ஐ விடச் சிறிய முழுவருக்க எண்கள்}
3. $C=\{16, 9, 4, 1\}$	$M=\phi$
4. D={9ஐ விடப் பெரிய ஆனால் 13ஐ விடச் சிறிய ஒற்றைப்படையெண்கள்}	N = {முதல் நான்கு இயல் எண்கள்}
5. E ={10ஐ விடப் பெரிய பத்தின் காரணிகள்}	$P=\{x^2, 1, x\}$ $Q=\{15, 20, 25, 30\}$

அனைத்துக்கணம், உட்கணம் (universal set, subset):

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கணங்களை உற்றுநோக்குக.

A = {11 வயது முதல் 18 வயது வரையுள்ள மாணவர்}

B = {13 வயது மாணவர்கள்}

C = {நான்காம் படிவ மாணவர்கள்}

D = {கால்பந்து ஆடத்தெரிந்த மாணவர்கள்}

மேற்கண்ட கணங்கள் எல்லாம் {பள்ளி மாணவர்கள்} என்ற அடிப்படைக் கணத்தின் உட்கணங்களாகும். இதில் {பள்ளி மாணவர்கள்} என்பது அனைத்துக்கணம் எனப்படும். A, B, C, D என்பவை இதன் உட்கணங்கள்.

அனைத்துக் கணத்தைப் பொதுவாக U, E அல்லது Ω என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பது வழக்கம்.

VIII பயிற்சி : 1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட அனைத்துக் கணங்களின் உட்கணங்கள் சிலவற்றைக் கூறு.

(1) முழு எண்கள், (2) மனிதர்கள், (3) நேர் கோடுகளாலான வடிவங்கள், (4) உந்து வண்டிகள்.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டிருப்பவை உட்கணங்களானால் அவற்றின் அனைத்துக் கணங்கள் யாவை?

(a) {கோளம், கூம்பு, உருளை}

(b) {தங்கம், வெள்ளி, செம்பு}

(c) $\left\{3x = 12; \quad 4x - 1 = 15; \quad \frac{x}{4} = 8\right\}$

உட்கணம்

B கணத்தின் உறுப்புகள் எல்லாம் A கணத்தின் உறுப்புகளானால் B-யானது A-ன் உட்கணம் ஆகும். இதை $B \subset A$ என்று குறிக்கலாம்.

மேலும், எ (B) $<$ எ (A) ஆனால், B, A-ன் தகு உட்கணம். (proper sub-set)

ஆனால் எ $(B) =$ எ (A) ஆனால் B, A-ன் தகா உட்கணம் (improper sup-set).

மேலும், வெற்றுக்கணம் { } அல்லது ϕ ஐ எல்லாக் கணத்திற்கும் உட்கணமாக எடுத்துக்கொள்வது வழக்கம்.

கணம் $E = \{1, 2, 3\}$ ஆனால், அதன் உட்கணங்களாவன: ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. $\{1, 2, 3\}$ ஆக மொத்த உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 8.

IX பயிற்சி

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணம் $P =$ {சிவப்புநிறம், நீல நிறம், பச்சை நிறம்} யின் உட்கணங்களை எழுது.

2. கீழ்க்கண்ட கணங்களை $\subset$ அல்லது $=$ குறிகளால் இணை. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{2, 1\}$, $E = \{\ \}$ $F = \phi$

3. (a) ஒரே ஓர் உட்கணமுள்ள கணம் எது?

(b) $A \subset B$, $B \subset A$ ஆனால், A-க்கும், B-க்குமுள்ள உறவு என்ன?

4. காலியான இடங்களைப் பூர்த்திசெய்.

கணம் A	எ (A)	A-ன் உட்கணங்கள்	உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை
1. $\{a\}$			
2. $\{a, b\}$			
3. $\{a, b, c\}$			
4. $\{a, b, c, d\}$	4	ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ $\{a, b\}$ — — — — — $\{a, b, c\}$ — — -- $\{a, b, c, d\}$	16
5. $\{a, b, c, d, e\}$			

கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கச் சூத்திரம் காண்க.

5. பின்வரும் கருத்துகளைக் கணமொழியின்மூலம் (symbolic set language) எழுது.

(a) சதுரங்கள் எல்லாம் நாற்கரங்கள்.

(b) பகா எண்கள் எல்லாம் முழு எண்கள்.

6. நான்கு குழந்தைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட அனைத்துக் கணம் E = {ராமன், சீதை, கோவிந்தன், கமலா} என்பதாகும். கீழே கொடுக்கப்பட்ட இதன் உட்கணங்களைப் பட்டியல் படுத்து.

(1) மூன்று குழந்தைகள்

(2) ஒரு பையன், ஒரு பெண்

(3) இரண்டு குழந்தைகள்

(4) ராமனும் வேறு இருவரும்.

ஒவ்வாக் கணம் (Disjoint set)

இரண்டு கணங்களின் உறுப்புகள் முற்றிலும் வேறுபட்டிருந்தால் அவை ஒவ்வாக் கணங்கள் எனப்படும். உதாரணமாக,

A = {ஆசிரியர்கள்}, B = {மாணவர்கள்}.

கணச் செயல் வகைகள் (Set operations)

கணங்களின் செயல் வகைகள் மூன்று வகைப்படும். அவை யாவன: (a) கூட்டுக் கணம் (Union of sets)

(b) வெட்டுக் கணம் (Intersection of sets)

(c) நிரப்புக் கணம் (complement)

(a) கூட்டுக் கணம் : *A, B* இரண்டு கணங்களின் கூட்டுக் கணம் *C* ஆனுல், *C*-ன் உறுப்புகள் *A* அல்லது *B* அல்லது இரண்டிலும் இருக்கும். இதை,

$C = A \cup B$ என்று குறிக்கலாம்.

உதாரணம்

(1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e,\}$
$C = A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

(2) L = {இரட்டைப் படை எண்கள்}
M = {ஒற்றைப் படை எண்கள்}
$L \cup M = N$ = {இயல் எண்கள் யாவும்}

வெட்டுக் கணம் : *A, B* இரண்டு கணங்களின் வெட்டுக் கணம் *D*-யாஞல், *D*-ன் உறுப்புகள் *A, B* இரண்டு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளாகும். இதை $D = A \cap B$ என்று குறிக்கலாம்.

உதாரணம்

1. $A=\{1, 2, 3, 4\}$ $B=\{2, 4, 6, 8\}$ என்ருல், $D=A \cap B=\{2, 4\}$.
2. $P=\{a, b, c,\}$, $Q=\{c, d, e\}$ என்ருல், $P \cap Q=\{c\}$.
3. $L=\{10, 11, 12, 13\}$, $M=\{14, 15, 16\}$ என்ருல் $L \cap M=\phi$, *L, M* ஒவ்வாக் கணங்கள்.

X பயிற்சி

(a) $P=\{a, b, c\}$, $Q=\{c, d, e\}$ என்ருல், கீழே கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் கணங்களைப் பட்டியல் படுத்து:

(i) $P \cup Q$ (ii) $Q \cup P$ (iii) $P \cap Q$ (iv) $Q \cap P$ (v) $P \cup P$
(vi) $P \cap P$ (vii) $P \cup \phi$ (viii) $P \cap \phi$

(b) E என்பது அனைத்துக் கணம், $A=\{a, b, c\}$ என்ருல்
(i) $A \cup E$ (ii) $A \cap E$யை எழுது

(c) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,6\}$, $C=\{2,4,6\}$ என்ருல்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணங்களைப் பட்டியல் படுத்து.

(i) $A\cup(B\cap C)$, (ii) $(A\cap B)\cap C$,
(iii) $A\cup(B\cup C)$, (iv) $(A\cup B)\cup C$.

கீழ்க்கண்ட கணச்செயல் வகைகள் முக்கியமானவை.

1. கூட்டுக் கணங்கள்

(a) $A\cup A=A$ (b) $A\cup E=E$ (c) $A\cup\phi=A$.

(d) $A\cup B=B\cup A$ (கணக்கூட்டு, மாற்று விதிக்குட்பட்டது – Commutative law)

(e) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (கணக்கூட்டு, சேர்க்கை விதிக்குட்பட்டது)—(Associative law)

2. வெட்டுக்கணங்கள்

(a) $A\cap A=A$, (b) $A\cap E=A$ (c) $A\cap\phi=\phi$,

(d) $A\cap B=B\cap A$ (கணவெட்டு மாற்று விதிக்குட்பட்டது)

(e) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (வெட்டுக்கணம் சேர்க்கை விதிக்குட்பட்டது).

நிரப்புக் கணம்

ஆண்களும், பெண்களும் கற்கும் ஒரு வகுப்பை அனைத்துக் கணம் E என்றும், ஆண்களைக் கணம் B என்றும், பெண்களைக் கணம் G என்றும் கொண்டால், அனைத்துக் கணம் E-ன் உறுப்புகளில் கணம் B-ல் இல்லாதவை, B-ன் நிரப்புக் கணமாகும். இதை B' அல்லது $\overline{B}$ என்று குறிக்கலாம். கணம் B பையன்களைக் குறிக்கின்றது; கணம் B' பையன் அல்லன் என்பதைக் குறிக்கின்றது

$\therefore B'=G$

மேலும், இதே காரணத்தினுல் $G'=B$

வகுப்பில் S என்பது நீந்தத் தெரிந்த மாணவர்களைக் குறிக்குமாஞல், நீந்தத் தெரியாதவர்களை S' என்று குறிக்கலாம்.

உதாரணம்

(i) $E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P=\{1, 2\}$ என்ருல்,
$P'=\{3, 4, 5\}$ ஆகும்.

இதில் $P\cup P'=E$ என்பதையும் $P\cap P'=\phi$ என்பதையும் கவனிக்க.

(ii) $E=\{a, b, c, d\}$, $A=\{b, c\}$ என்ருல்,
$A'=\{a, d\}$
$A\cup A'=E$; $A\cap A'=\phi$

பயிற்சி

$E=\{l, m, n, p, r\}$, $P=\{l, m, n, r\}$, $Q=\{l, n, p,\}$ என்றால்,

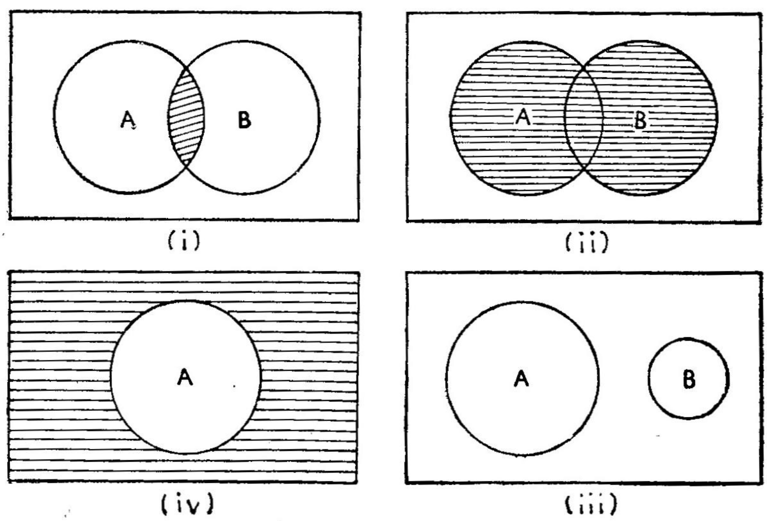
கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கணங்களைப் பட்டியல் படுத்து.

(a) P', (b) Q', (c) $P' \cup Q'$, (d) $P' \cap Q'$, (e) $P \cup Q$,
(f) $P \cap Q$, (g) $(P \cup Q)'$, (h) $(P \cap Q)'$, (i) $P \cup P'$, (j) $P \cap P'$

c, h, d, g முதலியவற்றில் கிடைக்கும் கணங்களைப்பற்றி உன் கருத்து என்ன?

'வென்' விளக்கப்படம் (Venn diagram)

கணங்களின் கருத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரச்சினைகளை விடுவிக்கும் முறையில் படவிளக்க முறையை ஜான் வென் (Jhon Venn—*1834-1923*) என்ற ஆங்கிலக் கணித மேதை கண்டு பிடித்தார். கணங்களை வட்டம், அல்லது நீள்வட்டம் போன்ற ஏதாவது ஒரு வசதியான எல்லைக்குள்ளும், கணத்தின் உறுப்புகளை அந்த எல்லைக்குள் அடங்கிய புள்ளிகளாகவும் குறிப்பது வழக்கம். அனைத்துக் கணம் வழக்கமாகச் செவ்வக வடிவத்தில் குறிக்கப்படும். கூட்டுக் கணங்களும், வெட்டுக் கணங்களும் கீழே கொடுக்கப் பட்டதுபோல் படவடிவில் குறிக்கப்படுகின்றன. படத்தில் *A* என்ற வட்டம் கணம் *A*-யையும் *B* என்ற வட்டம் கணம் *B*-யையும் குறிக்கும்.



படம் 112

படம் (i) கோடிட்ட இடம் $A \cap B$

(ii) கோடிட்ட இடம் $A \cup B$

(iii) A-ம், B-ம் சேராக் கணங்கள்

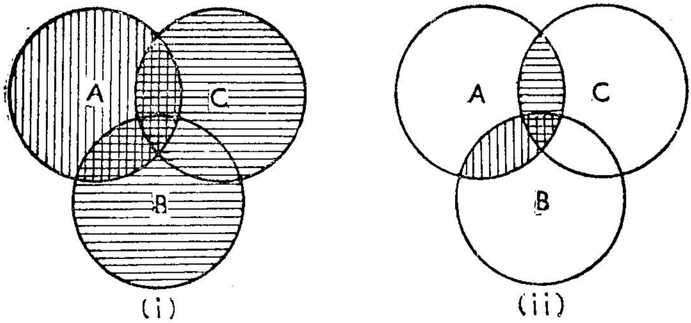
(iv) கோடிட்ட இடம் A' அல்லது A-ன் நிரப்புக் கணம்

உதாரணங்கள்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றை வென் விளக்கப் படம் வரைந்து மெய்ப்பி:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



படம் 113

படம் (i) படுக்கைக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $B \cup C$, கட்டங்களால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $A \cap (B \cup C)$.

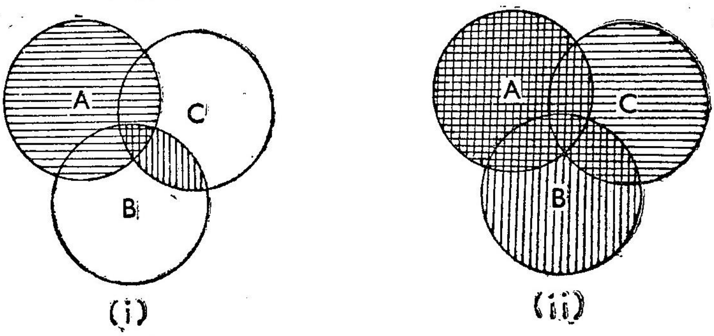
படம் (ii) படுக்கைக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $A \cap C$ செங்குத்துக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $A \cap B$ கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ஐக் குறிக்கும்.

படம் (i) கட்டங்களால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $= A \cap (B \cup C) =$

படம் (ii) கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ அதாவது, $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

படம் (i) செங்குத்துக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $(B \cap C)$ கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட மொத்தப் பரப்பு $A \cap (B \cap C)$.



படம் 114

படம் (ii) படுக்கைக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $(A \cup C)$ செங்குத்துக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $(A \cup B)$ ஆதலால், கட்டங்களால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

படம் (i)-ல் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட மொத்தப் பரப்பு =

படம் (ii)-ல் கட்டங்களால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு.

அதாவது, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றை வென் விளக்கப் படம் வரைந்து மெய்ப்பி :

(a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

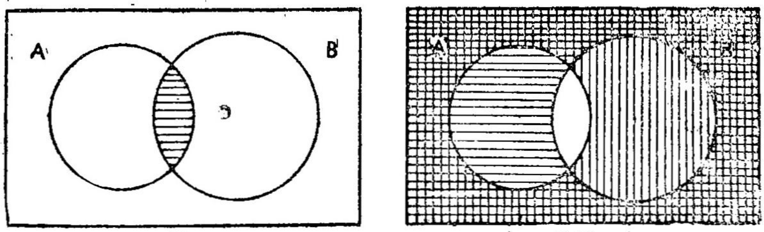
இவ் விரண்டும் டிமார்கன் விதிகள் (De Morgan's Law) எனப் படும்.

(a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

அதாவது, A, B இரண்டு கணங்களின் வெட்டுக் கணத்தின் நிரப்புக்கணம், நிரப்புக் கணங்களின் கூட்டுக் கணமாகும்.

படம் 115 (i)-ல் கோடிட்ட இடம் $(A \cap B)$ யைக் குறிக்கும். ஆதலால் வெறுமையான இடம் $(A \cap B)'$ ஐக் குறிக்கும்.

படம் 115 (ii)-ல் படுக்கைக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட இடம் B-ன் நிரப்புக்கணம், அதாவது B'.



(i) (ii)

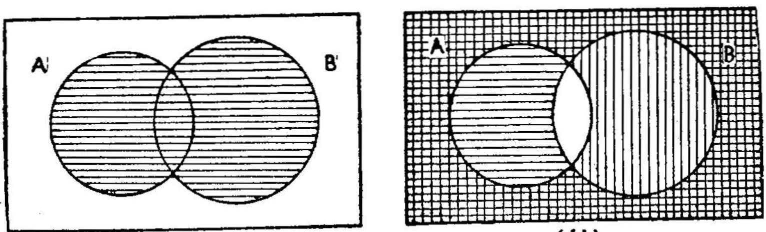
படம் 115

செங்குத்துக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட இடம் A-ன் நிரப்புக் கணம், அதாவது A'.

ஆதலால், கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட மொத்தப் பரப்பு $A' \cup B'$. இதுவே படம் (i)-ல் வெறுமையான இடத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$$

(b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ அதாவது, A, B இரண்டு கணங்களின் கூட்டுக் கணத்தின் நிரப்புக்கணம், இவற்றின் நிரப்புக் கணங்களின் வெட்டுக் கணமாகும்.



(i) (ii)

படம் 116

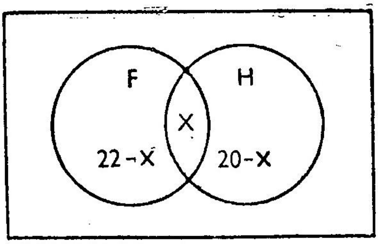
படம் (i)-ல் கோடிட்ட இடங்கள் $(A \cup B)$ ஐக் குறிக்கும். ஆதலால் வெறுமையான இடம் $(A \cup B)'$ ஐக் குறிக்கும்.
படம் (ii)-ல் படுக்கைக் கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட இடம் B-ன் நிரப்புக் கணம், அதாவது B'. செங்குத்துக் கோடுகளால் நிரப்பப் பட்ட இடம் A-ன் நிரப்புக் கணம், அதாவது A'. ஆகவே, கட்டங்களால் நிரப்பப்பட்ட இடம் $A' \cup B'$.

படம் (i)-ல் வெறுமையான இடம்,
படம் (ii)-ல் கட்டங்களால் நிரப்பப்பட்ட இடத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$$

கணக்குகள்

சில புதிர்களை வென் விளக்கப்பட உதவியால் எளிதில் தீர்க்கலாம். கணங்களில் பொது உறுப்புகள் இருந்தால் முறையாகப் பாகுபடுத்தி, வெட்டுக் கணங்களின் இனவாரியாகப் பிரித்து ஒதுக்கிக் குறிப்பிடவேண்டும்.



படம் 117

உதாரணம்: 40 மாணவர்களுள் ஒரு வகுப்பில் 22 பேர் கால் பந்து ஆடத் தெரிந்தவர்கள்; 20 பேர் மட்டைப் பந்து ஆடத் தெரிந்தவர்கள்; 8 பேர் ஒன்றும் ஆடத் தெரியாதவர்கள். கால் பந்தும், மட்டைப் பந்தும் ஆடத் தெரிந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?

வகுப்பு மாணவர்களைச் செவ்வகத்தினுல் குறிக்க. கால் பந்து ஆடுபவர்களை F-ம், மட்டைப் பந்து ஆடுபவர்களை H-ம் குறிக்கட்டும், இரண்டு ஆட்டங்களும் தெரிந்தவர்களை $F \cap H$ குறிக்கும். படத்தில், எ $(F \cup H) = 32$.

ஆகவே, $22 - x + x + 20 - x = 32$

$\therefore 42 - x = 32$

$x = 10$ (விடை)

பயிற்சி

(1) சங்கீதத்தில் விருப்பமுள்ள மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்காக எடுத்த புள்ளிவிவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

ஆராய்ச்சிக்காக எடுத்துக்கொண்ட மாணவர்கள்—120

'பாப்' சங்கீதத்தில் விருப்பமுடையவர்கள்	...	88
கர்நாடக சங்கீதத்தில் விருப்பமுடைவர்கள்	...	26
ஒரு சங்கீதத்திலும் விருப்பமில்லாதவர்கள்	...	17

இரண்டிலும் விருப்பமுள்ளவர் எத்தனை பேர்?

(2) கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றை வென்படத்தில் குறி.

$E = \{$எல்லா முக்கோணங்களும்$\}$

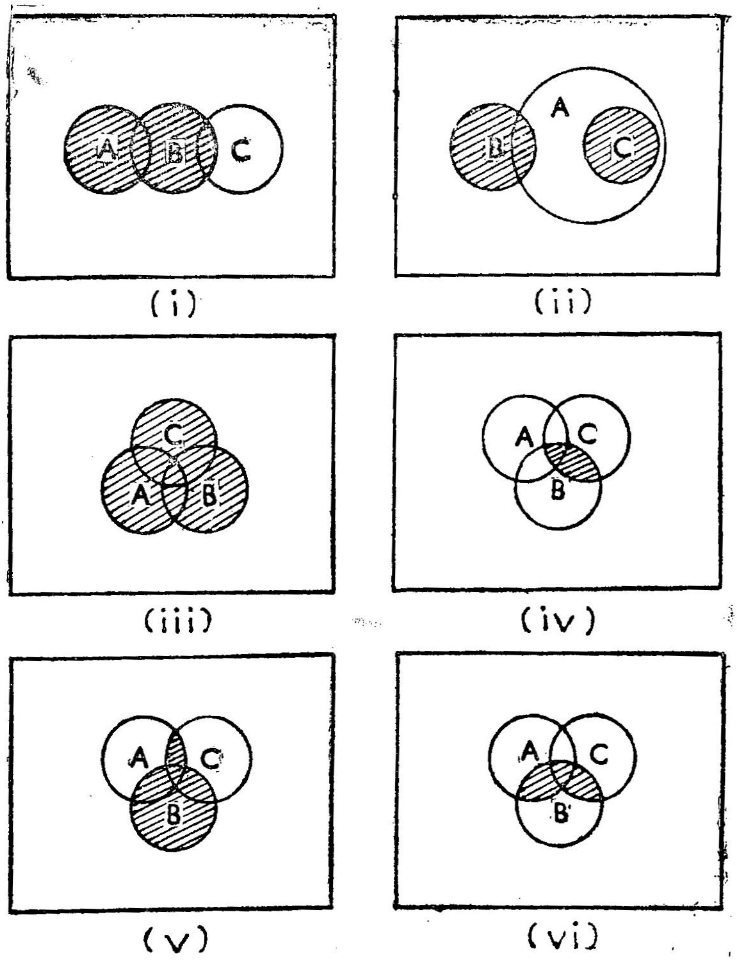
$I = \{$இரு சமபக்க முக்கோணங்கள்$\}$

$K = \{$செங்கோண முக்கோணங்கள்$\}$

$I \cap K$ எதைக் குறிக்கிறது என்று விவரி.

XI பயிற்சி : மீள்பார்வை :

(1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$ என்றால். எ $(A \cup B)$ என்ன?



படம் 118

(2) $P = \{ x :$ ஒன்று முதல் 7 முடிய உள்ள ஒற்றைப் படை எண்கள்$\}$

$Q = \{ y :$ ஒன்று முதல் 9 வரையுள்ள இரட்டைப் படை எண்கள்$\}$ என்ருல், $P \cup Q$ கணத்தைப் பட்டியல் படுத்தி வென் படத்தில் குறி. எ $(P \cup Q)$ என்ன?

(3) $R = \{$செவ்வகங்கள்$\}$, $S = \{$ சதுரங்கள் $\}$ என்ருல் (a) $R \cup S$ (b) $R \cap S$ என்பவை எவற்றைக் குறிக்கும்.

(4) (a) எ $(A) = 50$, எ $(B) = 62$, எ $(A \cap B) = 26$ என்ருல் எ $(A \cup B)$ என்ன?

(b) எ $(x) = 7$, எ $(y) = 11$, x-ம், y-ம் சேராக் கணங்கள் என்ருல் எ $(X \cup Y)$ ஐக் கண்டுபிடி.

(c) எ $(P) = 23$, எ $(Q) = 25$-ம் $P \subset Q$-ம் ஆனுல், எ $(P \cup Q)$-க் கணி.

(5) முன்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வென்படங்களில் (118) A, B, C, மூன்று கணங்கள். இவற்றில், கோடிட்டுக் குறித்த பகுதிகளை A, B, C-ன் கூட்டு, அல்லது வெட்டுக் கணங்களாக வகைப் படுத்து.

(6) எல்லா முழு எண்களும் சேர்ந்தது அனைத்துக் கணமாஞல், எதிர்மறை முழு எண்கள் கணத்தின் நிரப்புக் கணம் எது?

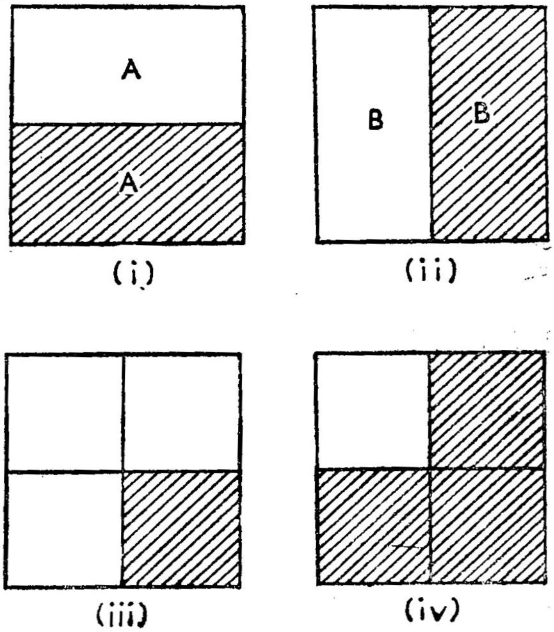
(7) E என்பது எல்லா முக்கோணங்களின் கணம், A என்பது இரு சமபக்க முக்கோணங்களின் கணமாஞல் A'ஐ விவரி.

(8) அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சதுரங்கள் (படம் 119) அனைத்துக் கணங்களைக் குறிக்கின்றன. இவற்றில், கோடிட்ட பகுதிகளைக் கூட்டுக் கணங்களாகவோ, வெட்டுக் கணங்களாகவோ எழுது.

(9) ஒரு பள்ளியிலுள்ள 20 ஆசிரியர்களில், கணிதம் 20 பேரும், பௌதீகம் 9 பேரும், வேதியியல் 7 பேரும் கற்றுக் கொடுக்கின்றனர். 4 ஆசிரியர்கள் கணிதமும், பௌதீகமும் கற்றுக்கொடுக்கின்றனர். ஆனுல், ஒருவரும் கணிதமும் வேதியியலும் கற்றுத் தருவதில்லை. பௌதீகம் மட்டும் எத்தனை பேர் கற்றுக்கொடுக்கின்றனர்?

10. மாணவர்கள் தாங்களே தயாரித்து அளித்த பள்ளிக்கூட விருந்து ஒன்றில் 115 மாணவர்கள் கலந்துகொண்டனர். இதில் 70 பேர் வடை கொண்டுவந்தனர்; 54 பேர் லட்டுக் கொண்டு வந்தனர்; 19 பேர் மிச்சரும் வடையும் மட்டும் கொண்டு

வந்தனர்; 22 பேர் வடையும், லட்டும் மட்டும் கொண்டு வந்தனர்; 24 பேர் வடை மட்டிலும் கொண்டுவந்தனர்; 15 பேர் லட்டு மட்டும் கொண்டுவந்தனர். மிக்சர் மட்டும் கொண்டு வந்தவர் எத்தனை பேர்?



படம் 119

கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன்
(Cartesian product)

A, *B* என்பன இரு கணங்களானால் அவற்றின் கார்டீசியன் பெருக்கலை $A \times B$ (A cross B) என்று குறிப்பிடலாம். இது *A*-ன் உறுப்புகளை முன்னுறுப்பாகவும் *B*-ன் உறுப்புகளை பின்னுறுப்பாகவும் கொண்ட அனைத்து வரிசைச் சோடிகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணமாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 6, 8\}$

என்றால் $A \times B = \{ (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$

இதே போல் $B \times A = \{ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6,2) (6, 3), (8, 1), (8,2), 8, 3)\}$.

இவற்றில், முன்னுறுப்பை x-அச்சிலும், பின்னுறுப்பை y-அச்சிலும் வரைப்படத்தாளில் குறித்தால் $A\times B$-ம், $B\times A$-ம் வெவ்வேறு கணங்கள் என்பது தெளிவாகும். $(1, 4)$-ம், $(4, 1)$-ம் ஒரே புள்ளி அல்ல).

A-ம், B-ம் சம கணங்களாயிருந்தால் $A\times B$, $B\times A$-க்குச் சமமாக இருக்கும்.

கணம் A-ல் 3 உறுப்புகள் உள்ளன. கணம் B-ல் 3 உறுப்புகள் உள்ளன. $A\times B$ என்று கணத்தில் 9 உறுப்புகள் (9 வரிசைச் சோடிகள்) உள்ளன.

பயிற்சி

1. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$ என்றால் $A\times B$, $B\times A$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

2. $S = \{1, 2, 3, 4\}$ என்றால் $S\times S$ கண்டுபிடி.

உறவுகள்

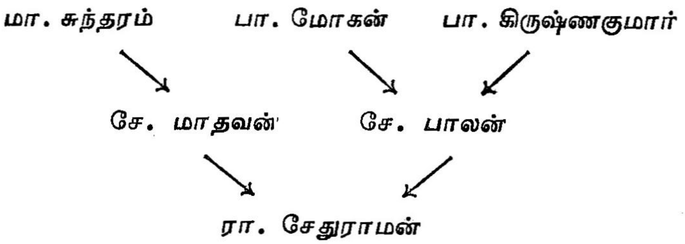
(i) வகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு மாணவனையும் அவன் தந்தையின் பெயரிலுள்ள முதலெழுத்தில் ஆரம்பமாகும் பெயருடைய மாணவனைக் குறிப்பிட்டுக் காட்டச் சொன்னால்.

பா. மோகன், கி. பாலன் என்ற மாணவனையும்,

மா. சுந்தரம், சே. மாதவன் என்ற மாணவனையும்,

கி. பாலன், பா. கிருஷ்ணகுமார் என்ற மாணவனையும்

குறிப்பிட்டுக் காட்டலாம். மேலுள்ள விவரங்களைப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

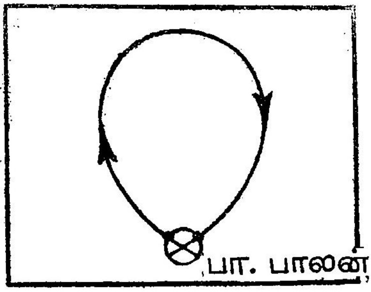


இப் படம், '—ன் தந்தையின் பெயரின் முதலெழுத்தைத் தனது ஆரம்ப எழுத்தாகக் கொண்டவன்' என்ற உறவினைக் காட்டுகிறது. உறவினைக் குறிக்கும் இம் மாதிரியான படங்களுக்கு 'அம்புக்குறிப் படங்கள்' என்று பெயர்.

இதில், பா. பாலன் போன்று பெயரமைந்த சில மாணவர்கள் தங்களையே குறிப்பிட்டுக் காட்டலாம். இந் நிலையில், அம்புக் குறிக்குப் பதிலாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருப்பது போல் வளையம் (loop) அமைத்துக் காட்டுவது பொருந்தும்.

அம்புக்குறிப் படத்திலுள்ள உறவுகளை ஒரு கணமாகக் கொள்ளலாம். இதை,

A = { (மா. சுந்தரம், சே. மாதவன்), (பா. மோகன், சே. பாலன்), (பா. கிருஷ்ணகுமார், சே. பாலன்), (சே. மாதவன், ரா. சேதுராமன்), (சே. பாலன் ரா. சேதுராமன்) }



படம் 120

என்று எழுதலாம். இந்தக் கணத்தின் உறுப்புகள் வரிசைச் சோடிகள் (ordered Pairs) என வழங்கப்படுகின்றன. இதில் (பா. பாலன், பா. பாலன்) போன்ற உறவுகள் சர்வ சமச் சோடி (identical Pair) என வழங்கப்படுகின்றன.

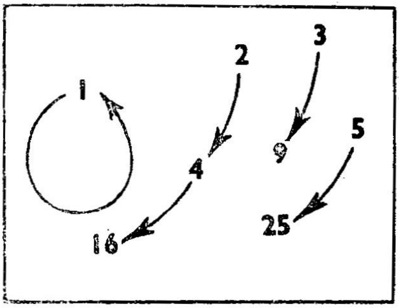
ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடிக் கணமும் ஓர் உறவைக் குறிக்கும். (Every set of ordered Pair is a relation.)

மேற் கூறிய உறவுகளைப்போல், கணிதத்தில் 'வருக்கம், இணையானது, செங்குத்தானது, பெரியது, சிறியது, காரணி, மடங்கு' போன்ற உறவுகளைக்கூட அம்புக் குறிப் படங்களால் குறிப்பிடலாம். எடுத்துக் காட்டாக, {1, 2, 3, 4, 5, 9, 16, 25} என்ற கணத்தை எடுத்துகொள்வோம். இதில்,

1-ன்	வருக்கம்	1
2-ன்	,,	4
3-ன்	,,	9
4-ன்	,,	16
5-ன்	,,	25

என்ற ஐந்து விவரங்களையும் பின்வரும் அம்புக்குறிப் படத்தால் குறிக்கலாம்.

'—ன் வருக்கம்' என்ற உறவான இதே ஐந்து விவரங்களையும் நாம் வரிசைச் சோடிகளின் கணமாகக் குறிப்பிடலாம். அதாவது,



படம் 121

$R = \{ (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25) \}$

'R' என்பது '—ன் வருக்கம்' என்ற உறவினைக் குறிக்கும் போது '2-ன் வருக்கம் 4' என்பதை $2 R 4$ என்றும்; '2-ன் வருக்கம் 9 அன்று' என்பதை $2 \not R 9$ என்றும் குறிக்கலாம். இதில் ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியிலும் பின்னுறுப்பு முன்னுறுப்பின் வருக்கமாகும்.

முன்னுறுப்புகளின் கணத்தை உறவின் மதிப்பகம் (Domain of relation) என்றும், பின்னுறுப்புகளின் கணத்தை உறவின் வீச்சகம் (Range of relation) என்றும் குறிப்பிடலாம். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில்,

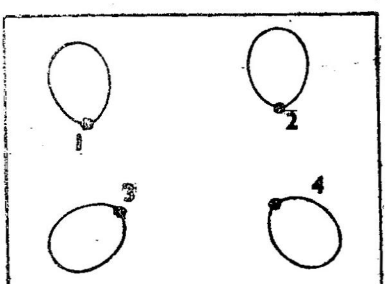
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ — உறவின் மதிப்பகம்

$\{1, 4, 9, 16, 25\}$ — உறவின் வீச்சகம்.

வீச்சகத்தை உட்கணமாகக் கொண்ட எந்தவொரு கணத்தையும் அவ்வுறவின் துணைமதிப்பகம் (Co-domain of relation) எனலாம்.

உறவு வகைகள்

1. மீட்புறவு (Reflexive relation): $\{1, 2, 3, 4\}$ என்ற கணத்தில் 'சமம்' என்ற உறவினைக் குறிக்கும் அம்புக் குறிப்படம் வரைவோம். இதில் ஒவ்வோர் எண்ணிலும் தொடங்கும் அம்புக் குறியானது அவ்வெண்ணிலேயே முடியுமாறு போடப்பட்டுள்ளது.



படம் 122

R என்பது சமம் என்ற உறவினைக் குறித்தால்

$R=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

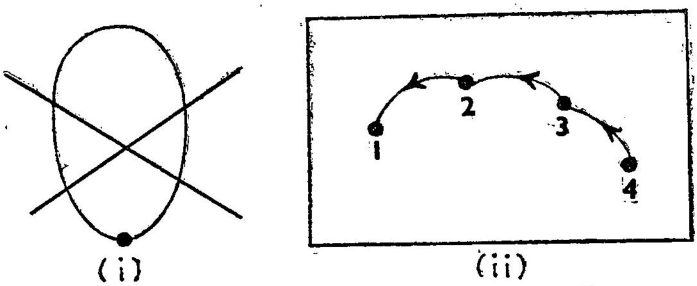
$(3,3) \in R$ என்பதனை $3R3$ (three related to three) எனவும் எழுதலாம். எனவே, மீட்புறவினைக் குறிக்கும், அம்புக் குறிப் படங்களில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் வளையங்கள் இருக்கவேண்டும்.

உதாரணம்

1. இணையானது (the relation ∥ is reflexive)

2. உட்கணம் (the relation ⊂ is reflexive)

2. மீட்புறவு அல்லாதது (Anti reflexive): அம்புக் குறிப் படத்தில் வளையங்கள் ஒன்றுகூட இல்லாத உறவினை மீட்புறவு அல்லாதது என்கிறோம்.



படம் 123

{1, 2, 3, 4} என்ற கணத்தில் 'பெரியது' என்ற உறவினைக் குறிக்கும் அம்புக் குறிப் படம் வரைந்தால் (எந்த ஓர் எண்ணும் அதே எண்ணைக்காட்டிலும் பெரியது அல்லாதபடியால்) ஒரு வளையம் கூடக் காணமுடியாது.

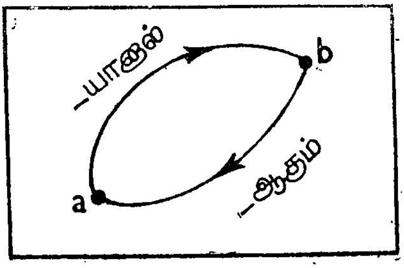
உதாரணம்

1. '—ன் மகன்' என்ற உறவு

2. சிறியது என்ற உறவு

3. சமச்சீருறவு (Symmetric relation)

ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் ஒவ்வொரு சோடி உறுப்புகளுக்கும், ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு அம்புக்குறி வரைய முடிந்தால் இந்த உறவானது சமச் சீருறவு எனப்படும்.

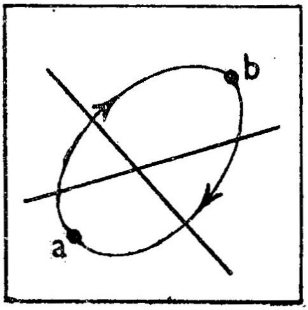


படம் 124

எடுத்துக்காட்டாக, ஆண்களின் கணத்தில் R என்பது '—ன் சகோதரன்' என்ற உறவினைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். இதில் 'a-ன் சகோதரன் b' என்பது மெய்யானால் 'b-ன் சகோதரன் a' என்பதும் மெய்யாகும்.

உதாரணம்

கோடுகளின் கணத்தில் 'இணையானது என்ற உறவு'.

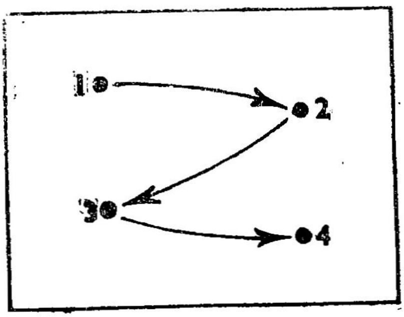


படம் 125

4. சமச்சீரல்லா உறவு (Anti symmetry)

ஏதேனும் ஒருகணத்தில் ஒன்றுக்கொன்று சமமில்லாத ஒரு சோடி உறுப்புகளில் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு ஒரே சமயத்தில் அம்புக்குறி வரைய முடியாத உறவு சமச்சீரல்லா உறவு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக {1, 2, 3, 4} என்ற கணத்தில் 'சிறியது' என்ற உறவினைக் குறிக்கும் அம்புக் குறிப்படம் வரையும்பொழுது எந்த ஒரு சோடி உறுப்புகளுக்கும், ஒன்றிலிருந்து, மற்றொன்றிற்கு ஒரே சமயத்தில் அம்புக்குறி வரைய முடியாது.



படம் 126

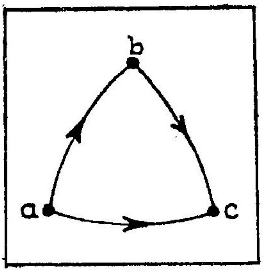
உதாரணம்

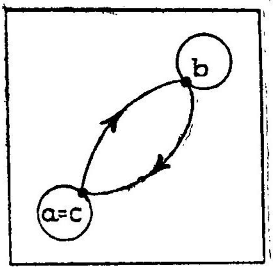
1. ⊂ என்ற உறவு
2. 'பெரியது' என்ற உறவு

5. தொடருறவு (Transitive relation)

ஏதேனும் ஒரு கணத்தில், ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு a-லிருந்து இரண்டாவது உறுப்பு b-க்கு அம்புக்குறி வரைய முடிந்தும், இரண்டாவது உறுப்பான b-லிருந்து மூன்றாவது உறுப்பு c-க்கு அம்புக்குறி வரைய முடிந்தும், a-லிருந்து c-க்கு அம்புக்குறி வரையவும் முடிந்தால் (மூன்று உறுப்புகளும் மாறுபட்டு இருந்தோ அல்லது இல்லாமலிருந்தோ) இத்தகைய உறவைத் தொடருறவு எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக முக்கோணங்களின் கணத்தில் 'சர்வசமம்' என்று உறவினை எடுத்துக்கொண்டால் $\{a, b, c\}$ என்ற கணத்தில் $a \equiv b$-ம், $b \equiv c$-ம் ஆனால், $a \equiv c$ என்பது தெளிவாகிறதல்லவா?





(i) (மூன்று உறுப்புகளுக்கு) (ii) (இரு உறுப்புகளுக்கு)

படம் 127

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\geqslant$, $>$, $\leqslant$, $<$, $=$ என்ற உறவுகள் (இயல் எண்களின் கணத்தில்)

(2) $\subset$, $\supset$ என்ற உறவுகள்.

6. தொடருறவு அல்லாதது; ஆண்களின் கணத்தில் '—ன் தந்தை' என்ற உறவு தொடருறவு அல்லாதது. ஏனெனில், *A*-ன் தந்தை *B* ஆகவும், *B*-ன் தந்தை *C* ஆகவும் இருந்தால் *A*-ன் தந்தை *C* ஆக இருக்க முடியாதல்லவா?

எடுத்துக்காட்டு

(1) '—ன் நண்பன் என்ற உறவு (ஆண்களின் கணத்தில்)

(2) கோடுகளின் கணத்தில் 'செங்குத்தானது' என்ற உறவு (ஒரே தளத்தில்)

சமான உறவு (Equivalence relation)

ஓர் உறவு

(1) மீட்புறவு ஆகவும்

(2) சமச்சீருறவு ஆகவும்

(3) தொடருறவு ஆகவும் இருப்பின் அவ் வுறவைச் 'சமான உறவு' என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) சமம் என்ற உறவு (எண்களின் கணத்தில்)

(2) முக்கோணங்களின் கணத்தில் சர்வசமம் என்ற உறவு

சார்புகள்
(Function)

நமது நாட்டில் தமிழ்நாடு, ஆந்திரம், கேரளம், கர்நாடகம், உத்தரப்பிரதேசம், வங்காளம், மகாராஷ்டிரம், மத்தியப் பிரதேசம் போன்றவை சில மாநிலங்கள். இவற்றின் தலைநகரங்கள் முறையே சென்னை, ஐதராபாத், திருவனந்தபுரம், பங்களூர், லக்னோ, கல்கத்தா, பம்பாய், போபால் ஆகும். இவ்வாறாக ஒவ்வொரு மாநிலத்திற்கும், ஒவ்வொரு தலைநகரம் நிச்சயமாகத் தரப்பட்டுள்ளது. A என்பது மாநிலங்களின் கணம் என்றும் B என்பது மாநிலத் தலைநகரங்களின் கணம் என்றும் கொண்டால்,

A = {தமிழ்நாடு, ஆந்திரம், கேரளம் ...... }

B = {சென்னை, ஐதராபாத், திருவனந்தபுரம் ...} ஆகிறது.

A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் B-ன் ஒரே ஓர் உறுப்புப் பிணைக் கப்பட்டிருக்கிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி (rule) அமைக்கப் பட்ட இப் பிணைப்பிற்கு A-லிருந்து B-க்குச் சார்பு (function) என்று பெயர்.

A ஆனது சார்பின் மதிப்பகம்.

B ஆனது சார்பின் துணைமதிப்பகம்.

$a \in A$ என்றால், a-யுடன் இணைக்கப்பட்ட B-ன் உறுப்பை $f(a)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7, 9, 11, 13\}$ என்க. X-ன் உறுப்பான x-உடன், அதன் $(2x + 3)$ ஐ இணைக்கும் விதியானது ஒரு சார்பாகும்.

இதனை 'f' எனக் குறித்தால்

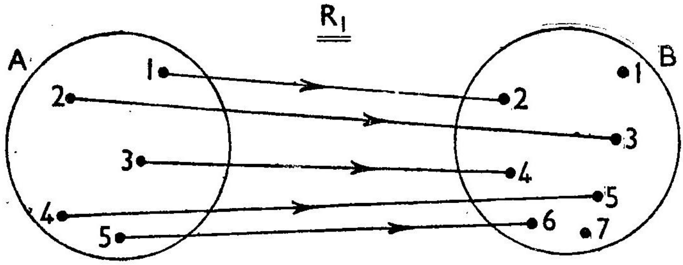
$f(1) = 5$, $f(2) = 7$, $f(3) = 9$, $f(4) = 11$. இங்கு கூறிய எடுத்துக்காட்டில், x-ன் பிம்பங்கள் (image) எனப்படும். $f(x)$ அனைத்தும் ஒரு கணத்தை உண்டாக்குகின்றன. இக் கணத்தை 'f-'ன் வீச்சகம் (range of f) எனக் குறிப்பிடுவோம். $X = \{1, 2, 3, 4\}$ — மதிப்பம்; $Y = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ — துணை மதிப்பகம்.

வீச்சகம் $= \{5. 7, 9, 11\}$

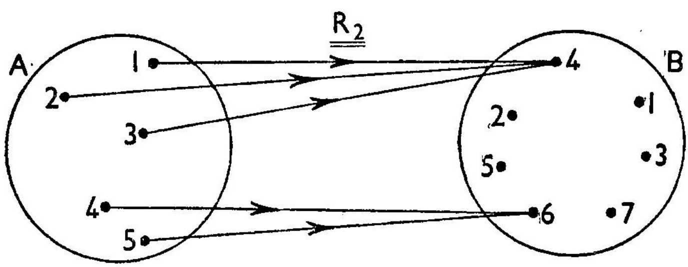
ஒரு சார்பின் வீச்சகம் அதன் துணை மதிப்பகத்தின் (co-domain) உட்கணமாகவே இருக்கும்.

ஆகவே, சார்பு என்பது ஓர் உறவே என்பது புலனாகிறது. சார்பின் தனித்தன்மை யாதெனில், $x \epsilon X$ ஆனால் x-உடன் Y-லுள்ள ஒரே ஓர் உறுப்புதான் உறவு பூண்டிருக்க வேண்டும்.

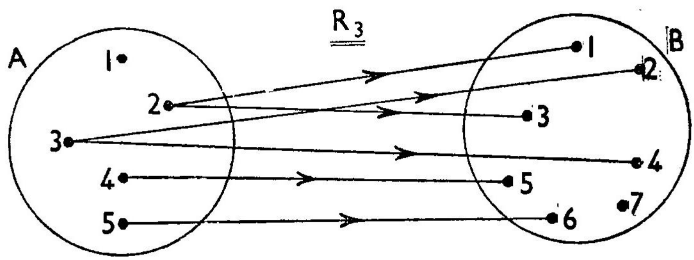
பின்வரும் அம்புக்குறிப்படங்களை கவனிக்கவும் :



படம் 128 (i)



படம் 128 (ii)



படம் 128 (iii)

மேலே காட்டப்பட்ட உறவுகளில்—(R_1, R_2, R_3), R_1, R_2 இரண்டிலும், A-லுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடனும், B-ன் ஒரே ஓர் உறுப்புதான் உறவு கொண்டுள்ளது. ஆனால் R_3-ல் இவ்

வாறின்றி A-ன் பல உறுப்புகளுடன் B-ன் ஒரே ஓர் உறுப்பு உறவு கொண்டுள்ளது.

$$R_1 = \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 5),\ (5, 6)\}$$

$$R_2 = \{(1, 4),\ (2, 4),\ (3, 4),\ (4, 6),\ (5, 6)\}$$

$$R_3 = \{(2, 1),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (3, 4),\ (4, 5),\ (5, 6)\}$$

R_1, R_2 இரண்டு உறவுகளும் சார்புகளாகும். ஆனால் R_3 உறவாயிருந்தாலும் அது சார்பன்று.

ஏனெனில் R_3-ல் இரண்டு வரிசைச் சோடிகளின் முன்னுறுப்புகள் சமமாயுள்ளன.

எல்லாச் சார்புகளும் உறவுகள்; எல்லா உறவுகளும் சார்புகளாகா.

(உ-ம்), கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உறவுகளின் மதிப்பகத்தையும், வீச்சகத்தையும் எழுது. இவற்றில் எவை சார்புகள்?

(i) $\{(0, 1),\ (2, 2,)\ (1, 3),\ (0, 2),\ (2, 1)\}$

(ii) $\{(a, 5),\ (b, 1),\ (c, 2)\ (d, 3)\}$

(iii) $\{(a, p),\ (b, q),\ (c, p),\ (d, q)\}$

விடை

(i) மதிப்பகம் $= \{0, 1, 2\}$

வீச்சகம் $= \{1, 2, 3\}$

இரண்டு வரிசைச் சோடிகளுக்கு ஒரே முன்னுறுப்பிருப்பதால் இவை சார்பல்ல.

(ii) மதிப்பகம் $= \{a, b, c, d\}$

வீச்சகம் $= \{5, 1, 2, 3\}$ இது ஒரு சார்பு.

(iii) மதிப்பகம் $= \{a, b, c, d\}$

வீச்சகம் $= \{p, n\}$ இது ஒரு சார்பு.

பயிற்சி

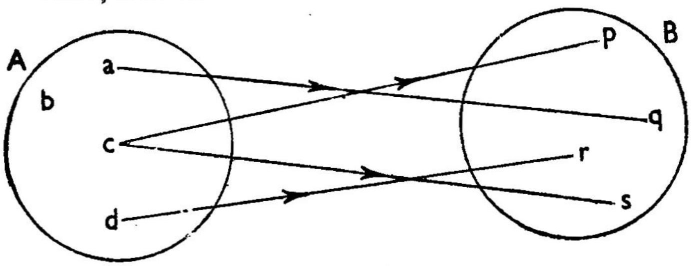
I கீழே கொடுக்கப்பட்ட உறவுகளின் மதிப்பகம், வீச்சகம் என்ன? அவற்றைச் சார்பு அல்லது சார்பன்று என்று குறிப்பிடு.

1. { (a, b), (b, c), (c, d) (d, e), (e, f) }
2. { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) }
3. { (a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4) }
4. { (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1) }

II கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உறவின் மதிப்பகம், வீச்சகம் என்ன ?

(a) { (1, 2), (2, 3), (3, 4) (4, 5) }
(b) { (−3, 1), (−1, 1), (1, 0), (3, 0) }

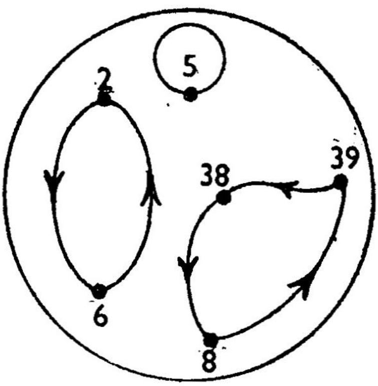
III பின்வரும் அம்புக்குறிப் படங்களின் உறவு, உறவின் மதிப்பகம், வீச்சகம் என்ன?



படம் 129

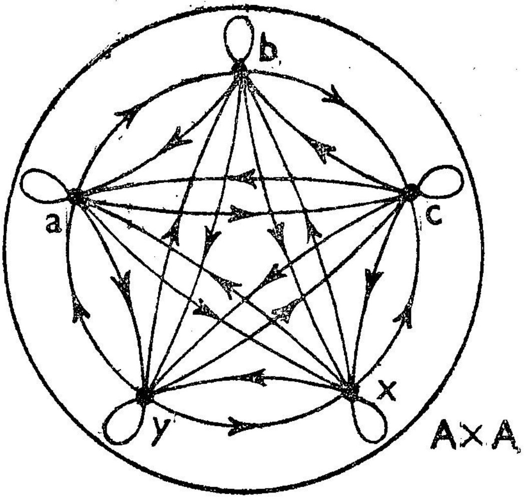
IV { (5, 5), (6, 2), (2, 6), (38, 8), (8, 39) } என்ற உறவுக்கு அம்புக்குறிப் படம் வரைக.

(விடை)



படம் 130

V $A = \{a, b, c, x. y\}$, என்றால் $A \times A$ என்ற பெருக்கற் பலனின் அம்புக்குறிப்படம் வரைக.



(விடை)

படம் 131

VI ஓர் உறவின் மதிப்பகம் {சிகப்பு, மஞ்சள் (amber), பச்சை}; அதன் வீச்சகம் {நிறுத்த ஆயத்தப்படு, நிறுத்து, செல்}. இவற்றிற்கான உறவுகளைக் குறிப்பிட்டு அது சார்பா இல்லையா? என்பதை விளக்கு.

மாறிலிச் சார்புகள் (Constant functions)

X என்பது ஒரு குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் கணம். *Y* என்பது குடும்பத்திலுள்ள பெரியவர்களின் கணம். *f* என்பது ஒவ்வொரு குழந்தையுடனும் அவனது தந்தையைப் பிணைக்குமாயின், *f* ஒரு சார்பாகும். *X*-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் பிம்பம் ஒன்றுதான். இத்தகைய சார்புகளை மாறிலிச் சார்புகள் எனக் கூறலாம். எனவே, மாறிலிச் சார்பின் வீச்சகம் ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – மதிப்பகம்

$Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ – துணை மதிப்பகம்

f என்பது *X*-லுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணையும் *Y*-யிலுள்ள பூச்சியத்தால் பெருக்கு என்பது விதி.

$f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$ $f(5) = 0$; எனவே, f ஒரு மாறிலிச் சார்பு.

சமனிச் சார்பு (Identity function)

மதிப்பகமும், துணைமதிப்பகமும் ஒரே கணமாக இருக்கையில், மதிப்பகத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் அதே உறுப்பினைப் பிணைப்பதுவும் சார்பாகிறது. இத்தகைய சார்பினைச் சமனிச் சார்பு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

,f' என்பது X-லுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணையும் 1 ஆல் பெருக்கு என்ற விதிப்படி,

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 5$. இங்கு $x \in X$ எனில் $f(x) = x$.

நேர்விகிதச் சார்பு (Direct variation function)

எடுத்துக்காட்டு

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ — மதிப்பகம்

$Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ — துணை மதிப்பகம்

$f(x) = 2x$ என்ற விதிப்படி

$$f(1) = 2 \quad f(2) = 4 \quad f(3) = 6 \quad f(4) = 8$$

எனவே, சார்பின் வீச்சகம் $= \{2, 4, 6, 8\}$

எதிர்விகிதச் சார்பு (Inverse variation function)

எடுத்துக்காட்டு

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Y = \left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}\right\}$$

X-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் Y-லுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடன் $f(x) = \frac{2}{x}$ என்ற விதியினால் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது

$$f(1) = \frac{2}{1}, \; f(2) = \frac{2}{2}, \; f(3) = \frac{2}{3}, \; f(4) = \frac{2}{4}$$

ஒருபடிச் சார்புகள் (linear function)

எடுத்துக் காட்டு

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$f(x) = (2x - 1)$ என்றால்

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 5, \quad f(4) = 7$$

எனவே, வீச்சகம் $= \{1, 3, 5, 7 \ldots\}$

பொதுவாக $f(x) = (ax + b)$ என்று வரையறுக்கும் சார்புகள் ஒருபடிச் சார்புகளாகும்.

கன வடிவியல்
(Solid Geometry)

முக்கோணம், பலகோணம், வட்டம், இவையெல்லாம் ஒரே தளத்தில் இருப்பதால் இவற்றிலுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, இவற்றின் தளப்பரப்பில் முற்றும் அமைகிறது. இத்தகைய பரப்புத் தளம் பரப்பு எனப்படும். ஆதலால், இவற்றைப்பற்றிய கணிதத்தைத் தளவடிவகணிதம் என்று கூறலாம்.

கூம்பு, ஊசிக் கோபுரம், கனசதுரம், உருளை இவற்றில் இருக்கும் புள்ளிகள் எல்லாம் ஒரு தளத்தில் இருப்பதில்லை. ஆதலால், இவற்றைப்பற்றிய வடிவகணிதத்தைக் கன வடிவ கணிதம் என்போம். இந்த வடிவகணிதத்தை 3-பரிமாணவடிவ கணிதம் என்றும் குறிப்பிடலாம்.

நோக்கம்

(1) விண் வெளியைப்பற்றிய பொதுவான கருத்துகளை வளர்க்கவும், மூன்று பரிமாணத்திலுள்ள பொருள்களைப்பற்றி அறியவும், கற்பனை செய்து பார்க்கவுமான இயல்புகளை மாணவர் பெறுவது இதன் நோக்கங்களாகும்.

(2) 3-பரிமாண வடிவங்களின் தொடர்புகளை அறிவதற்கும் இவற்றைப்பற்றி விளக்குவதற்குப் பயன்படும் கலைச்சொற்களையும் விளக்கப்படங்களையும் புரிந்துகொள்வதற்கும், முடிந்தவரை இயல்பான திறமையை வளர்க்கவும், கீழ்க்கண்ட முறைகளைக் கையாளலாம்:

1. சோதித்தல் (examine)

2. ஒன்றையொன்று ஒத்து நோக்குதல் (comparison)

3. முடிந்தால் மாதிரி வடிவங்கள் செய்தல் (construction of physical models)

4. இயலுருத் தோற்றங்கள் வரைதல் (perspective drawing)

பொதுக் கருத்துகள் : கீழ்க்கண்ட கருத்துகளை மாணவர்கள் அறியும்படி செய்யவேண்டும்.

1. இணைகோடுகள்

2. வெட்டாக் கோடுகள் (skew lines)

3. இணை தளங்கள்

4. தளங்களுக்கு இணையான, செங்குத்தான கோடுகள்

5. கோடுகளுக்கும், தளங்களுக்குமுள்ள இடைக் கோணம்.

6. தளங்களில் கோடுகளின் வீழ்ச்சி (projection)

7. இரண்டு தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் முறை

8. தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்

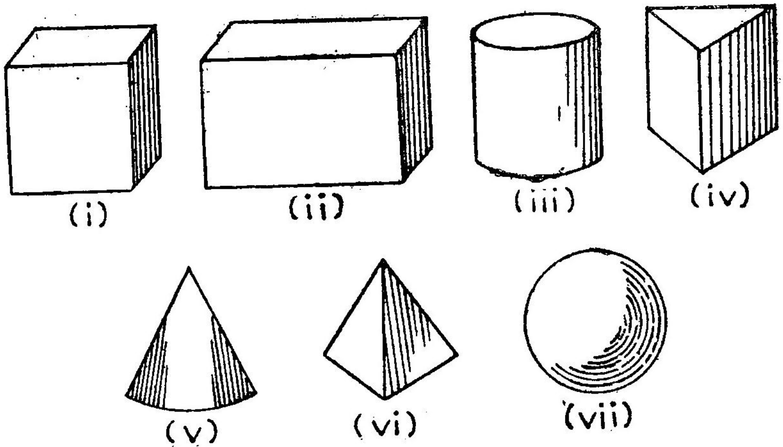
9. செங்குத்தான தளங்கள்

10. சாதாரணக் கனவடிவங்கள்

இவ்வித உருவங்களைப்பற்றியும், இவை அமைக்கப்படும் கருத்துகள்பற்றியும் பல தேற்றங்களை மாணவருக்கு இயல்பான எளிதான முறையில் கற்றுத்தர வேண்டும். மாதிரி வடிவங்களையும் படங்களையும் கொண்டு 3-பரிமாணங்களைப்பற்றிய கருத்துகளை மாணவர்களுடன் கலந்து வாதிட்டு விளக்குவதால் அவர்களுடைய கற்பனையாற்றலையும், புலனுய்வுத் திறனையும் (sense of perception) தெளிவுபடுத்தும் ஏதுவுண்டு.

பல்வேறு அளவுகளைப்பற்றிக் கற்கும்பொழுது, பொதுவாக நாம் தினமும் பார்க்கும் கனவடிவங்களான பட்டகங்கள், உருளைகள், கூம்புகள், கூர்க்கோபுரங்கள், கோளங்கள் போன்ற வடிவங்களின் மேற்பரப்பு, கன அளவு முதலியவற்றிற்கான சூத்திரங்கள் தேவைப்படுகின்றன.

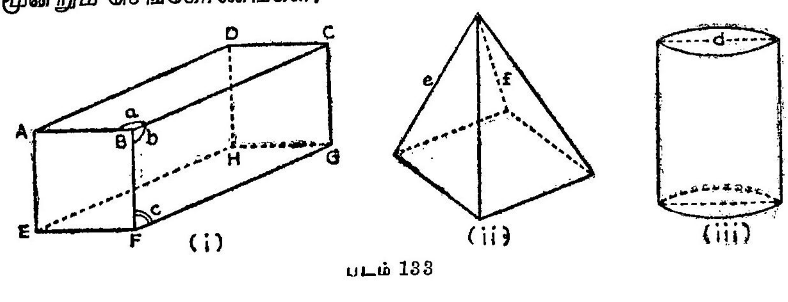
கன வடிவங்களைப் பார்த்து அவற்றின் தோற்றப் படம் வரைவது ஓர் அருந்திறனாகும். உருவங்களின் கோண அளவைகள் முறைப்படி உருத்திரிவு செய்து வரையவும், பக்கங்களையும் விளிம்புகளையும் தகுந்த முறையில் தொலைக் குறுக்க நோக்குடன் (fore shortened) வரையவும் மாணவர்களைப் பழக்க வேண்டும்.



படம் 132

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மூன்று கன உருவங்களையும் உற்றுக்கவனித்தால்,

1. கனச் செவ்வகத்தின், செவ்வகமான பக்கங்கள் (ABCD, EFGH) படத்தில் இணைகரமாகத் தோன்றுகின்றன. ஆகவே, செங் கோணங்கள், குறுங்கோணங்களாகவோ (∟c), விரி கோணங் களாகவோ (∟a, ∟b) தோன்றுகின்றன. ஆனால், ∟a, ∟b, ∟c மூன்றும் செங்கோணங்கள்.



படம் 133

2. பட்டைக் கூம்பின் விளிம்புகள் ஒரே அளவானாலும், படத்தில் 'e', 'f' இரண்டும் ஒரே அளவுடையவையாகத் தோன்ற வில்லை.

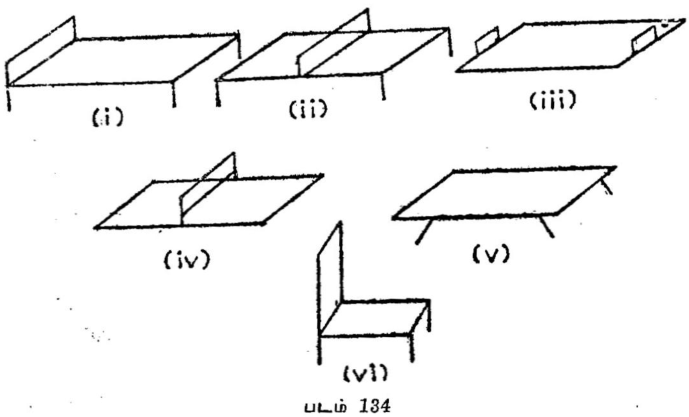
3. உருளையின் மேற்பாகம் 'd' வட்டமாயிருந்தாலும் முட்டை வடிவில் (ellipse) தோன்றுகிறது.

பொதுவாக, இதற்கெல்லாம் ஓவியர் அல்லது கலைஞர்க்குரிய அகத்திற உணர்வு (intuition) அவசியமாதலால், எல்லோரிடமும் எதிர்பார்க்க இயலாது. ஆனால், சித்திரம் வரையும் சில எளிமை யான அடிப்படைத் தத்துவங்களைக் கற்றுக்கொண்டால், சிறிது அக்கறையும் பழக்கமும் இதில் நல்ல பயிற்சியையும், திறமையை யும் வளர்க்கும்.

தத்துவ முறைப்படி எழுதவும் தருக்கிக்கவும் நல்ல அனு பவமும், தகுதியும் உள்ள மாணவர்கள்கூட முப்பரிமாணப் படங்கள் வரைவதில் மிகவும் பின்தங்கியவர்களா யிருப்பதை நாம் கண்கூடாகக் காணலாம். வடிவ கணிதப் பாடத்தில் ஒரு தளத்தில் அமைந்த உருவங்களையும், அவற்றின் வீதப் பொருத்தங்களையும் கற்பது தத்துவ முறைகளில் எப்படிப் பயிற்சி யளிக்கிறதோ அதுபோல் முப்பரிமாணங்களைப்பற்றிப் புல னுணர்வு வளர்வதற்குக் கன வடிவ கணிதம் மிக முக்கியமானது. கனவடிவ கணிதத்தில் தேவைப்படும் எத்தனையோ தத்துவங்கள் தள வடிவகணிதத்தில் கற்கும் தத்துவங்களைச் சார்ந்தே இருக்கும். நேரத்தையும், சிரமத்தையும் முன்னிட்டுப் பல எளிய கருத்துகளை நிரூபிக்காமலே விளங்கும்படி கற்றுக்கொடுக்கலாம்.

வீழ்ச்சிப் படத் தோற்றங்கள் (Pictorial projection)

கன உருவங்களை வரைவது முப்பரிமாணப் பொருள்களைக் கற்பனை செய்வதற்குப் பயிற்சியளிக்கின்றது. கன உருவங்களின் படங்களைப் பார்த்து வரைவதைக் காட்டிலும் இவ் வுருவங்களை

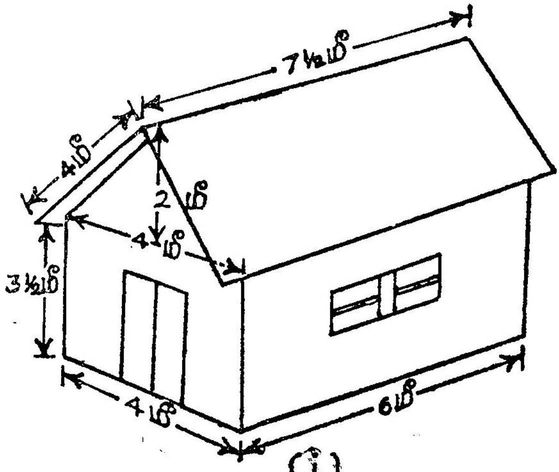


படம் 134

நேரிலே கண்டு அவற்றைப் பார்த்து வரையும் திறனை வளர்த்துக் கொள்ள வேண்டும். இதற்குக் கட்டையினுலோ, அட்டையினுலோ செய்த மாதிரி உருவங்களைப் பயன்படுத்தலாம். சிறு கம்பிகளைப் பயன்படுத்தியும் இவ்விதக் கன உருவங்களின் சட்ட அமைப்புகளைச் (Hollow models) செய்யலாம். மாணவர்களுக்கு நல்ல முறையில் வரையப்பட்ட படங்களைப் பார்க்கும் வாய்ப்புகள் அளிக்கப்பட்டால்தான் நன்ருக வரையும் ஆற்றலும், ஆர்வமும் வளரும்.

முன்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் வடிவங்கள் எவற்றைக் குறிக்கின்றன?

இது போல், மேசை, திறந்துவைத்த புத்தகம் இவற்றை வரைக.

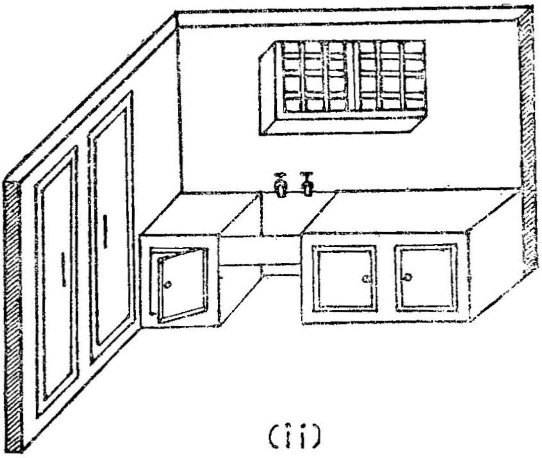


(i)
வீடு

படம் 135 (i)

தினசரித் தாள்களில் வரும் விளம்பரங்களிலிருந்து பல மாதிரியான தோற்றப் படங்கள், கட்டடங்களின் உருவரை (design of a building), சாப்பாட்டு அறை, சமையல் அறை, குளியலறையின் அமைப்பு முறைகள் முதலியவற்றைப் பயன்படுத்தலாம். குறிப்பிட்ட ஒருவகைப் படம் வரையும்போது ஏற்படும் சிக்கல்களை உணர்த்து முறையில் தோராயமாகத் திட்ட உருவரைகள் வரைய

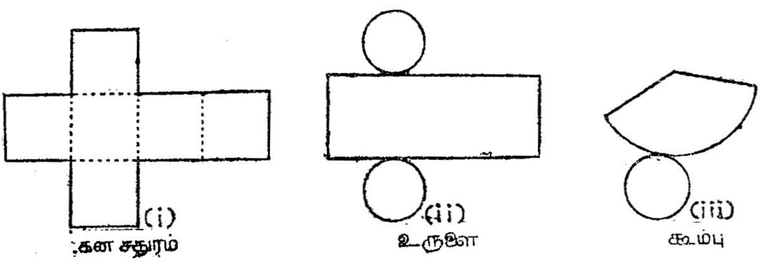
லாம். வரைபடக் காகிதங்களையும் (squared paper) பயன் படுத்தலாம்.



படம் 135 (ii)

உருவத்தில் செயல் விளக்கம் (Development)

கன உருவங்களின் செயல் விளக்கம் அல்லது அமைப்பு முறைப் படம், அந்த உருவத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமான, பரப்பள வுடைய திட்டமிட்டுச் செய்த சமதளப் படமாகும். காகிதம் அல்லது அட்டையிலிருந்து கனவடிவங்களைச் செய்வது மாணவர் களுக்கு உகந்த பொழுதுபோக்காகும்.



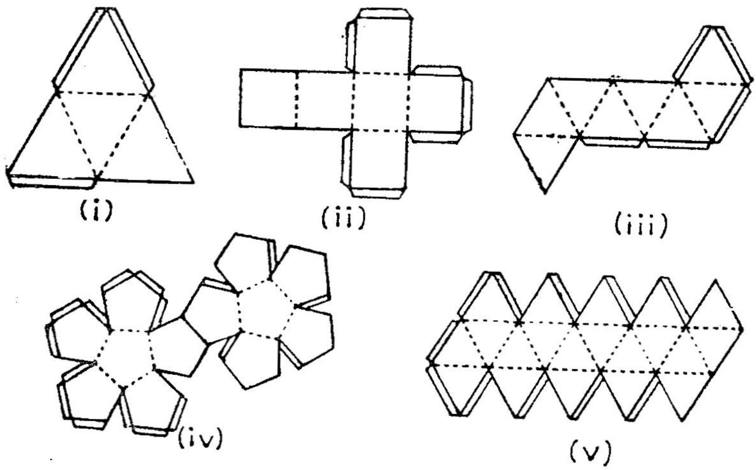
படம் 136

பன்முகத்திண்மங்கள் (Polyhedra)

பல தளங்களால் அடைபட்ட ஓர் உருவத்திற்குப் பல்தளக் கனஉருவம் என்று பெயர், ஒவ்வொரு முகட்டிலும் (vertex)

இணையும் தளங்களின் கோணங்களைப் பன்முகத்திண்மக் கோணங்கள் என்று கூறலாம்.

ஒழுங்கான பல் தளக் கன உருவங்கள்: தளங்கள் எல்லாம் சர்வ சம ஒழுங்குப் பல கோணங்களாயிருந்தால், இதற்கு ஒழுங்குப் பல் தளக் கன உருவம் என்று பெயர். இவற்றின் மொத்த எண்ணிக்கை



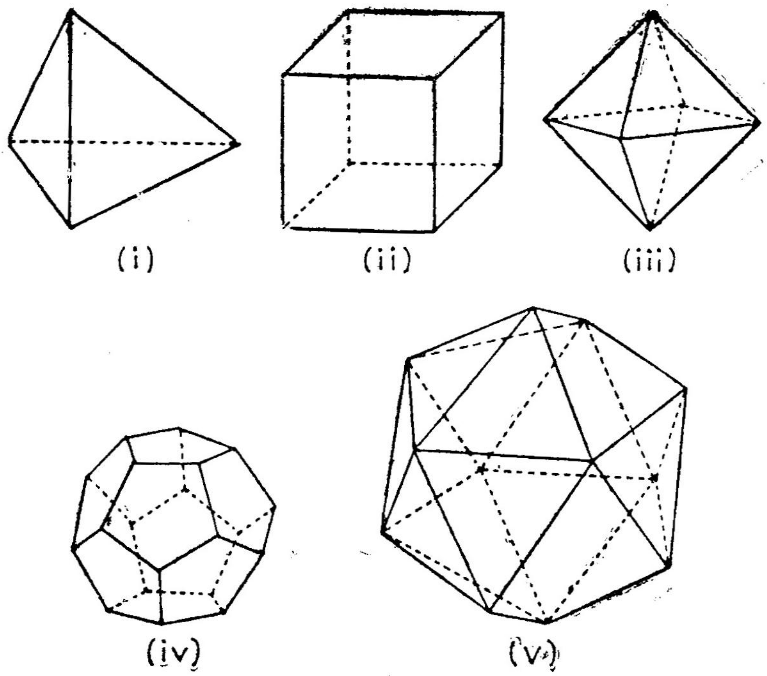
படம் 137

பன்முகத் திண்மங்கள் அமைக்கும் விதம்

5. இவைதாம் ஐந்து பிளேட்டானிக் கன உருவங்கள். பிதாகரஸ் (கி. மு. 550) என்ற கணித மேதையும், அவருடைய சீடர்களும் இந்தக் கன உருவங்களைப்பற்றி அறிந்திருந்ததாகத் தெரிகின்றது. இவற்றைப்பற்றிப் பிளேட்டோவும் (கி. மு. 375) ஆராய்ந்ததால் இவற்றைப் பிளேட்டானிக் கன உருவங்கள் (Platonic solids) என்றும் கூறுவர்.

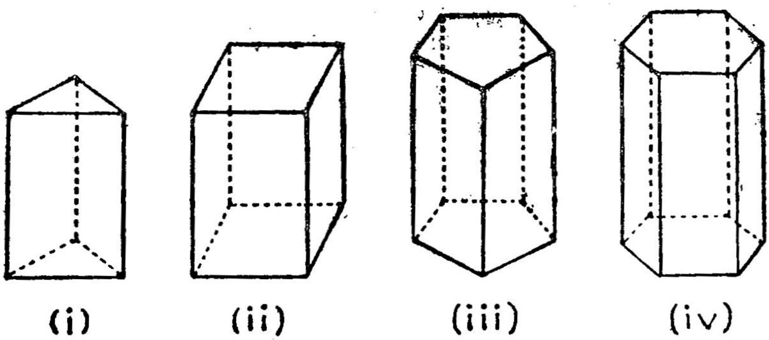
1. நாற்பக்கப் பலதள உருவம் (Tetrahedron)-4 சமபக்க முக்கோணங்களால் ஆக்கப்பட்டது.
2. கனச் சதுரம் (Cube)-6 சதுரங்களால் ஆக்கப்பட்டது.
3. எண் தளக் கன உருவம் — (Octahedron)-8 சமபக்க முக்கோணங்களால் ஆக்கப்பட்டது.
4. பன்னிரண்டு தளக் கன உருவம் — (do-decahedron)— 12 ஒழுங்கு ஐங்கோணங்களால் ஆக்கப்பட்டது.

5. இருபது தளக் கனஉருவம்— (icosahedron)— 20 சமபக்க முக்கோணங்களால் ஆக்கப்பட்டது.



படம் 138

பன்முகத் திண்மங்கள்



படம் 139

பட்டகங்கள்

தேற்றம்

ஐந்து ஒழுங்குப் பலதளக் கனஉருவங்களே இருக்கமுடியும்.

நிரூபணம் : ஒரு முகடு அமையக் குறைந்தது மூன்று தளங்கள் தேவை. ஒழுங்குப் பல தளக் கன வடிவமானதால், இத் தளங்களும் ஒழுங்கான பல கோண வடிவங்களா யிருக்கவேண்டும். இப் பல கோண வடிவங்களுக்குக் குறைந்தது மூன்று சமபக்கங்களாவது இருக்கவேண்டும். மேலும், ஒவ்வொரு முகட்டிலும் இணையும் (பல கோணங்களின்) கோணங்களின் (face angles) கூடுதல் நான்கு செங்கோணங்களுக்குக் குறைந்து இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே, கீழ்க் கண்ட ஐந்து வகை ஒழுங்குக் கன உருவங்களே இருக்க முடியும்.

(a) தளங்கள் எல்லாம் சமபக்க முக்கோணங்களா யிருந்தால்,

(இதில் ஒரு கோணத்தின் மதிப்பு $60°$)

1. மூன்று உச்சிகள் ஒரு முகட்டில் சேர்ந்தால், பக்கத் தளங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் $60° \times 3 = 180°$

2. நான்கு உச்சிகள் ஒரு முகட்டில் சேர்ந்தால், பக்கத் தளங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் $60° \times 4 = 240°$

3. ஐந்து உச்சிகள் ஒரு முகட்டில் சேர்ந்தால், பக்கத் தளங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் $60° \times 5 = 300°$. (ஆறு உச்சிகள் சேர்ந்தால் உருவம் அமைக்க முடியாது.)

(b) தளங்கள் எல்லாம் சதுரங்களாக இருந்தால், (இதில் ஒரு கோணத்தின் மதிப்பு $90°$.)

மூன்று உச்சிகள் ஒரு முகட்டில் சேர்ந்தால் பக்கத் தளங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் $(3 \times 90°) = 270°$

(நான்கு உச்சிகள் சேர்ந்தால் உருவம் அமைக்க முடியாது.)

(c) தளங்கள் எல்லாம் ஒழுங்கான ஐங்கோணங்களாக இருந்தால், மூன்று உச்சிகள் ஒரு முகட்டில் சேர்ந்தால், பக்கத் தளங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் $3 \times 108° = 324°$.

(நான்கு உச்சிகள் சேர முடியாது.)

தளங்கள் ஒழுங்கு அறுகோணங்களாகவோ அதற்கு மேற்பட்டோ இருக்க முடியாது; ஏனெனில், பக்கத் தளங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் 360° அல்லது அதற்குமேல் இருக்கும்.

ஆகவே, ஒழுங்குக் கன உருவங்கள் ஐந்துதான் இருக்கும்.

அயிலரின் சூத்திரம் (Euler's formula)

1. ஒரு பன்முகக் கன உருவத்தில் F, E, V என்பன முறையே தளங்கள், விளிம்புகள், முகடுகள் இவற்றின் எண்ணிக்கையானல் $E+2 = F+V$.

2. இதுபோல் பட்டகத்தின் முகங்களின் எண்ணிக்கை F, விளிம்புகளின் எண்ணிக்கை E, முகடுகளின் எண்ணிக்கை V-யானல் $3V = 2E$; $V+F = E+2$ ஆகும்.

கீழ்ே கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலைக் கவனி. மற்றப் பட்டகங்களுக்கும் கன உருவங்களுக்கும் இந்த விதிகளைச் சரிபார்க்க.

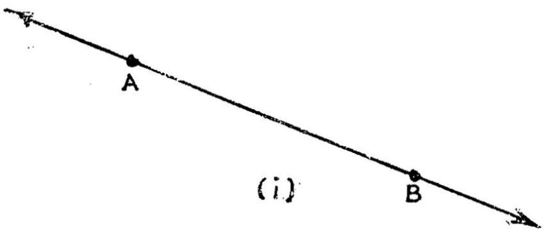
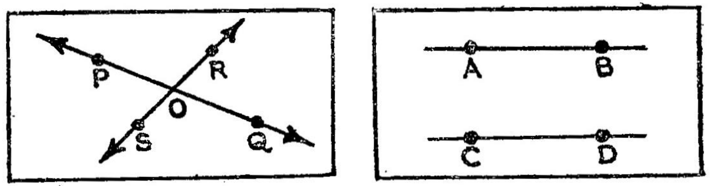
ஒழுங்குக் கன உருவங்கள்

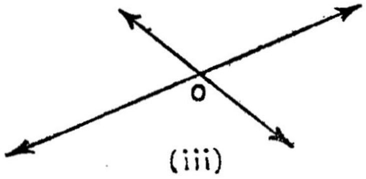
கன உருவம்	V	E	F
நாற்பக்கப் பல தள உருவம்	4	6	4

பட்டகம்

கன உருவம்	V	E	F
முக்கோணப் பட்டகம்	6	9	5

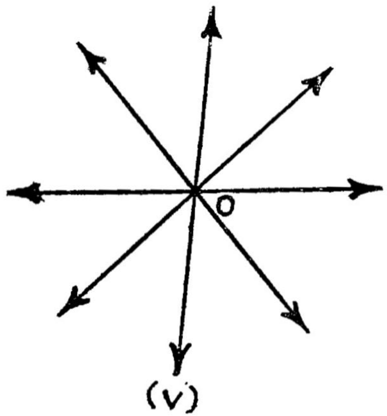
பொதுவாக, கன வடிவ கணிதத்தில் கருத்துகளும் தள வடிவ கணிதத்தில் கருத்துகளும் ஒரே தன்மையுடையவை. கோடு என்பதற்குப் பதில் தளம் என்றும், புள்ளி என்பதற்குப் பதில் கோடு என்றும் மாற்றியமைத்துச் சில கருத்துகளை அறியலாம்.

தளவடிவம்	கனவடிவம்
1. ஒரு நேர்கோட்டை அதிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளால் தீர்மானிக்கலாம்.	ஒரு தளத்தை, வெட்டிக்கொள்ளும் அல்லது இணையான இரண்டு கோடுகளால் தீர்மானிக்கலாம்.
 படம் 140 (i)	 (ii) படம் 140 (ii)
2. இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும்.	இரண்டு தளங்கள் ஒன்றையொன்று ஒரு நேர்கோட்டில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

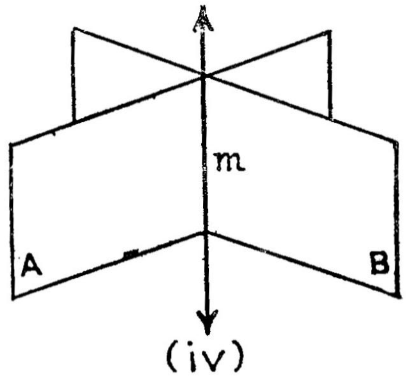


படம் 140 (ii)

3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியின் வழியே எத்தனை நேர்கோடுகளும் வரையலாம்.

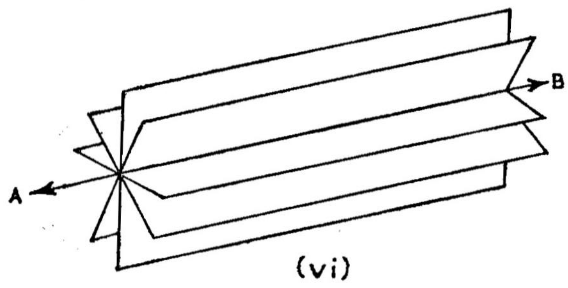


படம் 140 (v)



படம் 140 (iv)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே எத்தனை தளங்களும் வரையலாம்.



படம் 140 (vi)

ஆயினும், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளோ, நேர்கோடுகளோ, ஒரே தளத்தில் இல்லாவிட்டால், தளவடிவ கணிதத்தில் மெய்ப்பித்த எத்தனையோ உண்மைகள் கனவடிவ கணிதத்தில் உண்மையில்லாமல் இருக்கலாம்.

வரிசை மாற்றமும் சேர்மானமும்
(Permutations and Combinations)

சேர்மானம் என்றால் என்ன என்பதை ஓர் உதாரணத்துடன் விளக்குவோம்.

5 மாணவர்களை உறுப்பினராகக்கொண்டு ஒரு கழகம் அமைக்கப்பட்டது. அவர்களை A, B, C, D, E என்று அழைக்கலாம். முதலாவதாகச் சிற்றுண்டி நிலையத்துக்கு ஒரு சிறப்புக் குழு அமைக்க ஏற்பாடாகும்.

மூன்று அங்கத்தினர்களைக் கொண்ட எத்தனை சிறப்புக் குழுக்கள் அமைக்கலாம் என்பது கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

{A,B,C}; {B,C,D}; {C,D,E}; {A,D,E}; {B,D,E}; {A, C, E}; {B, C, E}; {A, B, D}; {A, B, E} {A, C, D} இவற்றில்,

(a) எத்தனை குழுக்களில் D அங்கத்தினர்?

(b) எத்தனை குழுக்களில் B-ம், D-ம் அங்கத்தினர்கள்?

(c) எத்தனை குழுக்களில் A அங்கத்தினர் அல்லர்?

(d) எத்தனை குழுக்களில் A-ம், C-ம் அங்கத்தினர்கள் அல்லர்?

மேலே கூறப்பட்ட தேர்ந்தெடுப்பு முறையைச் சேர்மானம் என்று கூறலாம். கொடுக்கப்பட்ட பல்வேறு பொருள்களிலிருந்து சில பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு இம் முறை பெரிதும் பயன்படுகின்றது. இந்த உதாரணத்தை, மேலும் ஆராயலாம். ஐந்து மாணவர்களிலிருந்து மூன்று பேரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் ஒவ்வொரு முறையும், இருவரை விட்டுவிடுகிறோம். இப்படி விட்டு விடப்பட்ட இருவரையும்கொண்டு மற்றொரு குழு அமைப்பதாகக் கொண்டால், மூன்று பேர் கொண்ட குழு எத்தனை அமைக்க முடியுமோ அத்தனை, இரண்டு பேர் கொண்ட குழுவை அமைக்க முடியும் என்பதைக் காணலாம்.

உதாரணமாக {E, B, C} மூன்று பேர் கொண்ட ஒரு குழு வானுல், {A, D} இரண்டு பேர் கொண்ட ஒரு குழு ஆகும். ஆகவே, மூன்று பேர் கொண்ட 10 குழுக்கள் அமைக்கமுடியுமானுல் இரண்டு பேர் கொண்ட குழுக்கள் பத்தே ஆகும்.

உதாரணம் : ஒரு குழுவின் உறுப்பினர்கள் {அமிதாப், பாபு, சித்ரா, டேவிட், கீதா} என்ற ஐந்து பேர். இதில் நான்கு பேர் கொண்ட ஒரு சிறப்புக் குழுவின் உறுப்பினர்கள் {அமிதாப், பாபு, சித்ரா, டேவிட்} ஆகியவர்கள்.

1. இதுபோல் நான்கு பேர் கொண்ட வேறு குழுக்களேயும் பட்டியல் படுத்து.

2. நான்கு பேரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது ஒவ்வொரு முறையும் ஒருவர் விட்டுப் போவார் அல்லவா? இவ்விதம் விட்டுப் போகும் ஒருவரைக் கொண்ட எத்தனைக் குழுக்கள் அமைக்கலாம்?

இப்போது, ஐந்து பேர் கொண்ட இக் குழுவில் எத்தனை சிறப்புக் குழுக்கள் அமைக்கலாம் என்று பார்ப்போம்.

ஐந்து பேர்களேயும் கொண்ட குழு	1
4 பேர்கள் கொண்ட குழு	5
3 பேர்கள் கொண்ட குழு	10
2 பேர்கள் கொண்ட குழு	10
ஓர் உறுப்பினர் உள்ள குழு	5

உறுப்பினரே இல்லாத குழு ஒன்றை நாமாகக் கற்பனை செய்தால் இப்படிப்பட்ட குழுவும் ஒன்று சாத்தியமாகும். ஆகவே, உறுப்பினரே இல்லாத வெற்றுக் குழு 1.

உறுப்பினர்கள் எண்ணிக்கையின் வரிசைப்படி இந்தக் குழுக்களை அமைத்தால், இவை,

1 5 10 10 5 1.

இதே போல், (1) நான்கு பேர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து வெற்றுக் குழு ஒன்று, இரண்டு, மூன்று, நான்கு உறுப்பினர்கள் கொண்ட உட்குழுக்களின் எண்ணிக்கை.

1 4 6 4 1,

(2) மூன்று பேர் கொண்ட குழுவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கச் சாத்தியமான உட்குழுக்களின் எண்ணிக்கை

1 3 3 1.

(3) இரண்டு பேர் கொண்ட குழுவின் உட்குழுக்களின் எண்ணிக்கை 1 2 1.

(4) ஒருவர் உள்ள குழுவின் உட்குழுக்களின் எண்ணிக்கை

1 1.

இவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரிசைப்படுத்தலாம்.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

இப்படி முக்கோண வடிவில் ஒழுங்குபடுத்தி அமைக்கும் முறையைப் பாஸ்கல் (Pascal) என்ற ஃபிரஞ்சுக் கணித மேதை கண்டுபிடித்ததால் இதற்குப் பாஸ்கல் முக்கோணம் என்று பெயர்.

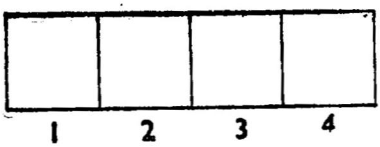
வரிசை மாற்றம்

மேற்கூறிய உதாரணத்தில் {B, D, E} என்பது மூன்று பேர் கொண்ட ஏதாவது ஓர் உட்குழு எனக்கொள்வோம். இவர்களில் ஒருவருக்குத் தலைவர் பதவியும், மற்றொருவருக்குச் செயலாளர் பதவியும், மூன்றாமவருக்குப் பொருளாளர் பதவியும் கொடுக்கப் பட்டால், எத்தனை விதங்களில் இந்த வேலைகளை உறுப்பினர் B, D, E முதலியவர்களிடம் ஒப்படைக்கலாம் என்று பார்ப்போம். B, D, E ஐத் தலைவர், செயலாளர், பொருளாளர் என்ற வரிசையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டபடி பட்டியல் படுத்தலாம்.

தலைவர்	செயலாளர்	பொருளாளர்
B	D	E
D	E	B
E	B	D
B	E	D
D	B	E
E	D	B

இவ்வாறு ஆறு விதமான முறையில் இவர்கள் இம் மூன்று வேலையையும் பகிர்ந்து கொள்ளலாம். இப்படிப் பலவிதமாக மாற்றியமைத்தலை வரிசைமாற்றம் என்று கூறலாம். அதாவது, வெவ்வேறான (different) மூன்று பொருள்களை, வெவ்வேறான 6 முறைகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

மற்றொரு உதாரணத்தையும் நோக்குவோம். A, B, C, D என்ற நான்கு பேர் ஒரு விருந்திற்கு அழைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். இவர்களுக்காக நான்கு நாற்காலிகள் போடப்பட்டிருக்கின்றன. முதல்நாற்காலியில் நால்வரில் யாராவது ஒருவர் உட்காரலாம். அதாவது, இந்த நாற்காலியை நான்கு முறையில் நிரப்பலாம். இதில் ஒருவர் அமர்ந்தபின், மீதி மூவரில் யாராவது ஒருவர் இரண்டாம் நாற்காலியில் அமரலாம். அதாவது, இரண்டாம் நாற்காலியை மூன்று முறைகளில் நிரப்பலாம். ஆனால், முதல் நாற்காலியை நிரப்பும் ஒவ்வொரு முறையும் இரண்டாவது நாற்காலியை மூன்று விதமாக நிரப்பலாம். ஆகவே, முதலிரண்டு நாற்காலிகளையும் 4×3 வெவ்வேறு விதங்களில் நிரப்பலாம். இப்போது, மூன்றும் நாற்காலியில் மீதியுள்ள இருவரில் ஒருவர் உட்காரலாம். அதாவது, மூன்றும் நாற்காலியை இரண்டு முறைகளில் நிரப்பலாம். முதல் இரண்டு நாற்காலிகளை நிரப்பும் ஒவ்வொரு முறையும் மூன்றும் நாற்காலியை இரண்டு விதங்களில் நிரப்பலாம். அதாவது, மூன்று நாற்காலிகளையும் $4 \times 3 \times 2$ விதங்களில் நிரப்பலாம். நான்காம் நாற்காலியை மீதியுள்ள ஒருவர் ஒரே முறையில்தான் பயன்படுத்த முடியும். ஆகவே, நான்குபேர், நான்கு நாற்காலிகளில் $4 \times 3 \times 2 \times 1 = \lfloor 4 = 24$ விதங்களில் உட்காரலாம். இப்போது, வரிசை மாற்றம்பற்றிய இரண்டு தேற்றங்களைப் பார்க்கலாம்.



படம் 141

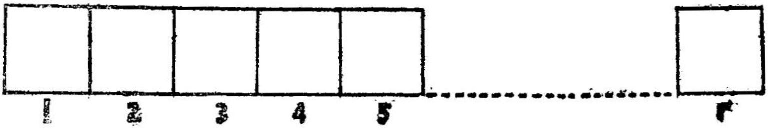
தேற்றம் 1.

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு செயல்களில் ஒன்றை 'm' விதங்களிலும், மற்றொன்றை 'n' விதங்களிலும் செய்ய முடியுமானல் இரண்டையும் $m \times n$ விதங்களில் செய்யலாம்.

முதல் செயலைச் செய்யும் ஒவ்வொரு முறையும், இரண்டாவது செயலை 'n' விதங்களில் செய்யலாம். ஆகவே, இரு செயல்களையும் $m+n$ விதங்களில் செய்யலாம்.

தேற்றம் 2.

வெவ்வேறு விதமான 'n' பொருள்களில் ஏதாவது 'r' பொருள்களை எடுத்து $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ விதங்களில் வரிசைப்படுத்தலாம்.



படம் 142

காலியான 'r' இடங்களில் 'n' பொருள்களை எத்தனை விதத்தில் வைக்கமுடியும் என்பதற்கு இதை ஒப்பிடலாம். முதல் இடத்தை 'n' விதங்களில் நிரப்பலாம். இதை நிரப்பிய பின் இரண்டாம் இடத்தை $(n-1)$ விதங்களில் நிரப்பலாம். ஆகவே, முதல் இரண்டு இடங்களையும் $n(n-1)$ விதங்களில் நிரப்பலாம்.

முதல் இரண்டு இடங்களையும் நிரப்பியபின், மூன்றும் இடத்தை $(n-2)$ விதங்களில் நிரப்பலாம். ஆகவே, முதல் மூன்று இடங்களையும் $n(n-1)(n-2)$ விதங்களில் நிரப்பலாம். முதல் நான்கு இடங்களையும் $n(n-1)(n-2)(n-3)$ விதங்களில் நிரப்பலாம். இவ்வாறே, கொடுத்திருக்கும் 'r' இடங்களையும்

$n(n-1)(n-2)\ldots\;(n-\overline{r-1}$ அல்லது,

$n(n-1)(n-2)\;\ldots\;n-r+1$ விதங்களில் நிரப்பலாம். இதை nP_r என்று குறித்தால்,

$$\underline{nP_r = n\;(n-1)\;\;(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)\;\;(n-r+1)}$$

ஆகவே, வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

குறிப்பு

1\. 'r' பொருள்கள் 'n' பொருள்களிலிருந்து எடுக்கப்படுவதால், r-ன் அளவு n-க்குச் சமமாகவோ, n-ஐ விடக் குறைவாகவோதான் இருக்க முடியும்.

2\. $r=n$ ஆனல்

$$nP_r = nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-n+2)(n-n+1$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2\cdot 1$$

அதாவது $nP_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots (n-1)\cdot n$. இதை n—காரணியம் என்று கூறலாம்; இது $\lfloor n$ அல்லது $n!$ என்று குறிக்கப்படுகின்றது.

$$\therefore \quad 1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots (n-1)\cdot n = \lfloor n$$

3. கொடுக்கப்பட்ட வெவ்வேறான 'n' பொருள்களை $\lfloor n$ விதங்களில் வரிசைமாற்றம் செய்யலாம்.

பயிற்சி

1. மதிப்புக் காண்க: $6!$, $5! \times 6$, $5P_3$, $4P_2$

2. பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் 6-வது, 7வது வரிசைகளை எழுது.

வரிசை மாற்றம்—பொதுச் சூத்திரம்: நிரூபித்தபடி

$$nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$$

இதை $(n-r)(n-r-1)\ (n-r-2)\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1$ஆல் பெருக்கி வகுத்தால்,

$$nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-r-1)(n-r)}$$

$$nP_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$$

பயிற்சி

ஒரு தொலைபேசியின் சுழல் வட்டில் (dial) 0 முதல் 9 வரையுள்ள பத்து இலக்கங்களுக்கும் இடங்கள் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

(a) இலக்கங்கள் திரும்பத் திரும்ப வராதபடி ஐந்து இலக்கத் தொலைபேசி எண்கள் எத்தனை அமைக்க முடியும்?

(b) இலக்கங்கள் வரையறையின்றி எடுக்கலாமென்றால் ஐந்து இலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்க முடியும்? (பூச்சியம் இலக்கத்தின் ஐந்தாவது இடத்தில் வராது.)

சேர்மானம் (Combination)

கொடுக்கப்பட்ட 'n' பொருள்களிலிருந்து 'r' பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது 'n' உறுப்புகளைக்கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து, வரிசை (order) நோக்காது 'r' உறுப்புகளைத் தேர்ந்

தெடுப்பதற் கொப்பாகும். இதன் மொத்த எண்ணிக்கையை

nC_r அல்லது $\binom{n}{r}$ என்று குறிக்கலாம்.

ஐந்து பேர் கொண்ட மாணவர் குழுவிலிருந்து மூன்று பேர் கொண்ட உட்குழு அமைத்ததும், இது போன்ற சேர்மானமே. இதை, n-கணத்தின், r-உட்கணமாகக் கொள்ளலாம்.

பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் ஐந்தாவது வரிசையிலிருந்து,

$$5C_0 = 1, \quad 5C_1 = 5, \quad 5C_2 = 10 \quad 5C_3 = 10$$

$$\therefore \quad 5C_0 = 1 = 5C_5$$

$$5C_1 = 5 = 5C_4$$

$$5C_2 = 10 = 5C_3$$

இதுபோல் 6-ன் சேர்மானங்களைப் பட்டியல் படுத்தியுள்ளதைக் காண்க.

$$6C_0 = 1 = 6C_6$$

$$6C_1 = 6 = 6C_5$$

$$6C_2 = 15 = 6C_4$$

$$6C_3 = 20 = 6C_3$$

கொடுக்கப்பட்ட 10 பொருள்களில் ஏழின் சேர்மானம்

$$10\, C_7 = 10C_3$$

மேலும் இரண்டு சேர்மான விதிகளைக் காணலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட 'n' பொருள்களின் 'r' சேர்மானம்

1. $nC_r = nC_{n-r}$
2. $r \cdot nC_r = n.\ \overline{n-1}\, C_{\overline{r-1}}$

கொடுக்கப்பட்ட பொருள்களை a, b, c, d...என்று n எழுத்துகளாகக் கொண்டால், இவற்றின் nC_r சேர்மானங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் 'r' எழுத்துகள் இருக்கும், ஆகவே, மொத்தச் சேர்மானங்களிலும் உள்ள எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை $r \cdot nC_r$ ஆகும்.

சேர்மானங்களிலுள்ள மொத்த எழுத்துகளின் எண்ணிக்கையை வேறு விதமாகவும் கணிக்கலாம்.

சேர்மானங்களில் ஒவ்வொரு எழுத்தும் x முறைகள் வரும் என்று கொண்டால், இருக்கும் 'n' எழுத்துகளும் nx முறைவரும்.

'a' வரும் சேர்மானங்களைக் கணிக்க, 'a' ஐத் தனியே எடுத்து விட்டு மிஞ்சிய $(n-1)$ எழுத்துகளிலிருந்து $(r-1)$ பொருள்களைச் சேர்மானம் செய்தால் $n-1C_{r-1}$ என்று வரும். இதில் ஒவ்வொரு சேர்மானத்திலும் a ஐச் சேர்த்தால் கிடைப்பது 'a' வரும் சேர்மானங்கள். இதுபோல் b, c...முதலிய 'n' எழுத்துகளில் ஒவ்வொன்றும் $n-C_{r-1}$ முறை வரும். ஆகவே, மொத்த எழுத்துகள் $n \cdot n-1\ C_{r-1}$

$$\text{அதாவது } r \cdot nC_r = n \cdot \overline{n-1}\ C_{\overline{r-1}}$$

வெவ்வேறான 'n' பொருள்கள் கொடுக்கப்பட்டால் இதில் 'r' பொருள்களின் வரிசைமாற்றம் $nPr = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறும் கணிக்கலாம்.

இந்த 'n' பொருள்களில், ஒவ்வொரு முறையும் 'r' பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுத்து (மொத்தம் nC_r சேர்மானங்கள்) இப்படிப் பட்ட சேர்மானம் ஒவ்வொன்றையும் வரிசைமாற்றம் செய்தால் ($\lfloor r$ வரிசை மாற்றங்கள்) கிடைக்கும் மொத்த எண்ணிக்கை nP_r ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } nP_r = nC_r \cdot \lfloor r$$

$$\therefore\ nC_r \cdot \lfloor r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} \qquad \left(\therefore\ nP_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}\right)$$

$$\text{அதாவது } nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \cdot \lfloor n-r}$$

$$\text{அல்லது } nC_r = \frac{nP_r}{\lfloor r}.$$

$$\text{மேலும், } nC_r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r\,(r-1)\,(r-2)\ldots\ldots(3\cdot 2\cdot 1)}$$

$$= \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{(r-1)\,(r-2)\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1)}$$

$$= \frac{n}{r} \cdot \overline{n-1}\ C_{r-1}$$

$$\therefore\ r \cdot nC_r = n \cdot \overline{n-1}\ C_{r-1}$$

உதாரணம்

$\overline{n+1}\ C_r = nC_r + nC_{r-1}$ என்று நிரூபி.

$$n+1\ C_r = \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \ \lfloor n+1-r}$$

$$nC_r + nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \ \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \cdot \lfloor n-r+1}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \cdot \lfloor n-r} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \cdot \lfloor n-r} \cdot \frac{n-r+1+r}{r\,(n-r+1)}$$

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \cdot \lfloor n-r} \cdot \frac{(n+1)}{r\,(n-r+1)} = \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \cdot \lfloor n-r+1}$$

மடக்கை
(Logarithm)

கணிப்பு முறைகளில் மடக்கையின் இன்றியமையாமையை முன்னிட்டு, இவற்றைப் பயன்படுத்தும் விதத்தைப்பற்றிய ஆழ்ந்த அறிவு வரும்வகையில் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியளிக்க வேண்டியது, ஆசிரியருடைய தலையாய கடமைகளில் ஒன்று. மடக்கை வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி மிகக் கடினமான கணிப்புகளையும் சுலபமாகச் சீக்கிரத்தில் செய்ய முடியும் என்ற உண்மை, மாணவருக்கு இப் பாடத்தில் ஆர்வத்தையும், ஆசையையும் தூண்டும். மடக்கைகளின் பயனைப்பற்றிக் கண்டுபிடித்தவர் ஜான் நேப்பியர் (1550—1617) என்ற கணித மேதையாவார்.

மடக்கை முறைகளை மாணவர்களுக்கு இரண்டு விதங்களில் கற்றுத்தரலாம். (1) மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இயந்திரத் தன்மையாக, பெருக்கல், வகுத்தல் முதலிய கணிப்புகளைச் செய்யும் முறையை மட்டும் கற்பித்தல்; (2) அல்லது, இதன் அடிப்படைக் கொள்கைகளை அடுக்குக்குறிகளின் நான்கு விதிகளைப் பயன்படுத்திக் கற்றுக்கொடுத்தல் (அடுக்குக் குறிகளின் விதிகள்

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$, (ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^0 = 1$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$, (iv) $(ab)^n = a^n b^n$)

அடிப்படைத் தத்துவங்களைப் பற்றி ஆராயலாம்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட 10-ன் அடுக்குகளைக் கவனிக்க.

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

$10^4 = 10000$

10-ன் அடுக்குகளான 0, 1, 2, 3, 4 முறையே 1, 10, 100, 1000, 10000 முதலிய எண்களின் மடக்கைகளாகும் (log); பத்தானது மடக்கையின் அடிஎண் (base) எனப்படும். இவற்றில் அடியெண் பத்தானால் 1000-ன் மடக்கை 3.

இதை $\log_{10} 1000 = 3$ எனலாம். ஏனெனில் $10^3 = 1000$.

இதுபோல் $2^5 = 32$.

∴ அடியெண் 2ஆனால் 32-ன் மடக்கை 5; $\log_2 32 = 5$. $4^3 = 64$. அதாவது, அடியெண் 4ஆனால் 64-ன் மடக்கை 3, $\log_4 64 = 3$.

$3^4 = 81$. அதாவது, அடியெண் 3ஆனால் 81-ன் மடக்கை 4, $\log_3 81 = 4$

$5^3 = 125$, அதாவது, அடியெண் 5ஆனால் 125-ன் மடக்கை 3, $\log_5 125 = 3$.

வரையறை (Definition)

N என்னும் எண்ணை $N = a^x$ என்று எழுதினால், x என்பது a-ஐ அடியெண்ணாகக் கொண்ட N-ன் மடக்கை.

எந்த எண்ணையும் அடியெண்ணாகக் கொள்ளலாம் என்பதை மேலே கொடுக்கப்பட்ட உதாரணங்கள் மூலம் அறியலாம். ஆனால், கணிப்பு முறைகளில் 10ஐ அடியாகக்கொண்டு மடக்கையைப் பயன்படுத்துவது எளிதாயிருப்பதால் அதுவே அடியெண்ணாகப் பயன்பட்டு வருகின்றது. இதைப் பொது மடக்கை (Common logarithm) என்று கூறலாம். வேறு அடியெண்களைப் பயன்படுத்தாததால், அடியெண்ணைப்பற்றி ஒவ்வொரு முறையும் குறிப்பிடுவதில்லை.

மடக்கை ஓர் அடுக்குக் குறி (index). ஆதலால், இதன் விதிகள் அடுக்குக் குறிகளின் விதிகளைச் சார்ந்தே இருக்கின்றன.

குறிப்பு : 1) பூச்சியத்தைத் தவிர வரைநிலையெண்கள் (finite numbers) எல்லாவற்றின் பூச்சிய அடுக்கும் ஒன்று ஆகும்.

$$a_0 = 1$$

$$\therefore \log_a 1 = 0 \qquad a \neq 0$$

அதாவது, அடியெண் எதுவாயிருந்தாலும் 1-ன் மடக்கை பூச்சியமாகும்.

2) $a = a^1$ என்பது எந்த எண்ணுக்கும் பொருந்தும் ($a \neq 0$). ஆகவே, அடியெண் எதுவாயிருந்தாலும் அதே எண்ணின் மடக்கை 1 ஆகும்.

அதாவது, $\log_a a = 1$.

மடக்கையின் விதிகள்

1. முதல் விதி

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$x = a^m$, $y = a^n$ என்க.

$$\log_a x = m \text{ ——(1)} \qquad \log_a y = n \text{ ——(2)}$$

ஆனல், $xy = a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$\therefore \log_a xy = m + n$$

$$\underline{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

2. இரண்டாம் விதி

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$x = a^m$, $y = a^n$ என்க.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ஆகவே, $\log_a \frac{x}{y} = m - n$

$$\underline{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

3. மூன்றும் விதி

$\log_a x^p = p \log_a x$

$x = a^m$ என்க.

$x^p = (a^m)^p = a^{mp}$

$\therefore \log_a x^p = p.m$

$\log_a x^p = p.\log_a x$

4. நான்காம் விதி (அடியெண் மாற்றம்)

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ அல்லது $\log_a x \times \log_b a = \log_b x$

$\log_a x = p$ என்க.

$\therefore a^p = x$

அடியெண் b-க்கு மடக்கை எடுத்தால்

$\log_b a^p = \log_b x$

(i.e.) $p.\log_b a = \log_b x$

$\therefore p = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ ஆனல், $p = \log_a x$

$\therefore \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

குறிப்பு : மேற்கண்ட விதியில்

$x = b$ ஆனல்

$\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a}$ ஆனல் $\log_b b = 1$

$\therefore \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ அல்லது $\log_b a \times \log_a b = 1$

உதாரணங்கள்

$\log 12 = \log (4 \times 3) = \log 4 + \log 3$ (முதல் விதி)

$\log 70 = \log (7 \times 10) = \log 7 + \log 10$ (முதல் விதி)

$= \log 7 + 1$

$$\log \tfrac{5}{3} = \log 5 - \log 3 \text{ (இரண்டாம் விதி)}$$

$$\log \tfrac{1}{5} = \log 1 - \log 5 \text{ (இரண்டாம் விதி)}$$

$$= 0 - \log 5$$

$$= -\log 5$$

$$\log \left[\frac{3^4 \times 2^3 \times 5^2}{7^3}\right] = \log (3^4 \times 2^3 \times 5^2) - \log 7^3$$

(இரண்டாம் விதி)

$$= \log 3^4 + \log 2^3 + \log 5^2 - \log 7^3 \text{ (முதல் விதி)}$$

$$= 4 \log 3 + 3 \log 2 + 2 \log 5 - 3 \log 7 \text{ (மூன்றும் விதி)}$$

பொது மடக்கை (Common logarithm)

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியலைக் கவனிக்க (அடியெண் அல்லது பீடம் 10ஆக எடுத்துக்கொள்வது பொது மடக்கை எனப்படும்).

$10^0 = 1$	$\therefore \log 1 = 0$		
$10^1 = 10$	$\therefore \log 10 = 1$	$10^{-1} = \cdot 1$	$\therefore \log \cdot 1 = -1$
$10^2 = 100$	$\therefore \log 100 = 2$	$10^{-2} = \cdot 01$	$\therefore \log \cdot 01 = -2$
$10^3 = 1000$	$\therefore \log 1000 = 3$	$10^{-3} = \cdot 001$	$\therefore \log \cdot 001 = -3$
$10^4 = 10{,}000$	$\therefore \log 10{,}000 = 4$	$10^{-4} = \cdot 0001$	$\therefore \log .0001 = -4$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து, 1-க்குமேல், 10-க்குக் கீழ் உள்ள எண்களின் மடக்கை பூச்சியத்திற்கும் 1-க்கும் மத்தியிலிருக்கும்—அதாவது, ஒரு பின்னம் என்று அறியலாம். மேலும், ஓர் எண்ணைப் பத்தின் முழு மடங்காகக் கூற முடியாவிட்டால் அதன் மடக்கை முழு எண்ணுயிராமல் முழு எண்ணும் பின்னமும் சேர்ந்த கலப்பெண்ணுயிருக்கும். இதில் முழு எண் பாகத்திற்கு மடக்கையின் நேர்கூறு என்றும், பின்ன பாகத்திற்கு மடக்கையின் பதின்மானக் கூறு என்றும் பெயர். கொடுக்கப்பட்ட எண் N என்று கொண்டால்,

மடக்கை $1 < N < 10 = 0 +$ பின்னம்

,, $10 < N < 100 = 1 +$,,

,, $100 < N < 1000 = 2 +$,,

மடக்கையின் 'நேர்கூறு' காணுதல் : உதாரணமாக, 7·654 என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொண்டால், இது 1-க்கும் 10-க்கும் இடையிலுள்ளது; இதன் மடக்கை ஒரு பின்னம். ஆகவே, மடக்கையின் நேர்கூறு பூச்சியம். இதேபோல், 26.8 என்ற எண்

10-க்கும் (10^1), 100-க்கும் (10^2) இடையிலுள்ளது. இதன் மடக்கை 1-க்கும் 2-க்கும் இடையிலிருக்கும். ஆகவே, மடக்கையின் நேர்கூறு 1. 382·4 என்ற எண் 100-க்கும் (10^2), 1000-க்கும் (10^3) இடையிலுள்ளது. இதன் மடக்கை 2-க்கும் 3-க்கும் இடையிலிருக்கும். ஆகவே, மடக்கையின் நேர்கூறு 2. இதைக் கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியல்படுத்தலாம்.

log 7·654 :	மடக்கையின்	நேர்கூறு	0
log 26·8 :	,,	,,	1
log 382.4 :	,,	,,	2
log 7654·25:	,,	,,	3

அதாவது, மடக்கையின் நேர்கூறின் அளவு, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் முழுப் பாகத்திலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று குறைவு.

பின்னங்களின் மடக்கை

log 1 = 0 என்று பார்த்தோம். பின்னங்கள் எல்லாம் 1ஐ விடக் குறைவானதால் அவற்றின் மடக்கைகள் பூச்சியத்தை விடக் குறைந்தவை. அதாவது, எதிர்மறை எண்கள் (negative numbers). உதாரணமாக,

$$\log .78 = \log \frac{7\cdot8}{10}$$

$$= \log (10^{-1} \times 7\cdot8)$$

$$= \log 10^{-1} + \log 7\cdot8$$

$= -1 +$ ஒரு நேர்பின்னம் (positive fraction).

இதேபோல்,

$$\log \cdot078 = \log \frac{7\cdot8}{100}$$

$= -2 +$ ஒரு நேர்பின்னம்

$\log \cdot0078 = \log \dfrac{7\cdot8}{1000} = -3 +$ ஒரு நேர்பின்னம்.

விதி: அதாவது, பின்னத்தின் மடக்கையில் (1) நேர்கூறு எப்போதும் எதிர்மறை எண்ணுயிருக்கும். (2) இதன் அளவு,

பின்னத்தின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைவிட ஒன்று அதிகம்.

உதாரணங்கள்

log ·067 : மடக்கையின் நேர்கூறு −2. இதை $\bar{2}$ என்று எழுதுவது வழக்கம்; இதை 'பார் 2' (bar 2) என்று கூறவேண்டும்.

log (·005): மடக்கையின் நேர்கூறு $\bar{3}$ (bar 3).

log (·00028): ,, ,, $\bar{4}$ (bar 4).

log (·942): ,, ,, $\bar{1}$ (bar 1).

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் எண்களையும் அவற்றின் மடக்கைகளையும் கவனிக்க :

$$\log 93400 = \log (9{\cdot}34 \times 10^4) = 4 + \log 9{\cdot}34$$

$$\log 934 = \log (9{\cdot}34 \times 10^2) = 2 + \log 9{\cdot}34$$

$$\log {\cdot}934 = \log (9{\cdot}34 \times 10^{-1}) = \bar{1} + \log 9{\cdot}34$$

$$\log {\cdot}000934 = \log (9{\cdot}34 \times 10^{-4}) = \bar{4} + \log 9{\cdot}34$$

மேற்கண்ட உதாரணத்திலிருந்து 93400, 934, ·934, ·000934 என்ற எண்களின் மடக்கைகள் எல்லாம் 9·34-ன் மடக்கையின் நேர்கூறிலிருந்து மட்டிலும் மாறுபடுகின்றனவேயன்றி, பின்ன பாகம் எல்லா எண்களின் மடக்கைகளுக்கும் ஒன்றுயிருப்பதைக் காணலாம்; ஆகவே 9, 3, 4 இவற்றிற்குச் சிறப்பு இலக்கங்கள் (significant figures) என்று பெயர்.

மடக்கை அட்டவணையின் பயன்கள்: பெருக்கல், வகுத்தல், வருக்க மூலம் காணுதல், எண்களின் மடங்குகளைக் காணுதல் போன்ற கணக்குகளை எளிதாகவும் வேகமாகவும் செய்வதற்கு மடக்கை முறைகள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

நான்கு இலக்கங்களுக்கு மேற்படாத எண்கள் எல்லாவற்றிற்கும் மடக்கை கணிக்கும் விதத்தில், மடக்கைகள் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. நான்கு இலக்கங்களுக்கு மேலுள்ள எண்களை நான்கு இலக்கங்கள் சுத்தமாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். முன்பு கூறியபடியே, மடக்கையின் பின்ன பாகம் (mantissa) எப்போதும் நேர்மறை எண்ணாக இருக்கும்; நேர்கூறுகள், நேர் மறை அல்லது எதிர்மறை முழு எண்களாக இருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உதாரணத்தை நோக்குக.

எண்			மடக்கை
36453	தோராயமாக	36450	4·5617
36·453	,,	36·45	1·5617
3·6448	,,	3·645	0·5617
0·36451	,,	0·3645	$\bar{1}$·5617
0·36448	,,	0·03645	$\bar{2}$·5617

எதிர்மடக்கை (Anti logarithm): கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் மடக்கையை அட்டவணையிலிருந்து காணலாம். அதுபோல் ஓர் எண்ணின் மடக்கை தெரிந்தால் அந்த எண்ணை 'எதிர்மடக்கை' அட்டவணையிலிருந்து காணலாம். இதிலும் நான்கு இலக்கங்களுள்ள எண்களுக்கு எதிர்மடக்கை காண முடியும். பின்ன பாகத்திற்கான எதிர்மடக்கை மட்டிலும் இதில் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். நேர்கூறுகளின் அளவுப்படி இதற்கான எண்ணைக் கணிக்க வேண்டும். உதாரணமாக, 1·5617-க்கு எதிர்மடக்கை காணவேண்டுமானால், அட்டவணையிலிருந்து ·5617-ன் எதிர் மடக்கை 3645 என்று கிடைக்கும். நேர்கூறு 1 ஆதலால் வேண்டிய எண் 36·45 ஆகும்.

கணிக்கும் முறை உதாரணங்கள்

மடக்கை முறையில் செய் :

(1) $16{\cdot}73 \times 12{\cdot}03$ (2) $\cdot07912 \times 471{\cdot}2$

(3) $\cdot02468 \div \cdot008246$ (4) $(87{\cdot}42)^3$

(5) $\sqrt{28{\cdot}98}$ (6) $\sqrt{\cdot4385}$

1. $x = 16{\cdot}73 \times 12{\cdot}03$ என்க. $\log 16{\cdot}73 = 1{\cdot}2235$

$\log x = \log 16{\cdot}73 + \log 12{\cdot}03$ $\log 12{\cdot}03 = 1{\cdot}0802$

$\therefore \log x = 2{\cdot}3037$

$\therefore$ x = எதிர்மடக்கை $2{\cdot}3037 = \mathbf{201{\cdot}2}$

2. $x = \cdot07912 \times 471{\cdot}2$ என்க. $\log \cdot07912 = \bar{2}{\cdot}8983$

$\log x = \log \cdot07912 + \log 471{\cdot}2$ $\log 471{\cdot}2 = 2{\cdot}6732$

$\therefore \log x = 1{\cdot}5715$

$\therefore$ x = எதிர்மடக்கை $1{\cdot}5715 = 37{\cdot}28$

3. $x=\frac{\cdot 02468}{\cdot 008246}$ என்க.

$\log x=\log \cdot 02468-\log \cdot 008246$

$=\cdot 4761$

$\log \cdot 02468 = \bar{2}\cdot 3923$

$\log \cdot 008246 = \bar{3}\cdot 9162$

$\therefore x=$ எதிர்மடக்கை $\cdot 4761$

$=2\cdot 993$

4. $x=(87\cdot 42)^3$ என்க.

$\log 87\cdot 42 = 1\cdot 9416$

$\log x=3\times\log 87\cdot 42$

$1\cdot 9416\times 3=5\cdot 8248$

$\therefore x=$ எதிர்மடக்கை $5\cdot 8248$

$=668100$ (தோராயமாக)

5. $x=\sqrt{28\cdot 98}$ என்க.

$x=(28\cdot 98)^{\frac{1}{2}}$

$\log 28\cdot 98=1\cdot 4621$

$\log x=\frac{1}{2}\log(28\cdot 98)$

$=\cdot 7310$ $x=$ எதிர்மடக்கை $\cdot 7310$

$x=5\cdot 383$

6. $x=\sqrt{\cdot 4385}$

$\log \cdot 4385=\bar{1}\cdot 6420$

$=(\cdot 4385)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\bar{1}\cdot 6420}{2}=\frac{\bar{2}+1\cdot 6420}{2}$

$\log x=\frac{1}{2}\log(\cdot 4385)$

$=\bar{1}\cdot 8210$

(ஒன்றைக் கூட்டி ஒன்றைக் கழிக்க வேண்டும்.)

$\therefore x=$ எதிர்மடக்கை $\bar{1}\cdot 8210$

$=\cdot 6622$

மூன்றும் பகுதி

செயல்முறை வேலைகள்

கீழே கொடுக்கப்பட்டவை செயல்முறை வேலைகளாகக் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவை ஆசிரியர் பயிற்சி பெறும் மாணவர்கள் அவ்வப்போது முயற்சியுடன் செய்தறிய வேண்டிய அம்சங்களாகும்.

1. பல்வேறு படிவங்களுக்கான பருவ (term), மாத, வார, வேலைத் திட்டத்தை அமைத்தல்.

2. பாடத் தலைப்புகளுக்கேற்ற கற்பித்தல் கருவிகளைச் செய்தலும், பயன்படுத்துதலும்—அத்தியாயம் 6-ல் சில குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

3. பள்ளிக் கல்வித் திட்டத்திலுள்ள பல்வேறு தலைப்புகளுக்கேற்ற அடைவுச் சோதனைகளையும், குறையறி சோதனைகளையும் அமைத்தல்—அத்தியாயம் 7-ல் சில குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

4. 'உயரம், தூரம், நீளம், பரப்பு இவற்றை அளவிடுதல்' போன்ற தலைப்புகளுக்கேற்ற செயல்முறை வேலைகள்—அத்தியாயம் 6-ல் சில குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

5. கணிதக் கழகம் அமைத்தலும் கணிதத்தில் ஆர்வ மூட்டும் தலைப்புகளைப்பற்றிய கட்டுரை எழுதுதலும்—அத்தியாயம் 6-ல் சில குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

1. **Mathematics for the Secondary school** — William David Reeve.

2. **The Teaching of Arithmetic** — Paul Klapper.

3. **The Teaching of Mathematics in the Elementary and Secondary School** — J. W. A. Young.

4. **The Teaching of Modern School Mathematics**—E. J. James.

5. **The Teaching of Mathematics in Secondary Schools** — Arthur Schultze.

6. **The Teaching of Elementary Mathematics** — Smith.

7. **A Short Account of the History of Mathematics** — Rouse Ball.

8. **History of Mathematics** — Smith.

9. **The Teaching of Secondary Mathematics** — Butler and Wren.

10. **Teaching Arithmetie for Understanding** — Marks, Purdy, Kinney.

11. **Statistics in Psychology and Education** — Henry. E. Garrett.

12. **New Mathematics** — R. D. Knight.

13. **The Psychology of Learning Mathematics** — Skemp.

14. **The Teaching of Arithmetic and Elementary Mathematics** —Hemmings.

15. **Introduction to Mathematics** — Cooley, Kline, Wahlert.

கலைச்சொற்கள்

A

Abacus — மணிச்சட்டம்
Accuracy — திருத்தம், திட்பம்
Achievement — அடைவு
Activities — செயல்கள்
Aeronautic — விண்செலவு சார்ந்த
Agronomy — தாவர வளர்ச்சி
Aids — துணைக் கருவிகள்
Aim — நோக்கம், குறிக்கோள்
Algebra — இயற்கணிதம்
Analysis — பகுப்பு, பாகுபாடு
Analytic method — பகுப்பு முறை
Angle of depression — இறக்கக் கோணம்
Angle of elevation — ஏற்றக் கோணம்
Anthropology — மானுடவியல்
Application — செயல்முறை
Assignment — ஒப்படை
Assimilation — தன்வயப்படுத்தல்
Astronomy — வானவியல்
Attainment — தேர்ச்சி
Audio-visual aids — காட்சி-கேள்விக் கருவிகள்
Average — சராசரி
Axiom — வெளிப்படை உண்மை

B

Bacteriology — நுண்ம ஆய்வியல்
Bar diagram — பட்டை விளக்கப்படம்
Budget — வரவு செலவுத் திட்டம்

C

Calculus — நுண்கணிதம்
Calendar — நாட்காட்டி

Central tendency — மையநிலைப் போக்கு
Characteristic — சிறப்பியல்பு
Chart — கருத்து வரைபடம்
Class frequency — பிரிவு நிகழ்வெண்
Class interval — பிரிவு இடைவெளி
Class limits — பிரிவு எல்லைகள்
Club — கழகம்
Coefficient — குணகம், கெழு
Coefficient of correlation — உடன் தொடர்பு கெழு
Concept — கருத்து
Constant — நிலையான, மாறாத, மாறிலி
Core — அடிப்படை
Correlate — இணை
Cost of living index number — வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டு எண்
Craft — கைத்தொழில்
Cumulative — திரள், குவிப்பு
Cumulative records — திரள் பதிவேடுகள்
Curriculum — கல்வித்திட்டம்
Curvative — வளைவு
Curve — பாதை, வளைவு

D

Deduce — பகுத்தறி, உய்த்துணர்
Deduct — கழி, எடு, குறை
Deduction — பகுத்தறிதல்
Deviation — விலக்கம்
Diagnose — குறையறி
Diagram — விளக்கப்படம்
Didactic apparatus — கற்பிக்கும் கருவிகள்
Dimension — பரிமாணம்
Disciplinary — கட்டுப்பாடு
Drill — பன்முறைப் பயிற்சி

E

Economics — பொருளியல்
Electronics — மின்மம்
Engineering — பொறியியல்
Equation — சமன்பாடு

Evaluate — மதிப்பிடு
Evaluation — மதிப்பிடுதல்
Experience — பட்டறிவு

F

Factor — காரணி
Film — திரைப்படம்
Film strip — திரைப்படத் துண்டு
Frequency — நிகழ்வெண்
Frequency curve — நிகழ்வெண் வரை
Frequency distribution — நிகழ்வெண் பரவல்
Frequency graph — நிகழ்வெண் வரைபடம்
Frequency polygon — நிகழ்வெண் பலகோணம்
Function — சார்பு, சார்பலன்

G

Gifted — மீத்திறம்பெற்ற
Graph — வரைபடம்
Group work — குழு வேலை

H

Heuristic method — கண்டறிமுறை
Histogram — செவ்வகப்பட்டைவடிவம்
Hydrostatics — நீர் நிலையியல்

I

Icosohedron — இருபது தளக் கன உருவம்
Identity — முற்றொருமை
Index — அடுக்குக்குறி
Inductive method — தொகுத்தறி முறை
Intuition — உள்ளுணர்வு

L

Laboratory — சோதனைச்சாலை
Lesson plan — பாடக் குறிப்பு
Locus — நியமப் பாதை
Logarithm — மடக்கை
Logic — தருக்க நூல்
Loop — வளையம்

M

Magnification — உருப்பெருக்கம்
Marine — கப்பல்பற்றிய
Mark — மதிப்பெண்
Mean — சராசரி
Median — மையக்கோடு, மையநிலைச் சராசரி
Memorize — மனனம்
Method developmental — வளர்ச்சியுறும் முறை
Method psychological — உளவியல் முறை
Methodology — முறையியல்
Mode — முகடு
Multiple choice — பல்விடையில் தேர்வு

N

Notes of lesson — பாடக் குறிப்புகள்
Number, composite — பகு எண்
Number, natural — இயல் எண்
Number, prime — பகா எண்

O

Objective — குறிக்கோள்
Offset — குத்தளவு
Ogive — ஓகைவ்
Ogive greater than — மேலின வளர் நிகழ்வரை
Ogive less than — கீழின வளர் நிகழ்வரை
One to one correspondence — ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியைபு
Oral work — வாய்மொழி வேலை

P

Parabola — பரவளைவு
Physics — இயற்பியல்
Pharmocology — மருத்துப்பொருளியல்
Polyhedra — பன்முகத் திண்மங்கள்
Problem — புதிர், சிக்கல், உத்திக்கணக்கு, சிந்தனைக்கணக்கு
Proposition — கூற்று
Pyramid — பட்டைக்கூம்பு

Q

Quartile — கால்மானம்

R

Rank correlation — வரிசை இணைப்பு
Rationalisation — காரணவிளக்கம்
Reflection — பிரதிபலிப்பு
Rotation — சுழற்சி
Rough work — சில்லறை வேலை

S

Shear — சறுக்குப் பெயர்ச்சி
Sieve of Eratosthenes — எண் சல்லடை
Slide rule — நழுவு கணிப்பான்
Slides — நழுவங்கள்
Social science — மன்னுய நூல்
Span — அகலம், வீச்சு
Spiral — சுருள்
Standard deviation — திட்ட விலக்கம்
Stretch — நீட்டுதல்
Subjective — அகவயமான
Supervised study — நேரடி மேற்பார்வைப் படிப்பு
Synthesis — தொகுத்தல்

T

Telescope — தொலைநோக்கி
Test achievement — அடைவுச் சோதனை
Test aptitude — நாட்டச் சோதனை
Test diagnostic — குறையறி சோதனை
Topology — நெகிழ்வடிவியல்
Translation — இடப்பெயர்ச்சி

U

Universe — பேரண்டம்

W

Work-book — வேலைக் குறிப்பேடு

Z

Zero — பூச்சியம்